26 Novembre

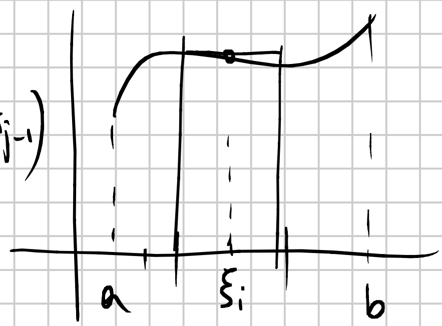
Domani pausa! Non c'è lezione.

Integrali definiti

$f : [a,b]$ limitata $\quad \int_a^b f(x)dx$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_n S_n = \text{somme di Cauchy-Riemann}$$

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$



1) $f(x) = c \qquad \int_a^b f(x)dx = c \cdot (b-a)$

OSS Se f è limitata $\Rightarrow$ f è integrabile?

NO!

controesempio

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \qquad x \in [0,1]$$

f è limitata ma non è integrabile

Scelgo $\xi_j \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(\xi_j) = 1$

$$S_n = 1\sum(x_j - x_{j-1}) = 1\cdot 1 = 1 \qquad S_n \to 1$$

Scelgo $\xi_j \notin \mathbb{Q} \Rightarrow f(\xi_j) = 0$

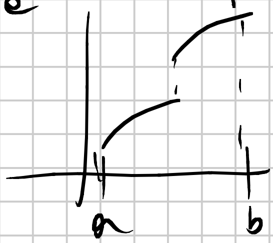
$$S_n = 0 \longrightarrow 0$$

Quindi $\lim_n S_n$ dipende dalla scelta degli $\xi_j \Rightarrow f(x)$ <u>non</u> è integrabile.

Si può dimostrare:

<u>Teo.</u> $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua $\Rightarrow f$ è integrabile

<u>Teo.</u> $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monotona e limitata $\Rightarrow f$ è integrabile

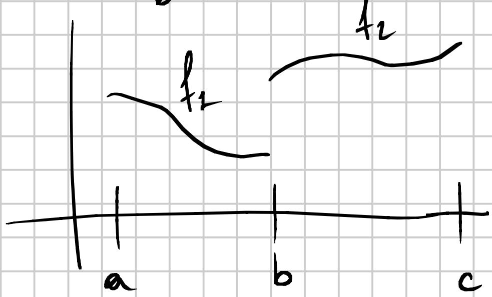


<u>Teo.</u> f_1 integrabile in $[a,b]$
f_2 " in $[b,c]$

$$f(x) = \begin{cases} f_1 & [a,b) \\ f_2 & [b,c] \end{cases}$$

$f(x)$ è integrabile in $[a,c]$ e

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_b^c f_2(x)\,dx$$



Proprietà dell'integrale definito

Teorema f, g integrabili in $[a,b]$ $\Rightarrow$ (1) $\alpha f + \beta g$ è integrabile, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

e $$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

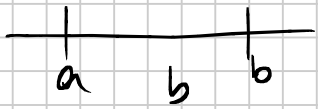
Linearità

(2) f è integrabile anche in $[a,c]$ e $[c,b]$ e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

additività rispetto all'intervallo di integrazione

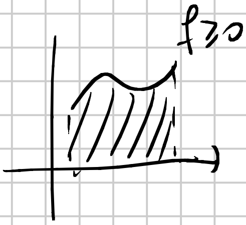
Convenzione



$\int_a^b$ $\quad a < b$

$$\int_b^a f(x)\,dx \mathrel{\dot{=}} -\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_2^1 f(x)\,dx \mathrel{\dot{=}} -\int_1^2 f(x)\,dx$$



(3) $f \geq 0$ in $[a,b]$ $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

(4) $f \geq g$ in $[a,b]$ $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

monotonia dell'integrale

(5) $$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Dim. no! (diretta dalla def. di S_n).

— . —

Teorema della media (integrale)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua. Allora $\exists\, c\in[a,b]$

t.c. $$\underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{Media integrale}} = f(c)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{(b-a)f(c)}_{\text{area del rettangolo di base } b-a \text{ e altezza } f(c)}$$

Dim. f continua in $[a,b]$

$\exists\, M$ e m max e min di f

$$m \le f(x) \le M$$

per la monotonia dell'integrale (4)

$$m(b-a)=\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx = M(b-a)$$

$$m \le \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}_{\lambda} \le M$$

$$m \le \lambda \le M$$

Siccome f è continua f assume tutti i valori tra m e M (Teo. dei valori intermedi)

Quindi $\exists\, c\in[a,b]:\ f(c)=\lambda$

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Come si calcolano gli integrali definiti?
Non si può usare la definizione.

Definizione di primitiva f definita in $[a,b]$.
$G(x)$ derivabile in $[a,b]$ è una **PRIMITIVA** di f in $[a,b]$ se $G'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a,b]$

es. $G(x) = x^2$ è una primitiva di $f(x) = 2x$
$G(x) = \operatorname{sen} x$ " " $f(x) = \cos x$
$G(x) = \ln x$ " " $f(x) = \frac{1}{x}$

Teo. Sia G una primitiva di f. Allora tutte e sole le primitive di f sono del tipo $G(x) + K$, $K \in \mathbb{R}$.

Dim. 1) Se prendo $G(x) + K$, questa è una primitiva di $f(x)$

$$(G(x) + K)' = G'(x) + 0 = f(x)$$

2) Se G_1 e G_2 sono due primitive di $f(x)$, allora $G_1 = G_2 + K$

$$\begin{aligned} G_1' &= f \\ G_2' &= f \end{aligned} \Rightarrow G_1' - G_2' = 0$$
$$\Downarrow$$
$$(G_1 - G_2)' = 0 \quad \text{in } [a,b]$$

poiché $G_1 - G_2$ è derivabile in $[a,b]$ e ha derivata nulla in $[a,b]$ $\Rightarrow G_1 - G_2 = K$ in $[a,b]$
$\Rightarrow G_1 = G_2 + K$ #

$$\int f(x)\,dx = \{ \text{tutte le primitive di } f(x) \}$$

INTEGRALE INDEFINITO (è un insieme di funzioni)

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

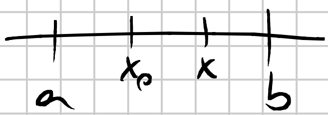
$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log x + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow \text{INTEGRALE DEFINITO}$$

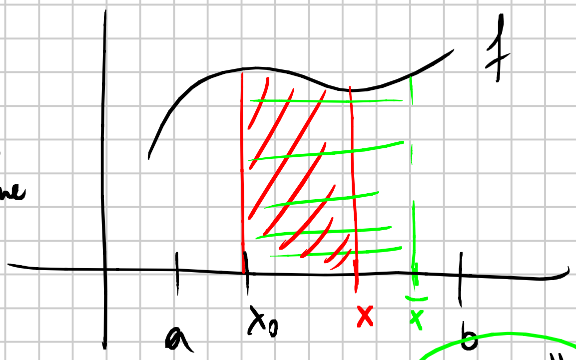
È NUMERO

Funzione integrale di $f(x)$ relativa a x_0

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$



$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ è l'area della regione "rossa"



$\int_{x_0}^{\bar{x}} f(t)\,dt$ è l'area della regione "verde"

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

è una funzione che varia con x

la variabile muta t varia tra x_0 e x

dove x_0 è fissato e x è variabile in $[a,b]$.

Teorema fondamentale del calcolo integrale

(p. 307)
solo punto 2

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continua

$$F(x) \doteq \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \,, \quad x_0 \in [a,b] \text{ fissato}$$

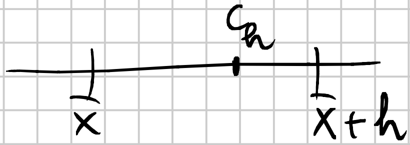
Allora $F(x)$ è derivabile e $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$

Dim. Mi calcolo il rapporto incrementale di $F(x)$ in $\bar{x}$

$$\frac{F(\bar{x}+h) - F(\bar{x})}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{\bar{x}+h} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{\bar{x}} f(t)\,dt \right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\underbrace{\cancel{\int_{x_0}^{\bar{x}} f(t)\,dt} + \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(t)\,dt}_{\text{additività dell'integrale}} - \cancel{\int_{x_0}^{\bar{x}} f(t)\,dt} \right)$$

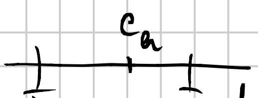
$$= \frac{1}{h} \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(t)\,dt =$$



uso il teorema della media integrale (f continua in $[a,b]$) in $[\bar{x}, \bar{x}+h]$

$\exists\, c_h \in [\bar{x}, \bar{x}+h]$:

$$\frac{1}{h} \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(t)\,dt = f(c_h)$$



$$\frac{F(\bar{x}+h) - F(\bar{x})}{h} = f(c_h)$$

$$F'(\bar{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{F(\bar{x}+h) - F(\bar{x})}{h} = \lim_{h\to 0} f(c_h) = f(\bar{x})$$

se $h \to 0$, $c_h \to \bar{x}$ $\quad f(c_h) \to f(\bar{x})$

poichè f è continua

#

Teo. fond. calcolo integrale

f è continua in $[a,b] \Rightarrow \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = F(x)$ è una primitiva di f

$$\int f(x)\,dx = \underbrace{\underbrace{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}_{\text{è una primitiva di } f}}_{\text{funzione integrale}} + K$$

$\Downarrow$

insieme di tutte le primitive

Corollario (2° teo. fond. calcolo integrale)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. G primitiva di f

allora $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) = G(x)\Big|_a^b$

Dim. $f(x)$ $\quad G$ primitiva di f

$x_0 = a$

$$G(x) = \underbrace{\int_a^x f(t)\,dt}_{\text{è una primitiva}} + K \qquad G = F + K$$

$$G(a) = \int_a^a f(t)\,dt + K \qquad \underbrace{\int_a^a}_{=0} \qquad G(a) = K$$

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt + G(a)$$

$x = b$ $$G(b) = \int_a^b f(t)\,dt + G(a)$$

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a) \quad \#$$

ES. $$\int_a^b \operatorname{sen} x\,dx = -\cos b - (-\cos a) = -\cos b + \cos a$$

G primitiva di $\operatorname{sen} x$ $\qquad G(x) = -\cos x$

$$\int_3^5 \frac{1}{x}\,dx = \log x \Big|_3^5 = \log 5 - \log 3$$

? $$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx =$$

$\frac{1}{x}$ non è definita in $x=0$

non è un integrale definito

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + K \qquad \forall \alpha \neq -1$$

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + K$$

$$\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}$$

Limiti con sviluppi di McLaurin

es. $$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\log x + x^3 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{2^x - 1}$$

$x \to 0$

$x^2 \log x \to 0$

$x \log x$ non è infinitesimo di nessun ordine rispetto a x

non ha ordine di infinitesimo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}\log x}{\cancel{x}} = -\infty \qquad \frac{x\log x}{x}$$

x è infinitesimo di ordine superiore a $x\log x$

$x^{1-\alpha}$, $x\log x$ $\quad x \quad x^2 \quad x^3$

$$\frac{x\log x}{x^{1-\alpha}} = x^\alpha \log x \to 0 \quad \text{comunque si prenda } \alpha$$

$x\log x$ è infinitesimo di ordine superiore rispetto a $x^{1-\alpha}$

$\Rightarrow x\log x$ non ha ordine d'infinitesimo rispetto a x

$\nexists$ nessuna potenza di x $\quad x^{\beta}$

A.C. $\quad \dfrac{x \log x}{x^{\beta}} \longrightarrow$ numero finito $\neq 0$

$$\dfrac{x \log x}{x^{\beta}} \to \begin{cases} 0 \\ -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \log x + x^3 \operatorname{sen}\frac{1}{x}}{2^x - 1}$$

D. $\quad 2^x = e^{x \log 2} = \underbrace{1 + x \log 2 + \frac{1}{2}(x \log 2)^2 + o(x^2)}$

$x \log 2 \to 0 \qquad x \to 0$

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$$

$$2^x - 1 = x \log 2 + \frac{1}{2} x^2 (\log 2)^2 + o(x^2)$$

mi basta $\quad 2^x - 1 = x \log 2 + o(x)$

N. $\quad x^2 \log x + x^3 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad$ lo lascio così

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \log x + x^3 \operatorname{sen}\frac{1}{x}}{x \log 2 + o(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}\left(x \log x + x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\log 2 + \frac{o(x)}{x}\right)}$$

$$= 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha \log x + x^2 \operatorname{sen} x + \left(1-e^{\operatorname{sen}^2 x}\right)^2}{\log(1-\operatorname{senh} x) + x + 3^{-1/2x}}$$

<u>N.</u> $x^\alpha \log x + x^2\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) +$

$$+\left(-\operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^4 x + o(x^4)\right)^2 =$$

$$e^{\operatorname{sen}^2 x} = 1 + (\operatorname{sen}^2 x) + \frac{1}{2}(\operatorname{sen}^4 x)$$

$$= x^\alpha \log x + x^3 - \frac{1}{6}x^5 + o(x^5) +$$

$$+\left(-\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^2 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^4\right)^2$$

$$= x^\alpha \log x + x^3 + o(x^3) +$$

$$+\underbrace{\left(-x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)\right)^2}_{=o(x^3)}$$

<u>N.</u> $x^\alpha \log x + x^3 + o(x^3)$

<u>D.</u> $\log(1-\operatorname{senh} x)$

$$\log_{y\to 0}(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3)$$

$$\log(1-\operatorname{senh} x) = -\operatorname{senh} x - \frac{1}{2}(\operatorname{senh} x)^2 - \frac{1}{3}(\operatorname{senh} x)^3 + o(\operatorname{senh} x)^3$$

$$= -x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 - \frac{1}{3}\left(x + \frac{x^3}{6} + o\right)^3 + o(x^3)$$

$$= -x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$= -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$$

$$\underline{D.} \quad \log(1-\sinh x) + x + \underbrace{3^{-\frac{1}{2x}}}_{=o(x^3)}$$

$$= \cancel{-x} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3) + \cancel{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{N}{D} = \frac{x^\alpha \lg x + x^3 + o(x^3)}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}$$

$\alpha > 3$

$$x^\alpha \log x = o(x^3)$$

$$\frac{x^\alpha \lg x}{x^3} = x^{\alpha-3} \lg x \to 0$$

$\alpha > 3$

$$\frac{x^3 + o(x^3)}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} \to 0$$

$\alpha = 3$

$$\frac{\cancel{x^3} \lg x + \cancel{x^3}}{-\frac{\cancel{x^2}}{2}} \qquad \frac{x \lg x + x}{-\frac{1}{2}} \to 0$$

$\alpha < 3$ dividete per x^2 . . .