5 Novembre 2013

Proprietà globali delle funzioni continue

1) Teorema degli zeri: f continua in $[a,b]$
$f(a) \cdot f(b) < 0$
$\Rightarrow \exists\, c \in [a,b]:$
$f(c) = 0$

2) Teorema di Weierstrass: f continua in $[a,b]$
allora $\exists\, x_m$ e x_M
$\in [a,b]$ p.ti di minimo
e di massimo di f, cioè
t.c. $\underbrace{f(x_m)}_{m} \leq f(x) \leq \underbrace{f(x_M)}_{M}$

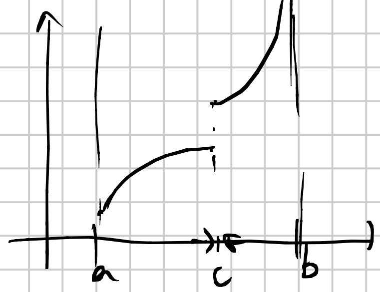
3) Teo. dei valori intermedi: f continua in $[a,b]$
allora assume tutti i
valori tra m e M

2) + 3) $\quad f([a,b]) = [m, M]$

Funzioni monotone su un intervallo

(estensione del teorema sulle successioni monotone)

Teorema (di monotonia) $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ monotòna
allora $\forall c \in (a,b)$ esistono finiti
$\lim\limits_{x \to c^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$ e in a e b
$\exists$ limiti (sx e dx) eventualmente infiniti.



f monotone

→ in questo caso

$\lim_{x\to a^+} f(x)$ finito

$\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$

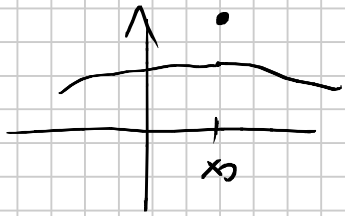
oss. Se f è monotone in un intervallo le discontinuità eventuali di f sono solo di salto, eccetto in a e b dove ci possono essere asintoti verticali.

Dim. no.

Riassunto classificazione discontinuità — x_0 p.to in cui f è definita.

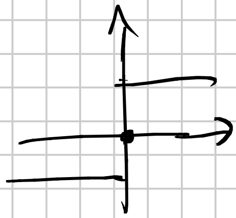
1) se $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

x_0 p.to di discontinuità eliminabile

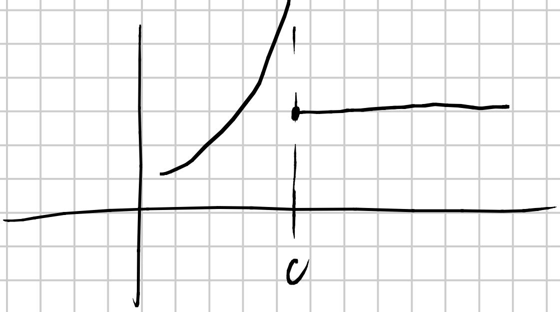


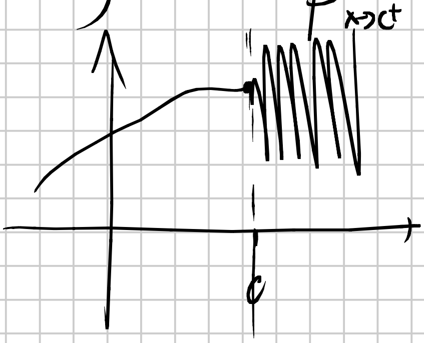
2) $\exists \lim_{x\to c^+} f(x) \neq \lim_{x\to c^-} f(x)$

x_0 è un p.to di discontinuità di salto (1ª specie)



3) tutto il resto (2ª specie) $\quad \nexists \lim_{x\to c^+}$





es. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

$f(x)$ dove è continua? è definita su $\mathbb{R}$

sen $\frac{1}{x}$ è continua dove è definita $(x \neq 0)$

f è continua in $x=0$?

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^\pm} \operatorname{sen}\frac{1}{x} \nexists$$

f non è continua in $x=0$ (2ª specie).

attenzione: è sbagliato dire che sen $\frac{1}{x}$ non è continua in $x=0$

perché non è neanche def. in $x=0$

Teorema $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f continua in I.

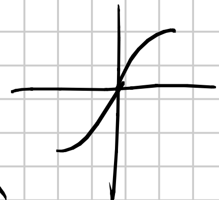
f è invertibile in I $\Leftrightarrow$ f è strettamente monotona

e la sua inversa è continua e strettamente monotona.

Dim. no

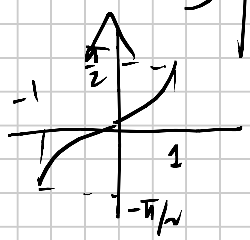
oss. Il teo. ci dice che l'inversa di una funzione continua è continua.

es. $f(x) = \operatorname{sen} x$ $\quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



$g(x) = \arcsin x$ $\quad x \in [-1, 1]$

è continua in $[-1,1]$



tutte le funzioni inverse trovate sono continue.

Esercizi sui limiti

arcsen x è continua

$$\lim_{x\to 0} \arcsin x = 0$$

arcsen x = y

x = sen y

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = 1$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\arccos x}{x-1} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\cos y - 1}$$

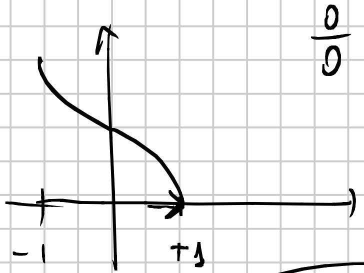
$\frac{0}{0}$

arccos x = y

x = cos y

arcos 1 = 0

$x \to 1^-$ $\quad y \to 0^+$



$$\lim_{y\to 0^+} \frac{y}{(\cos y - 1)} \cdot \frac{y}{y} \cdot \frac{1}{y} = -\infty$$

-2

$\frac{1}{y} \to +\infty$

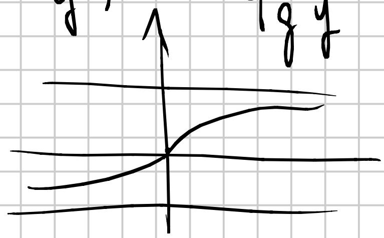
$$\frac{y^2}{\cos y - 1} \to -2$$

$$\frac{1-\cos y}{y^2} \xrightarrow[y\to 0]{} \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\operatorname{tg} y} = 1$$

arctg x = y

x = tg y



arctg x $\sim$ x se $x \to 0$

es. $$\lim_{x\to +\infty} x \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{x + \sin x}\right)$$

$\infty \cdot 0$

$$\frac{2}{x+\operatorname{sen} x} \to 0 \qquad x \to +\infty$$

$$\frac{\operatorname{arctg} y}{y} \to 1 \qquad y \to 0$$

$$\operatorname{arctg}(\underbrace{\ldots}_{\to 0}) \to 0$$

$y \to 0 \qquad x \to +\infty$

$$\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{x+\operatorname{sen} x}\right)}{\frac{2}{x+\operatorname{sen} x}} \quad \frac{2}{x+\operatorname{sen} x}$$

Quindi

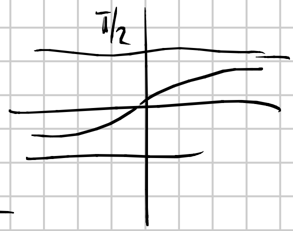
se $x \to +\infty$ $\quad \frac{2}{x+\operatorname{sen} x} \to 0$

$$\underset{\to 1}{x \, \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{x+\operatorname{sen} x}\right)}{\frac{2}{x+\operatorname{sen} x}}} \quad \frac{2}{x+\operatorname{sen} x}$$

$\frac{\operatorname{arctg} y}{y} \to 1 \quad y \to 0$

Ci avanza $\quad \frac{2x}{x+\operatorname{sen} x} = \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\left(1+\underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\to 0}\right)} \to 2 \quad x \to \infty$

$$\lim_{x \to +\infty} x \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{x+\operatorname{sen} x}\right) = 1 \cdot 2 = 2$$



es. $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) =$

$\infty \cdot 0$

$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = y \qquad \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - y$

$x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$

$$= \lim_{y \to 0} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \cdot y =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)} \cdot y = \lim_{y\to 0} \underbrace{\frac{\overset{\to 1}{\cos y}}{\operatorname{sen} y} \cdot y}_{\to 1}$$

$$= 1$$

Osservazione su infinitesimi e infiniti

$$x^2 + \sqrt{x} + x^\pi - x^e = \qquad x \to +\infty$$

$$= x^\pi \left(\underbrace{\frac{1}{x^{\pi-2}}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{x^{\pi-\frac{1}{2}}}}_{\to 0} + 1 \underbrace{- \frac{1}{x^{\pi-e}}}_{\to 0} \right) \qquad x \to +\infty$$

$$x^2 + \sqrt{x} + x^\pi - x^e = x^\pi + o(x^\pi) \qquad x \to +\infty$$

$f = o(g)$ se $x \to x_0$ $\qquad \frac{f}{g} \to 0$ se $x \to x_0$

infatti? $\quad x^2 + \sqrt{x} - x^e = o(x^\pi)$? $\quad x \to +\infty$

devo verificare che

$$\frac{x^2 + \sqrt{x} - x^e}{x^\pi} \to 0 \qquad \text{se } x \to +\infty$$

$$\frac{1}{x^{\pi-2}} + \frac{1}{x^{\pi-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{x^{\pi-e}} \to 0 \qquad \text{sì!}$$

$$x^2 + \sqrt{x} + x^\pi - x^e = x^\pi + o(x^\pi)$$

---

e se $x \to 0$?

$$x^2 + \sqrt{x} + x^\pi - x^e \qquad x \to 0^+$$

$$\sqrt{x}\left(\underset{\substack{\downarrow \\ 0 \\ x\to 0^+}}{x^{2-\frac{1}{2}}} + 1 + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{x^{\pi-\frac{1}{2}}} - \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{x^{e-\frac{1}{2}}} \right) \qquad x \to 0^+$$

$\sqrt{x}$ è il "pezzo che comanda" per $x \to 0^+$

$$x^2 + \sqrt{x} + x^\pi - x^e = \sqrt{x} + o(\sqrt{x}) \qquad x \to 0^+$$

$$? \quad x^2 + x^\pi - x^e \overset{?}{=} o(\sqrt{x}) \qquad x \to 0^+ \quad ?$$

significa

$$\frac{x^2 + x^\pi - x^e}{\sqrt{x}} \overset{?}{\to} 0 \qquad x \to 0^+$$

$$x^{2-\frac{1}{2}} + x^{\pi-\frac{1}{2}} - x^{e-\frac{1}{2}} \underset{x\to 0^+}{\to} 0 \quad \text{sì!}$$

$$x \to 0^+$$

$$x^2 + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

---

es. $$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)^2}{\arcsin(x^2 + x^3)} =$$

$$\frac{0}{0}$$

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \underset{x\to 0}{\to} 1 \qquad\qquad \frac{\arcsin x}{x} \underset{x\to 0}{\to} 1$$

$$\frac{(\operatorname{sen} x)^2}{\operatorname{arcsen}(x^2+x^3)} = \underbrace{\frac{(\operatorname{sen} x)^2}{x^2}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{}}_{} \underbrace{\frac{x^2+x^3}{\operatorname{arcsen}(x^2+x^3)}}_{\to 1} \underbrace{\frac{}{(x^2+x^3)}}_{\to 1}$$

$x \to 0$

$$\frac{x^2}{x^2+x^3} = \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(1+x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

$$\frac{x^2+x^3-x^3}{\operatorname{arcsen}(x^2+x^3)} = \underbrace{\frac{x^2+x^3}{\operatorname{arcsen}(x^2+x^3)}}_{\to 1} - \frac{x^3}{\operatorname{arcsen}(x^2+x^3)} \to 1 \ ?$$

— · —

es.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5^x-7^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-7^x\left(\left(\frac{5}{7}\right)^x-1\right)}{x} = -\infty$$

$+\infty$ (gerarchia infiniti) $\to -1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{5^x-7^x}{x} = \lim_{x\to 0} 7^x \frac{\left(\left(\frac{5}{7}\right)^x-1\right)}{x}$$

$\frac{0}{0}$

$$\frac{a^x-1}{x}$$

$\to \log\left(\frac{5}{7}\right)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \log a$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{5^x-7^x}{x} = \log\left(\frac{5}{7}\right).$$

— · —

Calcolo differenziale

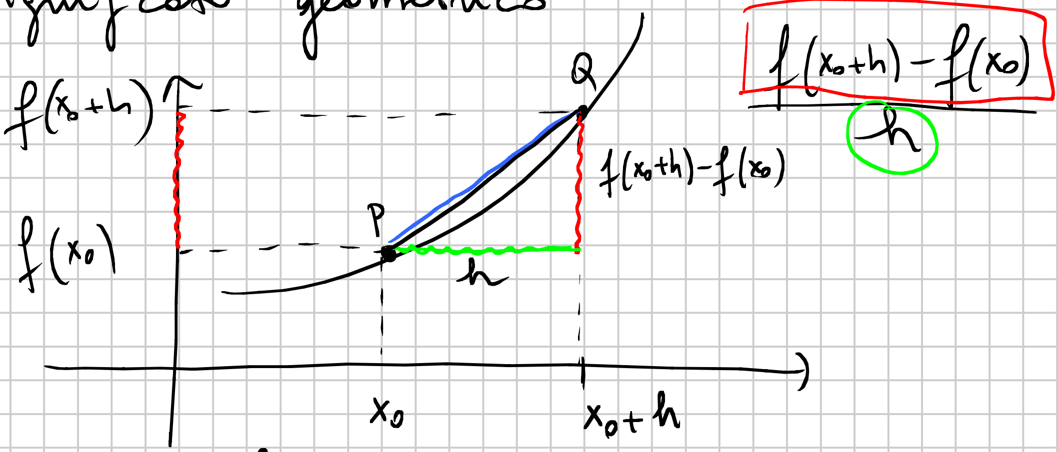
Def. $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ si dice derivabile in $x_0\in(a,b)$ se esiste finito

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} =: f'(x_0)$$

derivata prima di f in x_0

$$f'(x_0)\ ,\ \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}\ ,\ \dot{f}(x_0)\ ,\ Df(x_0)$$

Significato geometrico



$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

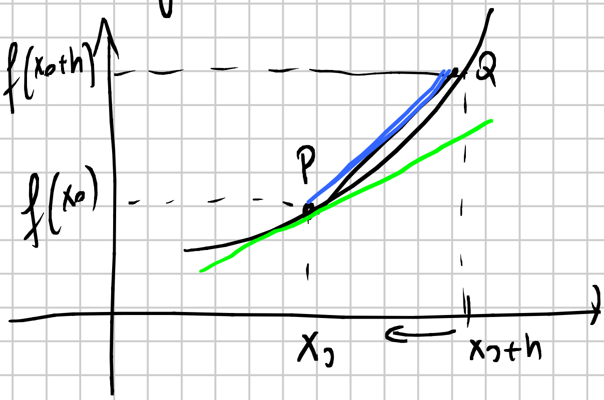
mi rappresenta la pendenza della retta BLU che è la secante passante da P e Q

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

è il rapporto incrementale di f in x_0 e rappresenta il tasso di variazione media di f tra x_0 e x_0+h

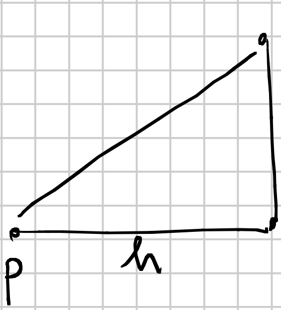
se $h\to 0$ si può dim. che la retta BLU diventa la retta tangente al grafico di

f nel punto $P = (x_0, f(x_0))$



se $h \to 0$
$Q \to P$
e la secante
diventa la
tangente
al grafico in P.

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$ tasso di variazione media

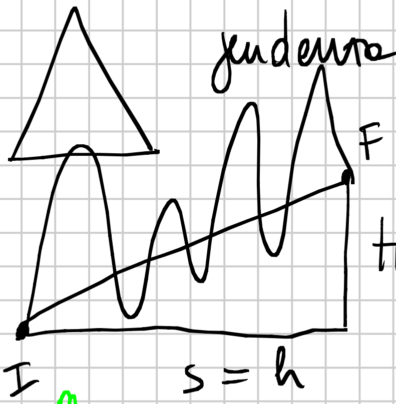


$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$ tasso di variazione istantanea

---

es.

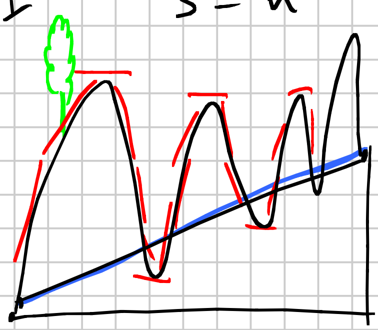
pendenza media 10%



$H = f(x_0+h) - f(x_0)$

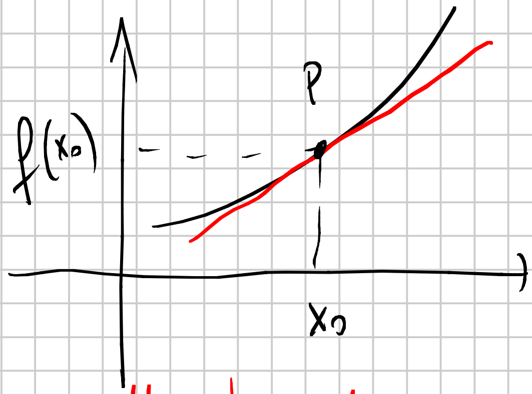
$s = h$

$10\% = \frac{H}{s} =$ rapporto incrementale



Si può dimostrare che

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) = m = \text{coefficiente angolare}$$



della retta tangente al grafico di f nel punto $P = (x_0, f(x_0))$

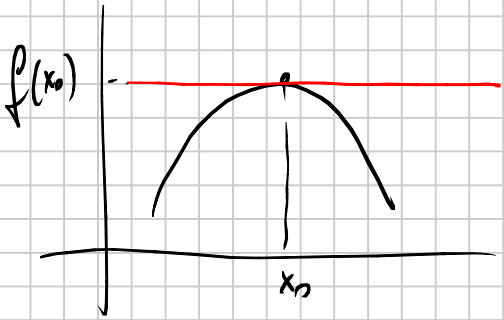
eq. retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$

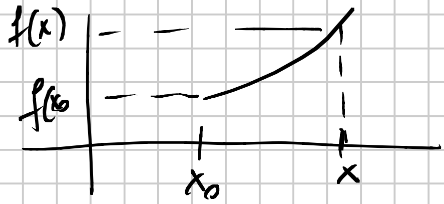
$$y = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{m}(x - x_0)$$

se $f'(x_0) = 0$

$$y = f(x_0)$$

$\Rightarrow$ la retta tangente è orizzontale





$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =: f'(x_0)$$

si può anche scrivere così: $\quad x - x_0 = h$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0)$$

es. Derivate di funzioni elementari

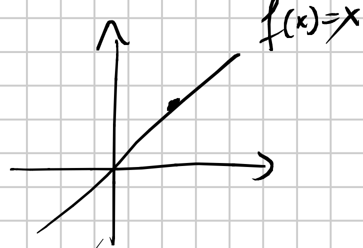
- $f(x) = C \qquad f'(x_0) = ?$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{C - C}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0 \qquad \forall x_0$$

$$f'(x_0) = 0 \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

la retta tgente è la retta stessa e la pendenza è zero.



- $f(x) = x$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{(\cancel{x_0} + h) - \cancel{x_0}}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$

- $f(x) = x^\alpha \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad , \quad x > 0$

$$f'(x_0) = \lim_{h} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h} \frac{(x_0+h)^\alpha - x_0^\alpha}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left(x_0\left(1+\frac{h}{x_0}\right)\right)^\alpha - x_0^\alpha}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x_0^\alpha \left(1+\frac{h}{x_0}\right)^\alpha - x_0^\alpha}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} x_0^\alpha \frac{\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^\alpha - 1}{\frac{h}{x_0} \cdot x_0} \overset{h \to 0}{=} \alpha x_0^{\alpha - 1}$$

$\to \alpha$ se $h \to 0$

$\frac{h}{x_0} \to 0$

$\forall x_0$

$$\frac{(1+y)^\alpha - 1}{y} \xrightarrow[y \to 0]{} \alpha$$

$$f(x) = x^\alpha \qquad f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$$

$\underline{\underline{\forall \alpha \in \mathbb{R}}}$

es.

$f(x) = x^3 \qquad f'(x) = 3x^2$

$f(x) = x^{\sqrt{2}} \qquad f'(x) = \sqrt{2}\, x^{\sqrt{2}-1}$

$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \qquad f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} \qquad f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2} =$

$= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$