31 10 13

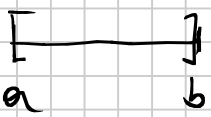
Proprietà globali delle funzioni continue

Riguardano funzioni continue su un intervallo $[a,b] = I$

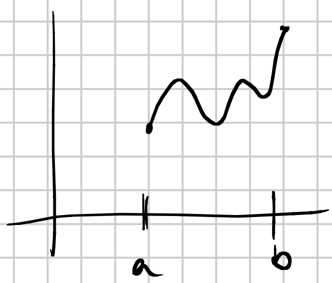
- $f(x)$ è continua in $x = c$ $\quad \lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

oppure
$\forall x_n \to c$
$\lim_n f(x_n) = f(c)$
$= f(\lim x_n)$

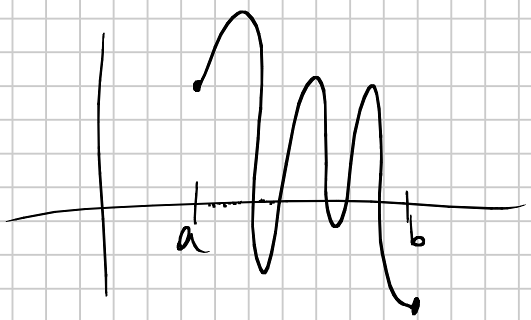
- $f(x)$ è continua in $[a,b]$ significa che f è continua $\forall x \in (a,b)$ e

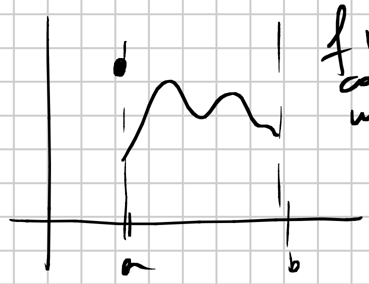


$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$
$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$



f continua in $[a,b]$





f non è continua in $x = a$

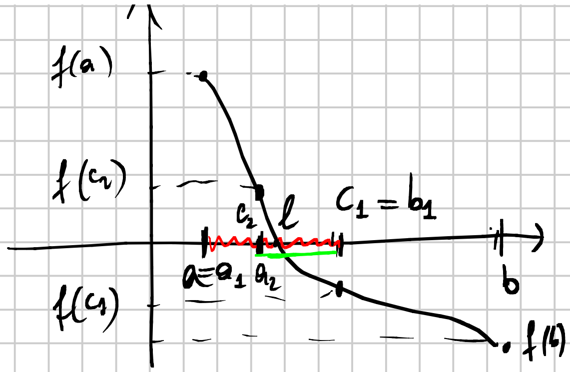
Teorema degli zeri Sia f continua in $[a,b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$. Allora esiste $c \in [a,b]$ t.c. $f(c) = 0$

Dim. Metodo di bisezione, è di tipo costruttivo

$c_1 = \frac{a+b}{2}$ p.to medio

$f(c_1) \neq 0$

perché $f(a) > 0$
scelgo l'intervallo
$[a, c_1] \to$ lo chiamo $[a_1, b_1]$



$c_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ punto medio di $[a_1, b_1]$

scelgo uno dei due intervalli $[a_1, c_2]$ o $[c_2, b_1]$ -
scelgo $[c_2, b_1]$ perché $f(c_2) > 0$ e $f(b) < 0$
lo chiamo $[a_2, b_2]$

$c_3 = \frac{b_2 + a_2}{2}$ $\qquad f(c_3) \begin{cases} = 0 \\ > 0 \\ < 0 \end{cases}$

si trovano intervalli $[a_n, b_n]$

$a \le a_1 \le a_2 \le a_3 \le \dots a_n \le b$ $\{a_n\}$ crescente e limitata

dal teo. delle successioni monotone e limitate $\exists$ finito $\lim_n a_n = \ell$

$b \geq b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots b_n \geq a$

b_n è succ. monotone decrescente e limitata

$\exists$ finito $\lim_n b_n =$

per costruzione $\quad b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$

$b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2^2}$

$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \qquad b_n = a_n + \frac{b-a}{2^n}$

$\ell \quad 0$

$\Rightarrow \lim_n b_n = \ell = \lim_n a_n$

ℓ sarà proprio il mio zero cioè dim. che $f(\ell)=0$

$a_n \to \ell \qquad f(a_n) > 0 \quad \forall n$

$b_n \to \ell \qquad f(b_n) < 0$

Siccome f è continua se $a_n \to \ell \Rightarrow f(a_n) \to f(\ell)$

$\quad$ // $\qquad b_n \to \ell \Rightarrow f(b_n) \to f(\ell)$

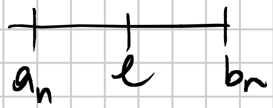
$f(a_n) > 0 \ \forall n \Rightarrow f(\ell) \geq 0$ $\qquad$ teo. della permanenza del segno (nella seconda versione)

$f(b_n) < 0 \ \forall n \Rightarrow f(\ell) \leq 0$ $\qquad$ // $\quad$ //

$\Rightarrow f(\ell) = 0$ //

<u>oss.</u> Il valore approssimato di ℓ è a_n o b_n se ci si arresta a n passi

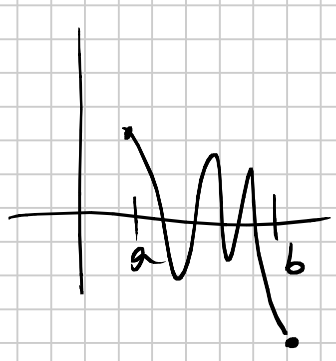
$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$



<u>es.</u> $[a,b] = [0,1]$ $\qquad f(x) = \ldots\ldots$

$$\text{Errore} = \frac{b-a}{2^n} = \frac{1}{2^n} \qquad n = 10 \quad \frac{1}{2^{10}}$$

<u>oss.</u> Se in $[a,b]$ ci sono più zeri il procedimento non ci dice quale si determina.

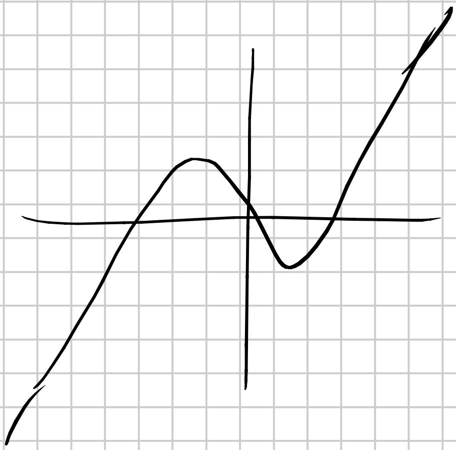


<u>oss.</u> se f è monotona allora lo zero è <u>unico</u>!

Oss. Se f non è continua $\Rightarrow$ non è vero!

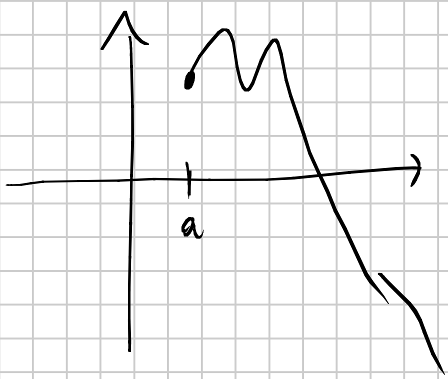
estensione

$$\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \\ f \text{ continua} \end{cases}$$



oppure

$$\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \\ f(a) > 0 \\ f \text{ continua} \end{cases}$$



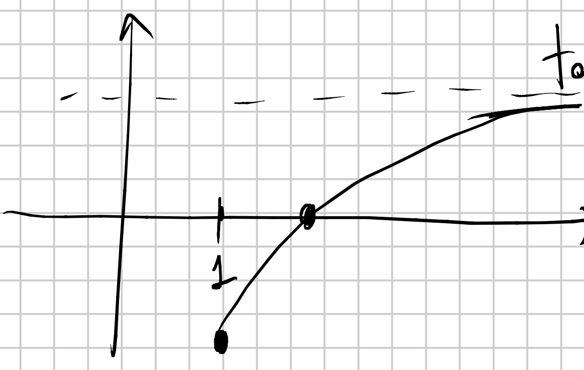
Esercizio

Dire se la seguente equazione ha almeno una soluzione per $x \geq 1$

$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{x}$$

Vedo se $\exists\, \bar{x}$: $f(\bar{x}) = 0$

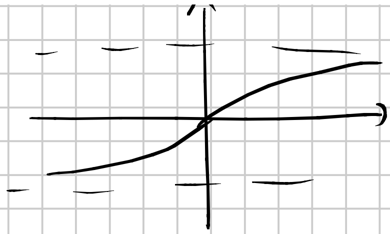


tale $\bar{x}$ sarà una soluzione della mia equazione

$$f(1) = \operatorname{arctg} 1 - 1 = \frac{\pi}{4} - 1 < 0$$

$f(x) = \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{x}$ è continua

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$



$\Rightarrow$ per il teo. degli zeri

$\exists$ almeno un p.to $\bar{x}$:

$$f(\bar{x}) = 0$$

$$f(x) = \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{\text{crescente}} + \underbrace{\left(-\frac{1}{x}\right)}_{\text{crescente}} \rightarrow \text{crescente}$$

$$\Rightarrow \exists!\, \bar{x} : f(\bar{x}) = 0$$

$$\Rightarrow \exists!\, \bar{x} \quad \operatorname{arctg} \bar{x} = \frac{1}{\bar{x}}$$

Teorema di Weierstrass

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continua. Allora f assume massimo e minimo in $[a,b]$ cioè esistono $x_m, x_M \in [a,b]$ t.c.

$$f(x_m) \le f(x) \le f(x_M), \quad \forall x \in [a,b]$$

$f(x_m) = m$ minimo di f — x_m = p.to di minimo

$f(x_M) = M$ massimo di f — x_M = p.to di massimo

$$m \le f(x) \le M \qquad \forall x \in [a,b]$$

Dim. no!

es.

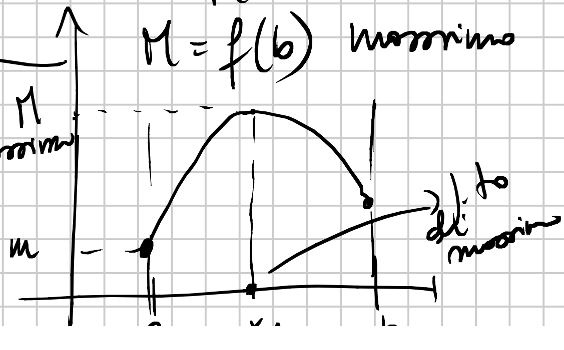
p.to di minimo a

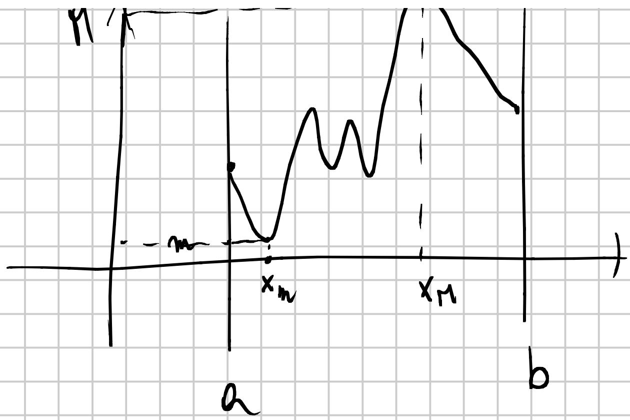
p.to di max b

$m = f(a)$ minimo

$M = f(b)$ massimo

$x_m = a \qquad f(x_m) = f(a)$



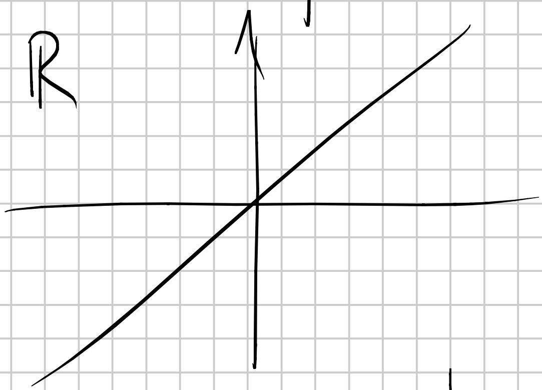


oss. tutte le ipotesi sono necessarie

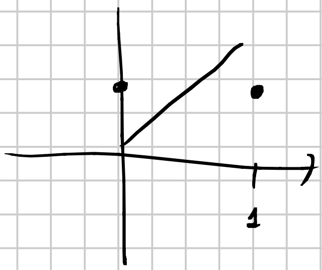
f continua in $[a,b]$

- $f(x) = x$ in $(0,1)$

- $f(x) = x$ in $\mathbb{R}$



- $f(x) = \begin{cases} x & x \in (0,1) \\ \frac{1}{2} & x=0,\ x=1 \end{cases}$



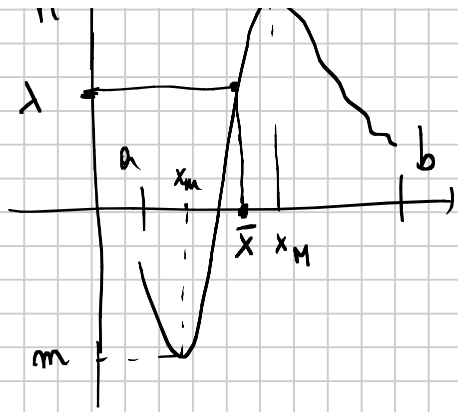
$f(x)$ è def. in $[0,1]$, è continua in $(0,1)$

$\nexists$ massimo e minimo in $[0,1]$.

Teorema dei valori intermedi

f continua in $[a,b]$, allora preso un qualsiasi λ $m \leq \lambda \leq M$ (m e M sono il minimo e il massimo di f in $[a,b]$) $\exists\ \bar{x} \in [a,b]$ t.c. $f(\bar{x}) = \lambda$.

(f assume tutti i valori tra m e M)



Dim. $m < \lambda < M$

Ts. $\exists\ \bar{x} : f(\bar{x}) = \lambda$

$g(x) = f(x) - \lambda$ è continua in $[a,b]$

$g(x_m) = f(x_m) - \lambda = m - \lambda < 0$

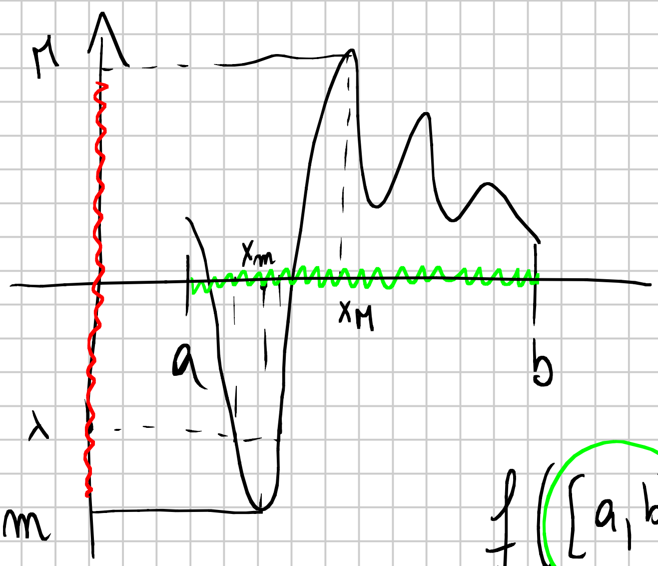
$g(x_M) = f(x_M) - \lambda = M - \lambda > 0$

Vale per la funzione $g(x)$ il teorema degli zeri

$\exists\ \bar{x} \in [a,b]$ t.c. $g(\bar{x}) = 0$

$g(x) = f(x) - \lambda \qquad f(\bar{x}) - \lambda = 0 \quad \Rightarrow f(\bar{x}) = \lambda$

#

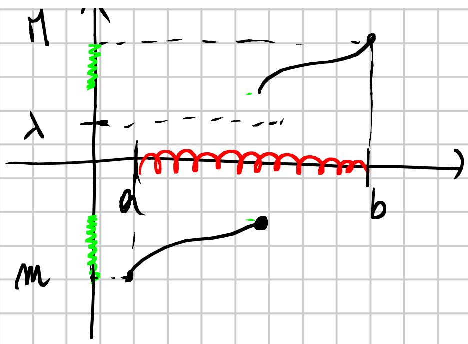


f continua in $[a,b]$

- Weierstrass mi dice che $\exists\ m$ e M min. e max di f
- Teo. dei valori intermedi

$$f([a,b]) = [m, M]$$

$f([a,b]) = [m,M]$ solo se f è continua



$$f([a,b]) \neq [m,M]$$

$$= \quad \cup$$