

7/11/13

$$f \text{ derivable in } x_0 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \exists \text{ finito} =: f'(x_0)$$

$$f \text{ derivable in } x_0 \Rightarrow f \text{ continua in } x_0$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\text{es. } \left(f(x)\right)^{g(x)} = e^{g(x) \log f(x)}$$

$$\text{es. } x^x = e^{x \log x}$$

$$\left(x^x\right)' = \left(e^{x \log x}\right)' = e^{x \log x} \cdot \left(1 \log x + x \frac{1}{x}\right)$$

$$= x^x (\log x + 1)$$

$$\text{es. } f(x) = (\sin x)^{\sin x} + \sin(\sin x)$$

$$f(x) = e^{\sin x \log(\sin x)} + \sin(\sin x)$$

$$f'(x) = e^{\sin x \log(\sin x)} \cdot \left(\cos x \cdot \log(\sin x) + \sin x \cdot \frac{1}{\sin x} \cos x \right)$$

$$+ \cos(\sin x) \cdot \cos x =$$

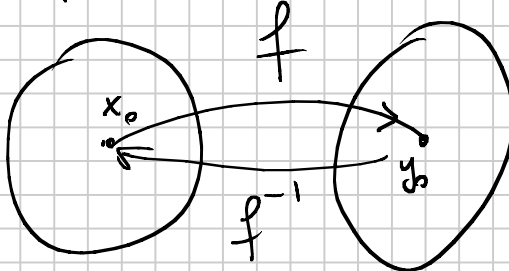
$$= (\sin x)^{\sin x} \left(\cos x \log(\sin x) + \cos x \right) +$$

$$+ \cos(\sin x) \cos x$$

Derivate di funzione inverse

Teo. f continua e invertibile in (a,b) e derivabile in $x_0 \in (a,b)$, con $f'(x_0) \neq 0$.

Allora $f^{-1}(y)$ (funzione inversa di f) è derivabile in $y_0 = f(x_0)$

$$\text{e} \quad \left(f^{-1}(y_0) \right)' = \frac{1}{f'(x_0)}$$


dove $y_0 = f(x_0)$

Dim.

$$\frac{f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0)}{h} =$$

$$= \frac{\cancel{x_0} + k - \cancel{x_0}}{f(x_0+k) - f(x_0)} =$$

$$y_0 = f(x_0)$$

$$x_0 = f^{-1}(y_0)$$

$$f(x_0+k) = y_0+h$$

$$x_0+k = f^{-1}(y_0+h)$$

$$h = f(x_0+k) - f(x_0)$$

$$= \frac{k}{f(x_0+k) - f(x_0)}$$

$\bar{e}$ sempre $\neq 0$
 vicino a x_0
 perché $f'(x_0) \neq 0$
 quindi f non è
 costante vicino a x_0

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0)}{h} =$$

se $h \rightarrow 0$
 anche $k \rightarrow 0$

$$= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(x_0+k) - f(x_0)}{k}} =$$

$$= \frac{1}{f'(x_0)} \neq$$

$$\left(f^{-1}(y_0)\right)' = \frac{1}{f'(x_0)}$$

dove
 $y_0 = f(x_0)$

oss. $f^{-1} \circ f(x) = x$

$$f(x) = y$$

$$\left(f^{-1}(f(x))\right)' \cdot f'(x) = 1$$

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)}$$

esempi: $f(x) = e^x$ $f'(x) = e^x$

• $f^{-1}(y) = \log y = x \Rightarrow y = e^x$

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = (\log y)' = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$

$$\bullet \quad f(x) = \sin x = y$$

$$y \in [-1, 1] \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$f^{-1}(y) = \arcsin y$$

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = (\arcsin y)' = \frac{1}{\cos x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x} \\ = \pm \sqrt{1 - y^2}$$

$$\text{pour } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \cos x \geq 0$$

$$\Downarrow \\ \cos x = \sqrt{1 - y^2}$$

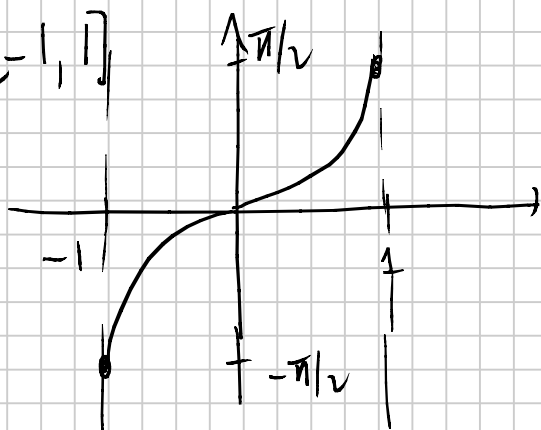
$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

$$g(y) = \arcsin y$$

$$y \in [-1, 1]$$

$$g'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

$$y \in (-1, 1)$$



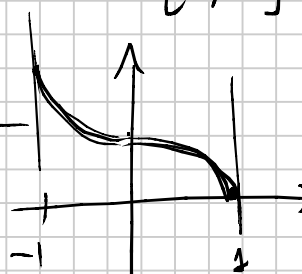
$$\bullet \quad \text{Pour } \cos x$$

$$y = \cos x$$

$$x \in [0, \pi]$$

$$(\arccos y)' = - \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

non dérivable
en $y = \pm 1$



$$\arccos y \quad y \in [-1, 1]$$

• Per cose $(\arctg y)' = \frac{1}{1+y^2}$

$\arctg y$ è derivabile $\forall y \in \mathbb{R}$

Derivate f. inverse iperboliche

$$f(x) = \sinh x = y \quad f'(x) = \cosh x$$

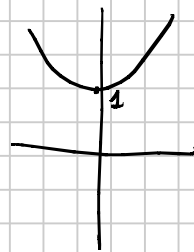
$$f^{-1}(y) = \operatorname{settsinh} y = x \Leftrightarrow \sinh x = y$$

$$(\operatorname{settsinh} y)' = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$$

$$\cosh x = \sqrt{1 + \sinh^2 x} = \sqrt{1 + y^2}$$



$\cosh x > 0$

$$(\operatorname{settsinh} y)' = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

P.C. $(\operatorname{settcosh} y)' = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}$

esercizio

1) $f(x) = \operatorname{arcsin}(\log^2(3x))$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (\log^2(3x))^2}} \cdot 2 \log(3x) \cdot \frac{1}{3x} \cdot 3$$

$$g(x) = \operatorname{arcsin} x$$

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$2) f(x) = \frac{3^{\sinh 2x} \cdot \cosh(x^2-3)}{\operatorname{arcsen}(\log x)} \quad f' = \frac{h}{K}$$

$$f'(x) = \frac{\overbrace{\operatorname{arcsen}(\log x)}^{\vee} \left(3^{\sinh 2x} \cdot \log 3 \cdot \cosh(2x) \cdot 2 \cosh(x^2-3) \right)}{\operatorname{arcsen}^2(\log x)} + \frac{3^{\sinh 2x} \cdot \sinh(x^2-3) \cdot 2x}{\operatorname{arcsen}^2(\log x)} =$$

$$- \frac{3^{\sinh 2x} \cosh(x^2-3) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\log^2 x}} \cdot \frac{1}{x}}{\operatorname{arcsen}^2(\log x)}$$

ESERCITARSI !!

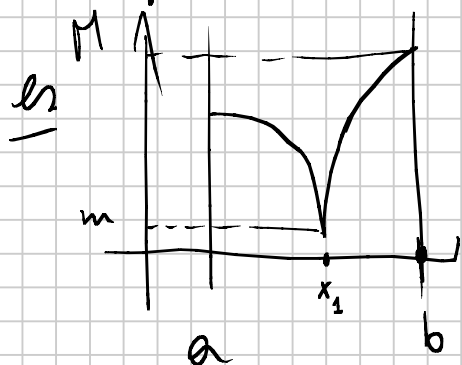
Ricerca di massimi e minimi locali

Def. M è un massimo (globale) per f in $[a, b]$ e x_0 p.to di massimo se $f(x_0) = M \geq f(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

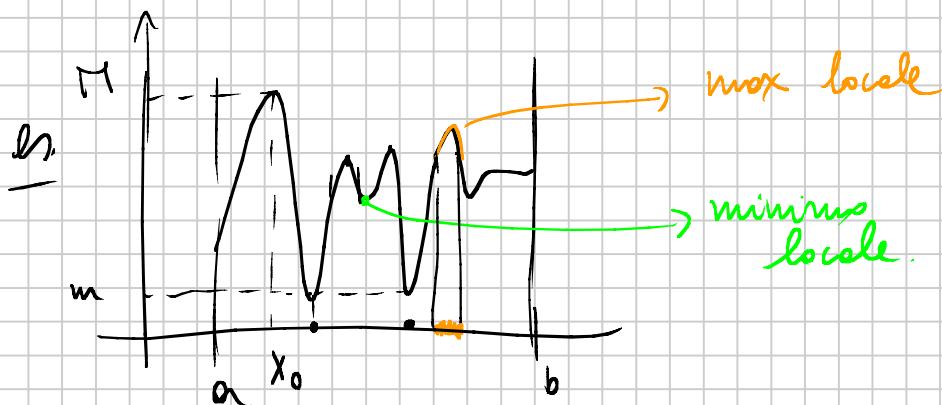
m è un minimo (globale) per f in $[a, b]$ e x_1 p.to di minimo se $f(x_1) = m \leq f(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

Def. M è un massimo locale per f e x_0 p.to di massimo locale se $\exists$ un intorno di x_0 , $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ t.c. $M = f(x_0) \geq f(x)$, $\forall x \in U$

Analogamente per il minimo locale e
 x_1 p.to di minimo locale

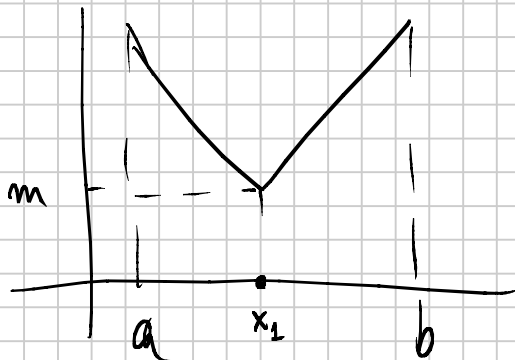


m min. globale
 M max globale

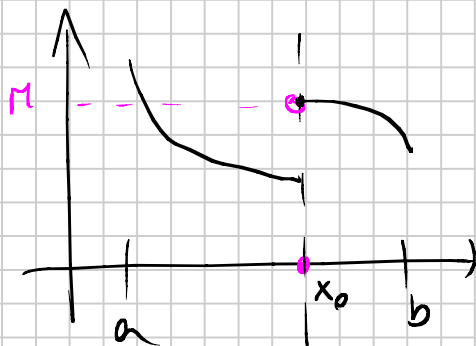


I max e minimi locali e globali si
 chiamano ESTREMI di f (locali
 globali).

oss. Gli estremi possono essere
 anche in punti nei quali
 f non è continua o non è derivabile



x_1 p.to di
 minimo
 globale
 in tal p.to la
 f non è
 derivabile



è massimo locale
 ma in x_0 la
 f non è continua.

ma se la f è derivabile in un p.to di estremo allora $f' = 0$ in tale punto.



(cioè nei p.ti in cui f è derivabile che sono i p.ti di estremo la tangente è orizzontale)

Teorema di Fermat

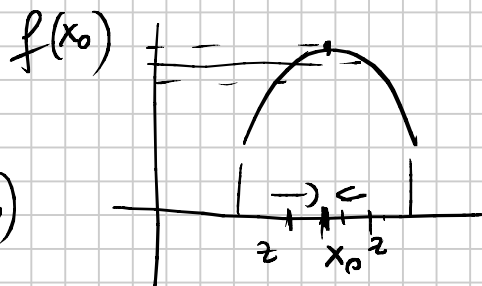
$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile in $x_0 \in (a, b)$.
Se x_0 è un punto di estremo locale
allora $f'(x_0) = 0$

Dim. SUFF. x_0 p.to di massimo locale

e quindi

z abbastanza vicino

a x_0 : $f(z) \leq f(x_0)$



$$\lim_{z \rightarrow x_0} \frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0} = f'(x_0)$$

$$\text{se } z > x_0 \quad \frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0} \leq 0$$



$$\text{se } z < x_0 \quad \frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0} \geq 0$$

$\lim_{z \rightarrow x_0^+} \frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0} \leq 0$

$\lim_{z \rightarrow x_0^-} \frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0} \geq 0$

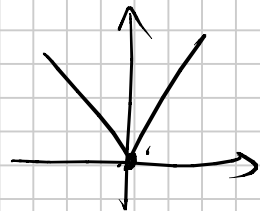
per il teorema della permanenza del segno
 (se $g(z) \geq 0$
 $\lim_{z \rightarrow x_0} g(z) \geq 0$)

$f'_+(x_0) \leq 0$
 $f'_-(x_0) \geq 0$

poiché f è derivabile in x_0
 $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$
 $\Downarrow$
 $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0$
 #

OSS. Se si renuncia così:

Teo. di F. f che ha un p.to di estremo in x_0 allora $f'(x_0) = 0$
no!



OSS. il teorema è una condizione necessaria perché un p.to in cui f è derivabile sia di estremo.

Quindi i p.ti di estremo di f in cui f è derivabile si cercano tra i p.t. t.c. $f' = 0$

$\{x : f'(x) = 0\}$ punti stazionari

p.to estremo + derivabile $\Rightarrow$ stazionario

j. ho stazionaria ~~non~~ (Fermat) j. ho di estremo

$$f(x) = x^3$$

$$x=0 \quad f'(x) = 3x^2$$

$$f'(0) = 0$$

$x=0$ è stazionaria
per x^3

ma non è
estremo

