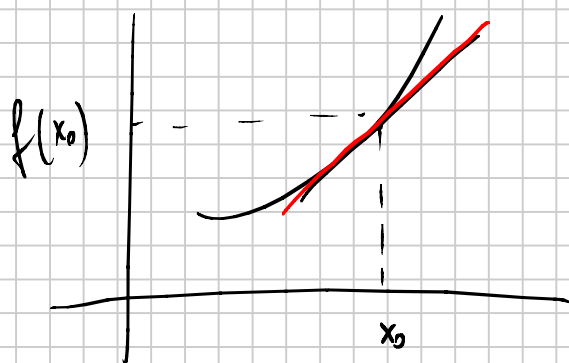


6 Novembre

Def. $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ si dice derivabile in $x_0 \in (a, b)$ se esiste finito

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =: f'(x_0)$$

derivata
funzione
di f
in x_0



↓
Coefficiente
angolare
di τ

• $f(x) = x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad x > 0$

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

• $f(x) = \sin x$ è derivabile in $x \in \mathbb{R}$?

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cosh + \sinh \cos x - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \left(\frac{\cosh - 1}{h} \right) + \left(\frac{\sinh}{h} \right) \cos x = \cos x$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 0 1

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$$

Calcolare la derivata di $\sin x$ per $x = \frac{\pi}{4}$

$$f'(x) = \cos x \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Calcolare la retta tangente al grafico di $\sin x$ per $x = \pi/4$

$$y = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{m} (x - x_0)$$

$$(x_0, f(x_0))$$

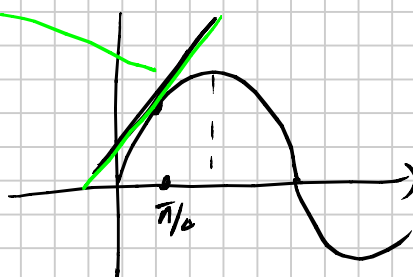
retta tg. al
grafico di f
in $(x_0, f(x_0))$

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$x_0 = \pi/4$$

$$f(x_0) = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$



$$\cdot f(x) = \cos x$$

$$f'(x) = -\sin x$$

$$\cdot f(x) = e^x$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^x \left(\frac{e^h - 1}{h} \right) = e^x$$

$$f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x$$

$$\cdot f(x) = \log x$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\log\left(1 + \frac{h}{x}\right) \right) = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$$

$$f(x) = \log x \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = x^2, \quad f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad f(x) = e^x$$

$f(x) = \log x$ sono derivabili in tutti i

punti in cui sono definite e ho trovato

$f'(x)$. Se $f'(x)$ è a sua volta
derivabile $\Rightarrow f''(x)$ derivata seconda
di f in x

$$f''(x_0), \quad D^2 f(x_0), \quad \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$$

... e in generale si definiscono le derivate

$$n\text{-esime di } f : f^{(n)}(x_0), \quad D^n f(x_0), \quad \frac{d^n f}{dx^n}(x_0)$$

$$\text{es. } f(x) = \sin x \quad f'(x) = \cos x \quad f''(x) = -\sin x$$

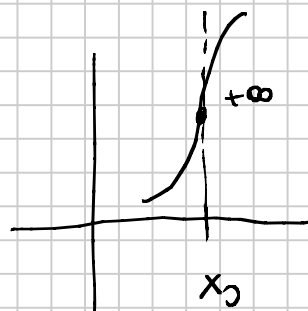
$$f'''(x) = -\cos x \dots$$

$$f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x \quad f''(x) = e^x$$

$$f^{(n)}(x) = e^x$$

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, f continua in x_0

e $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \begin{matrix} +\infty \\ \text{oppure} \\ -\infty \end{matrix}$



il limite $\exists$ ma non è finito.

Si dice che f ha tangente verticale in x_0

es. $f(x) = \sqrt{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\alpha = \frac{1}{3}$

$f'(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} \frac{1}{x^{2/3}}$

non vale
in $x=0$!

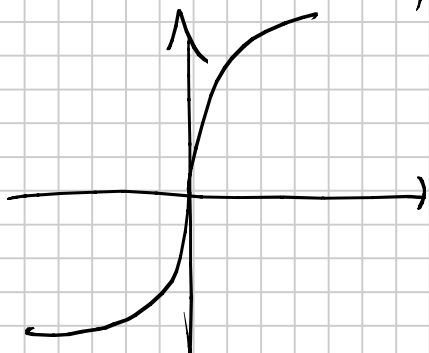
f è derivabile in $x=0$? $x_0=0$

$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \frac{1}{h^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}}$

no! Il limite del rapporto incrementale $\xrightarrow{h \rightarrow 0} +\infty$

$\exists$ ma $\bar{e} +\infty$

$\Rightarrow f$ ha tangente verticale in $x=0$



Altro caso

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$



per esempio

①

$f^{1+}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+}$

$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

$\exists$ finito $= l_1$

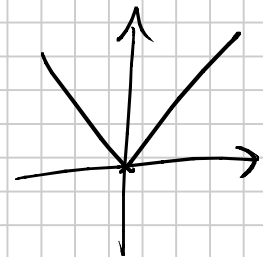
$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \exists f'_{\text{sinistra}} = l_1 \neq l_2$$

$f'^+(x_0)$ derivata destra

$f'^-(x_0)$ " sinistra.

supponiamo che f sia continua in x_0
 $\Rightarrow$ allora indica che f ha un p.to angoloso in x_0 .

es. $f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$



In quali punti $f(x) = |x|$ è derivabile

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

e in $x=0$?

$\xrightarrow[h]{\leftarrow}$ $\frac{f(h) - f(0)}{h} = \begin{cases} \frac{h}{h} = 1 & h > 0 \\ -\frac{h}{h} = -1 & h < 0 \end{cases}$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} 1 = 1 = f'^+(0)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} -1 = -1 = f'^-(0)$$

$|x|$ non è derivabile in $x=0$ e in
 $x=0$ ha un p.to angoloso

② Il limite può non esistere anche

se $f^{'+}(x_0) = +\infty$

o viceversa

$f^{'-}(x_0) = -\infty$

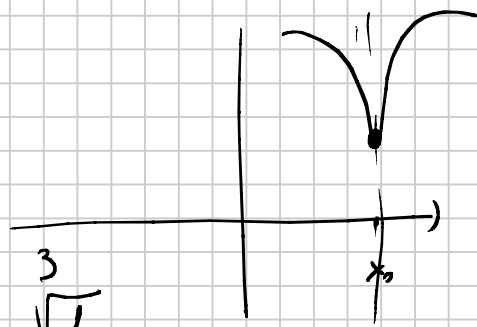
$\Rightarrow f$ ha una
cuspidale
in x_0

f continua in x_0

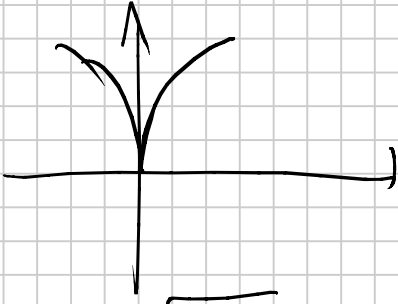
es. $f(x) = \sqrt{|x|}$

$f(x)$ è pari

$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = +\infty$



$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = -\infty$
perché è pari.



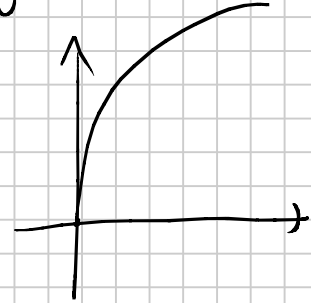
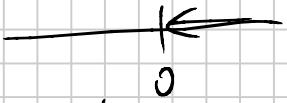
es. $f(x) = \sqrt{x} \quad x \geq 0$

$x > 0$ per $\sqrt{x}$ è derivabile $x^{1/2}$

$x = 0$?

ha senso fare solo la derivata dx

$f^{'+}(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h} - 0}{h} = +\infty$



$x=0$ è p.t. a t.p. verticale

Def. di funzione continua in x_0

$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$

Teorema Se f è derivabile in x_0 , allora f è continua in x_0 .

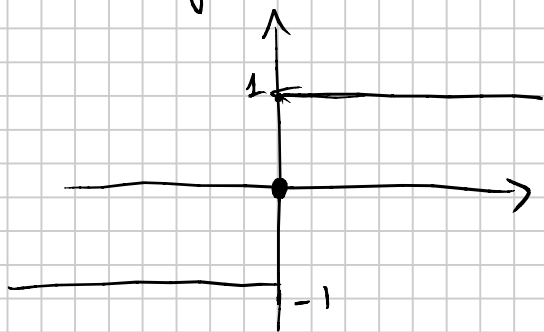


Dim $f(x_0+h) - f(x_0) = \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\substack{h \rightarrow 0 \\ f'(x_0) \text{ che } \exists \text{ finito}}} \cdot \underbrace{h}_{\rightarrow 0}$

$$f(x_0+h) \rightarrow f(x_0) \quad h \rightarrow 0$$

oss. La derivabilità di una funzione si studia solo nei p.h. in cui f è continua poiché dove f è discontinua o saltuariamente non è derivabile.

es. $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$



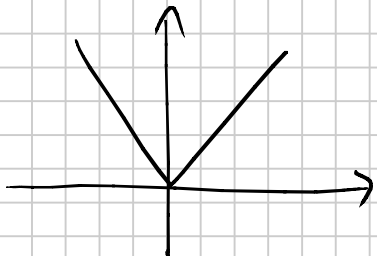
f non è continua
in $x=0$
 $\Rightarrow f$ non è derivabile

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sgn} h - \operatorname{sgn} 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1-0}{h} =$$

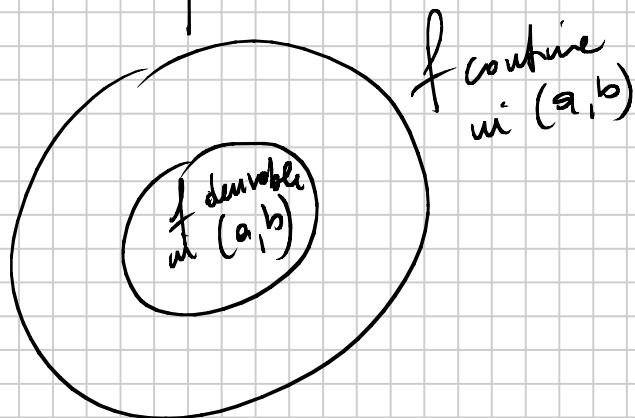
con la stessa fre-
quenza
che $= +\infty$

oss. f derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0

non vale il viceversa
 f continua in $x_0 \not\Rightarrow f$ derivabile in x_0



$|x|$ continua in $x=0$
ma non derivabile in $x=0$



Algebra delle derivate

Teorema f, g derivabili in (a,b) , allora

$f \pm g, f \cdot g, \frac{f}{g} (g \neq 0)$ sono derivabili in (a,b)

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Dim. la formula della derivata del prodotto

$$(f(x)g(x))'$$

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x)}{h}$$

$$+ \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} = \underbrace{f(x+h)}_{\substack{f \text{ continua in } (a,b) \\ f(x)}} \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{\substack{h \rightarrow 0 \rightarrow g'(x)}}$$

$$+ g(x) \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

$\downarrow$
 $f'(x)$

#

Applicazione

$$1) (K f(x))' = \cancel{0 f(x)} + K f'(x)$$

$$f(x) = 17 \sin x$$

$$f'(x) = 17 \cos x$$

$$f(x) = -x^3$$

$$f'(x) = -3x^2$$

$$2) \left(\frac{1}{f} \right)' = \frac{-f'}{f^2}$$

$$\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

es. $\frac{1}{\sin x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$

es. $f(x) = 3x^2 + e^x \sin x + \frac{1}{\ln x}$

$$f'(x) = 3 \cdot 2x + e^x \sin x + e^x \cos x + \left(-\frac{1}{(\ln x)^2 x} \right)$$

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

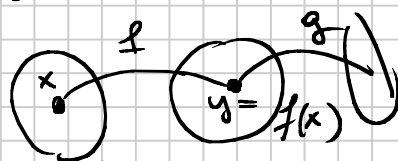
$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \frac{1}{\cos^2 x}$$

Derivata di una funzione composta

Teorema (regole della catena)

f derivabile in x e g derivabile in $y = f(x)$ allora



$g \circ f = g(f(x))$ è derivabile in x

e $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Dim. caso facile $\nexists f'(x) \neq 0$

(in un intorno di x)
 $f(x+h) \neq f(x)$
 cioè f non è costante vicino a x

$$\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} =$$

$$= \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$\downarrow \xrightarrow{h \rightarrow 0} g'(f(x))$
 $\quad \quad \quad \downarrow \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(x)$

$$\xrightarrow{h \rightarrow 0} g'(f(x)) \cdot f'(x) \quad \#$$

$$\boxed{(g \circ f)' = g'(f(x)) \cdot f'(x)}$$

es. $\sin(x^2) = h(x)$

$$x \xrightarrow{f} x^2 \xrightarrow{g} \sin(\quad)$$

$$h'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x$$

es. $h(x) = e^{-x}$ $x \xrightarrow{f} -x \xrightarrow{g} e^{(\quad)}$

$$h'(x) = \underbrace{e^{-x}}_{g'(f(x))} \cdot (-1) = -e^{-x}$$

es. $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$(\sinh x)' = \frac{1}{2} (e^x - (-e^{-x})) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \cosh x$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$(\cosh x)' = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = \sinh x$$

$a > 0$

$$h(x) = a^x = e^{\log a^x} = e^{x \log a}$$

$$h'(x) = e^{x \log a} \cdot \log a = a^x \log a$$

$$\text{es. } f(x) = 2 \log(\cos(x^2))$$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{\cos(x^2)} \cdot (-\sin(x^2)) \cdot 2x$$

Esercizi limiti di funzione
limiti di funzioni notevoli

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \rightarrow e \quad x \rightarrow \pm\infty$$

$$\frac{\log(1+x)}{x} \rightarrow 1 \quad x \rightarrow 0$$

$$\frac{e^x - 1}{x} \rightarrow 1 \quad x \rightarrow 0$$

$$\frac{a^x - 1}{x} \rightarrow \log a \quad x \rightarrow 0$$

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \rightarrow \alpha \quad x \rightarrow 0$$

$$\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1 \quad x \rightarrow 0$$

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2} \quad x \rightarrow 0$$

tutti questi
valgono se al
posto di $x \rightarrow 0$
c'è $g(x) \rightarrow 0$
 $x \rightarrow c$

generalizzazioni

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{\log(1+g(x))}{g(x)} = 1 \quad \text{se } g(x) \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow c$$

$$\left(\log_a x\right)^\alpha \quad x \rightarrow +\infty$$

$$x^\beta$$

$$b^x$$

$$\begin{aligned} b &> 1 \\ a &> 1 \\ \beta &> 0 \\ \alpha &> 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} y^\beta \mid \log y |^\alpha = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)^2}{\arcsin(x^2 + x^3)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sin x)^2 - e^{-2/x}}{\arcsin(x^2 + x^3) - X^{1/x}}$$

$$e^{-2/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} X^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\left(\frac{1}{x} \log x\right)} \xrightarrow{-\infty} = 0$$

$$\underline{N.} \quad (\sin x)^2 \left(1 - \frac{e^{-2/x}}{(\sin x)^2} \right)$$

$$\frac{e^{-2/x}}{(\sin x)^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{X^2}{X^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-2/x}}{X^2} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^{-2y} \cdot y^2 = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^2}{e^{2y}} = 0$$

$$\frac{e^{-2/x}}{(\sin x)^2} \rightarrow 0 \quad x \rightarrow 0^+$$

$$e^{-2/x} = o((\sin x)^2) \quad x \rightarrow 0$$

$$\underline{D.} \quad \arcsin(x^2 + x^3) - X^{1/x} = \arcsin(x^2 + x^3) \left(1 - \frac{X^{1/x}}{\arcsin(x^2 + x^3)} \right)$$

$\frac{\arcsin y}{y} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 1$
 $\frac{X^{1/x}}{\arcsin(x^2 + x^3)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$

$$\frac{x^{\frac{1}{x}}}{\arcsin(x^2+x^3)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2+x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2(1+x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y}\right)^y \cdot y^2 = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y^{y-2}} = 0$$

$\frac{1}{x} = y \quad x = \frac{1}{y}$

Quindi

$$\frac{x^{\frac{1}{x}}}{\arcsin(x^2+x^3)} \rightarrow 0 \quad x \rightarrow 0^+$$

$$x^{\frac{1}{x}} = o(\arcsin(x^2+x^3)) \quad x \rightarrow 0^+$$

Quindi

$$\frac{(e^x)^2 - e^{-2/x}}{\arcsin(x^2+x^3) - x^{1/x}} = \frac{(e^x)^2 \left(1 - \left(\frac{1}{e^{2/x}}\right)\right)}{\arcsin(x^2+x^3) \left(1 - \left(\frac{1}{e^{2/x}}\right)\right)}$$

fatto così