

Lezione del 21 Novembre

Il 27^(?) Novembre (Mercoledì)

non c'è lezione

Esercizi con sviluppi di McLaurin

$$\text{es } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sin x} - 1 - x}{x \log x}$$

Sviluppo di McLaurin di $e^{\sin x}$

$$t = \sin x \quad x \rightarrow 0 \quad t \rightarrow 0$$

$$e^t = \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) \right)$$

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= 1 + \sin x + \frac{1}{2} (\sin x)^2 + o((\sin x)^2) = \\ &= 1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^2 \\ &+ o(x^2) = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Sviluppo di McLaurin di ordine 2

Sviluppo di $e^{\sin x}$ di ordine superiore a 2

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= 1 + \sin x + \frac{1}{2} \sin^2 x + \frac{1}{6} \sin^3 x + o(\sin^3 x) \\ &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{6} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^3 + o(x^3) \\
 & = 1 + x - \cancel{\frac{x^3}{6}} + \frac{1}{2} (x^2) + \cancel{\frac{1}{6} x^3} + o(x^3) \\
 & = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)
 \end{aligned}$$

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{1}{2} \sin^2 x + \frac{1}{6} \sin^3 x + \frac{1}{4!} \sin^4 x + o(\sin^4 x)$$

$$\sin x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) \quad \text{facendo i conti}$$

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + (K) x^4 + o(x^4) \quad \text{(prova a ver)}$$

da determinare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sin x} - 1 - x}{x \log x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \cancel{1} - \cancel{x}}{x \log x} =$$

numeratore

$$e^{\sin x} - 1 - x = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

↳ è infinitesimo di ordine 2

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2} x^2}{\cancel{x} \log x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x \log x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{1} + \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + o(x^2) - \cancel{1} - \cancel{x} - \cancel{\frac{x^2}{2}}}{x \log x}$$

in questo caso bisogna andare avanti con lo sviluppo di $e^{\sin x}$

Si usano anche gli opportuni limiti di successione $\alpha > 0$

$$\lim_n \frac{n^\alpha \left(\sinh \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \right)}{\cos \frac{1}{n}}$$

mi studio Numeratore

$$\frac{1}{n} = x \rightarrow 0$$

$$\lim_n \left(\sinh \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \right) n^\alpha =$$

$$= \lim_n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{n} \right)^3 + o\left(\left(\frac{1}{n} \right)^3 \right) - \frac{1}{n} \right) \cdot n^\alpha$$

$$= \lim_n \left(\frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3} \right) \right) n^\alpha =$$

$$= \lim_n \frac{1}{6} \frac{n^\alpha}{n^3} = \lim_n \frac{1}{6} \frac{1}{n^{3-\alpha}}$$

$$\begin{array}{ccc}
 d < 3 & & d > 3 \\
 \lim_n () = 0 & & h = +\infty \\
 & & d=3 \\
 & & h = \frac{1}{0}
 \end{array}$$

$n^d \left(\sinh \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \right)$
 $\cos \frac{1}{n} \rightarrow 1$

$\frac{1}{n} = x$
 $\frac{1}{n} \rightarrow 0$

$$\cos \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\lim_n \frac{1 - n^2 \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + \frac{\sin n}{n^3}}{n^d \arctg\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\underline{N.} \quad 1 - n^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} \right)^2 + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \right) + \frac{\sin n}{n^3}$$

$$= \cancel{1} - \cancel{1} + \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{\sin n}{n^3}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} + \frac{\sin n}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$? \quad \frac{\sin n}{n^3} = ? \quad o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$\Downarrow$

$$\frac{\sin n}{n^3} \cdot \cancel{n^2} = \frac{\sin n}{n} \rightarrow 0 \text{ vero!}$$

$$N. = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \begin{array}{l} \text{è infinitesimo} \\ \text{di ordine} \\ \text{2 rispetto ad } \frac{1}{n} \end{array}$$

$$D. \quad n^d \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right) = n^d \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \\ = \left(n^{d-1} + o\left(n^{d-1}\right) \right) = n^d \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)$$

$$\lim_n \frac{N.}{D.} = \lim_n \frac{\frac{1}{2n^2}}{n^{d-1}} = \lim_n \frac{1}{2n^{d-1+2}}$$

$$= \lim_n \frac{1}{2n^{d+1}} \begin{cases} d > -1 & \lim(\cdot) = 0 \\ d = -1 & \lim(\cdot) = \frac{1}{2} \\ d < -1 & \lim(\cdot) = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sec(x^d) - x + e^{-1/x^2}}{(1/x)^2} \quad \begin{array}{l} d > 0 \\ \cos x \\ \downarrow \\ 1 \end{array}$$

$$N. = x^d - \frac{1}{6}(x^d)^3 + o(x^{3d}) - x + o(x^{3d})$$

$$= x^d - x - \frac{1}{6}x^{3d} + o(x^{3d})$$

$$D. = \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)^2 = \\ = x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{N.}{D.} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha - x - \frac{1}{6}x^{3\alpha} + o(x^{3\alpha})}{x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)}$$

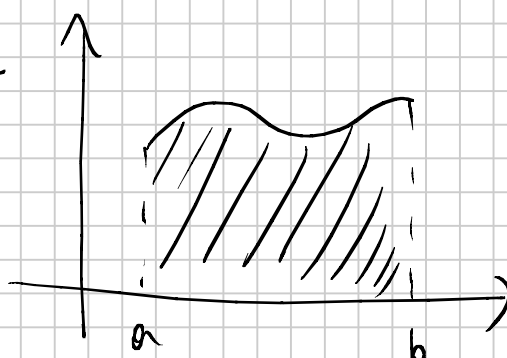
$\frac{N.}{D.}$
 $\frac{x^\alpha}{x^2} \rightarrow (+\infty)$
 $\alpha < 1$
 $\lim(\) = +\infty$

$\frac{N.}{D.}$
 $\frac{-x}{x^2}$
 $\alpha > 1$
 $\lim(\) = -\infty$
 $\alpha > 1$

$\alpha = 1$
 $\frac{N.}{D.} = \frac{-\frac{1}{6}x^3}{x^2}$
 $\lim(\) = 0$
 $\alpha = 1$

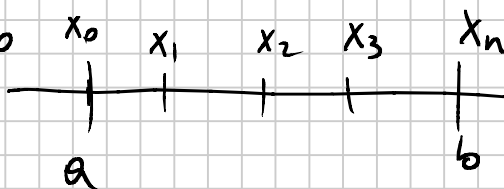
Integrali definiti

f definita in $[a, b]$
 limitata
 $f \geq 0$



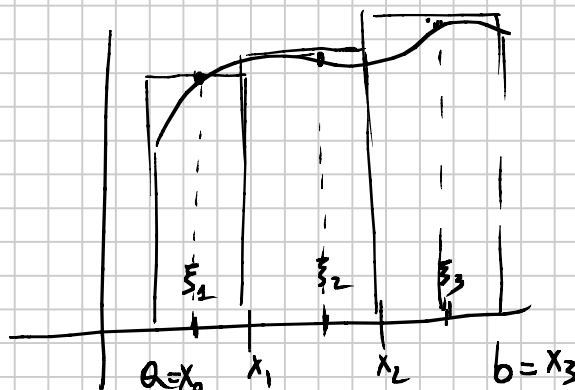
$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata. Consideriamo una suddivisione di $[a, b]$

$a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$
 intervalli tutti uguali di lunghezza



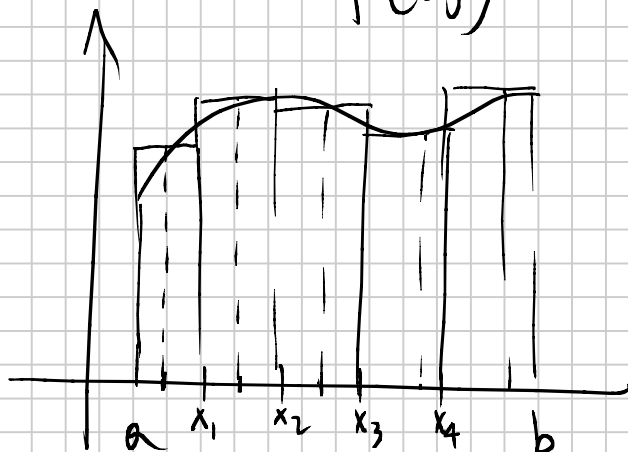
$$\frac{b-a}{n}$$

prendo ξ_j punto
 arbitrario
 nell'intervallo (x_{j-1}, x_j)



$$\sum_{j=1}^n f(\xi_j) (x_j - x_{j-1}) = \text{area del rettangolo generico di base } (x_j - x_{j-1})$$

$\Downarrow$ somme delle aree dei rettangoli di base $(x_j - x_{j-1})$ e altezze $f(\xi_j)$



Cambiando il numero delle suddivisioni n cambia anche la somma delle aree dei rettangoli costruiti sopra

$$S_n := \sum_{j=1}^n f(\xi_j) (x_j - x_{j-1})$$

S_n = somme di Cauchy - Riemann

S_n varia al variare di n , cioè al variare del numero di suddivisioni di $[a, b]$.

Def. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata è integrabile in $[a, b]$ se esiste limite S_n e tale limite non dipende dalla scelta dei punti ξ_j e

$$\lim_n S_n =: \int_a^b f(x) dx$$

"integrale da a a b di $f(x)$ in dx "

oss. $\int_a^b f(x) dx$

x variabile
d'integrazione
variabile "mute"

$$\int_a^b f(t) dt$$

$$\int_a^b f(\tau) d\tau$$

$$\sum_{k=1}^5 \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

$$\sum_{j=1}^5 \frac{1}{j} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{5}$$

Interpretazione geometrica

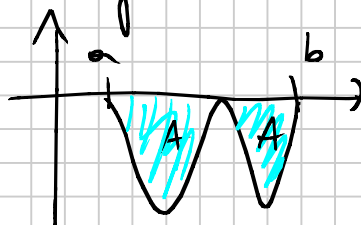
$f \geq 0$ $[a, b]$

S_n = area della somma
dei rettangoli



$S_n \rightarrow \int_a^b f(x) dx$ = area delle righe
sotto il grafico di f
e sopra l'asse delle x

se $f \leq 0$ in $[a, b]$

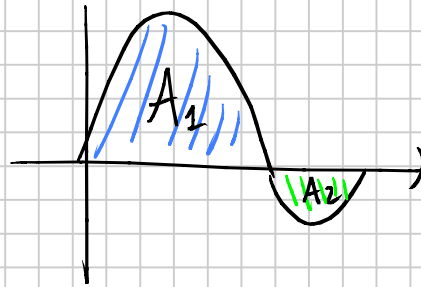


$$\int_a^b f(x) dx = - \text{area}(A) = \text{area con segno} \leq 0$$

se f cambia segno

$$\int_a^b f(x) dx =$$

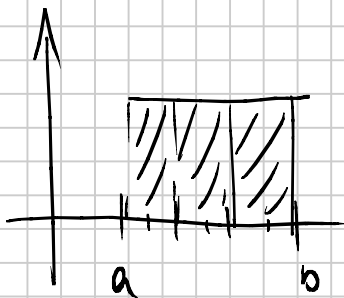
$$= \text{area } A_1 - \text{area } A_2$$



$$[a, b] = [0, 2\pi]$$

$$\text{area } A_1 = \text{area } A_2$$

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = \text{area } A_1 - \text{area } A_2 = 0$$



$$\int_a^b c dx$$

$$f(x) = c$$

$\nearrow$ n rettangoli

$$S_n = \underbrace{c}_{\text{altezza}} \underbrace{\left(\frac{b-a}{n}\right)}_{\text{base di un rettangolo}} n = c(b-a)$$

$$S_n = c(b-a) \quad b \text{ } \exists \text{ finito}$$

$$\lim_n S_n = c(b-a) = \int_a^b c dx$$

$$\int_a^b c dx = c(b-a)$$

