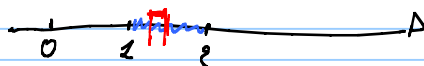


Ritorniamo a x t.c. $x^2 = 2$

$$1 < x < 2$$



$$(1,1)^2 = 1,21$$

$$(1,2)^2 = 1,44$$

$$(1,3)^2 = 1,69$$

$$(1,4)^2 = 1,96$$

$$(1,5)^2 = 2,25$$

quindi

$$1,4 < x < 1,5$$

$$(1,41)^2 = 1,9881$$

$$(1,42)^2 = 2,0164$$

quindi

$$1,41 < x < 1,42$$

$$(1,411)^2 = 1,990321$$

$$(1,412)^2 = 1,993744$$

$$(1,413)^2 = 1,996569$$

$$(1,414)^2 = 1,999396$$

$$(1,415)^2 = 2,002225$$

quindi

$$1,414 < x < 1,415$$

⋮

$$1,414213562 < x < 1,414213563$$

⋮



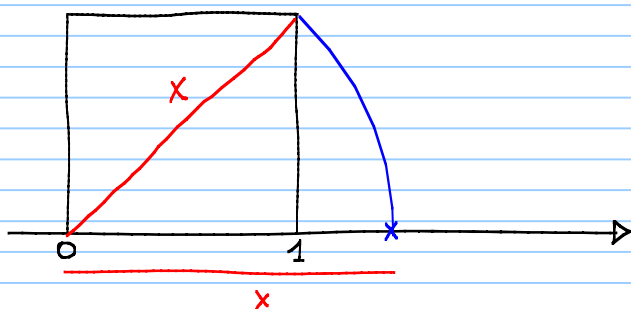
Definizione

$\mathbb{R} = \{ \text{allineamenti decimali propri} \}$

$$\sqrt{2} = 1,41\ldots \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad \text{irrazionale}$$

π, e

Insomma $\mathbb{R}$ "non ha buchi"



Definizione $A \subseteq \mathbb{R}$, diciamo che $k \in \mathbb{R}$

- k è un maggiorante per A se
 $k \geq a \quad \forall a \in A$

- diciamo che $h \in \mathbb{R}$ è un minorente per A se
 $h \leq a \quad \forall a \in A$

in $\mathbb{Q}$

insieme
con
rel.
d'ordine
totale

Esempio $A = \{q \in \mathbb{Q} : q > 0, q^2 < 2\}$

-1 è un minorente per A

2 è un maggiorante per A

-3 è un minorente

10 è un maggiorante

in $\mathbb{Q}$

- ### Definizione
- Se A è superiormente limitato diciamo che A ha un **massimo** se esiste un maggiorante per A che appartiene ad A .
 - Se A è inferiormente limitato diciamo che A ha un **minimo** se esiste un minorante per A che appartiene ad A .

A è superiormente limitato, infatti:

A ha un massimo, infatti 8 è un maggiorante e $8 \in A$.

-2 è un vincente.

$$-1 + \varepsilon > -1$$

e $-1 + \varepsilon$ fosse minore

$$-1 < -1 + \frac{\epsilon}{2} < -1 + \epsilon$$

↓

$$-1 + \frac{\varepsilon}{2} \in A$$

$-1 + \varepsilon$ non è un minorante

Quindi A ha k_2 minimo

Definizione $A \subseteq \mathbb{R}$

- Se A è superiormente limitato
e k è il minimo dei maggioranti
diremo che k è l'**estremo superiore** di A
 $k = \sup A$
- Se A è inferiormente limitato
e h è il massimo dei minoranti
diremo che h è l'**estremo inferiore** di A
 $h = \inf A$

Esempio $A = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x \leq 8\}$

$$\{\text{maggioranti di } A\} = \{x \geq 8\}$$

$$\{\text{minoranti di } A\} = \{x \leq -1\}$$

$$\sup A = 8$$

$$\inf A = -1$$

$$\max A = 8$$

$$\min A = \cancel{-1}$$

Completezza di $\mathbb{R}$

$A \subseteq \mathbb{R}$. Se A è superiormente limitato
 $\exists$ l'estremo superiore di A .

Se A è inferiormente limitato
 $\exists$ l'estremo inferiore di A .

Esempio $A = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ e } x^2 < 2\}$

2 è maggiorante

2,5 è maggiorante

1,42 è maggiorante

$\vdots$

$\nexists$ il minimo dei maggioranti in $\mathbb{Q}$

$\nexists$ $\sup A \in \mathbb{Q}$

Osservazione Differenza tra $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$$

per la completezza di $\mathbb{R}$

$$\exists \sup B \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad \sup B = \sqrt{2}$$

$$\{\mathbb{R}, +, \cdot, \leq\}$$

campo ordinato archimedeo
completo

In $\mathbb{R}$ si possono definire $+$, $\cdot$, $\leq$

$$x = p, q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, \dots \quad p, r \in \mathbb{Z}$$

$$y = r, r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, \dots \quad q_i, r_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}, i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$x = \sup \{ p, p, q_1, p, q_1, q_2, \dots, p, q_1, \dots, q_n, \dots \}$$

$$y = \sup \{ r, r, r_1, r, r_1, r_2, \dots, r, r_1, \dots, r_n, \dots \}$$

$$x + y \stackrel{\Delta}{=} \sup \{ p + r, p + r, r_1, \dots, p, q_1 + r, \dots \}$$

Si dimostra che valgono le proprietà 1-18 (18')

$\mathbb{R}, +, \cdot, \leq$

è un campo ordinato Archimedeo
COMPLETO (topologicamente)

2) densità

$$\bullet \forall x, y \in \mathbb{R}, x < y, \quad \exists z \in \mathbb{R} \\ \text{t.c.} \quad x < z < y$$

$$\bullet \forall x, y \in \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}, x < y, \quad \Rightarrow \exists z \in \mathbb{Q} : \\ x < z < y$$

$$\bullet \forall x, y \in \mathbb{Q}, x < y, \quad \Rightarrow \exists z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \\ x < z < y$$

3) proprietà di Archimedeo

Osservazioni

• $18) \Rightarrow 18')$ $\forall x > 0 \quad \exists m$
t.c. $\frac{1}{m} < x$.

dimostrazione

$$1 \quad x \quad 18) \Rightarrow \exists m : mx > 1$$

$$x > \frac{1}{m} \quad \blacksquare$$

• Applicazione

$$x \in \mathbb{R}, x \geq 0$$

$$\text{Se } \forall \varepsilon > 0 \quad x < \varepsilon \Rightarrow x = 0$$

dimostrazione:

per assurdo $x > 0$, $18') \exists m \in \mathbb{N} :$

$$0 < \frac{1}{m} < x \quad \varepsilon = \frac{1}{m} \text{ assurdo (nega l'ipotesi)} \quad \blacksquare$$

Esempio $0,\overline{3} = 1$

$$0,\overline{3} \leq 1$$

$$0 \leq 1 - 0,\overline{3}$$

Sia $\varepsilon > 0$ $1 - 0,\overline{3} < \varepsilon$

$$0,3 \leq 0,\overline{3} \leq 1$$

$$1 - 0,\overline{3} \leq 0,1$$

$$0,33 \leq 0,\overline{3} \leq 1$$

$$1 - 0,\overline{3} \leq 0,01$$

$$0,\underbrace{33 \dots 3}_n \leq 0,\overline{3} \leq 1$$

$$1 - 0,\overline{3} \leq 10^{-n}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : \quad 10^{-n} < \varepsilon$$

$$\underline{1 - 0,\overline{3}} < 10^{-n} < \underline{\varepsilon}$$

$\Rightarrow$ applico le conseguenze
della proprietà di Archimede.

Intervalli

limitati

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

aperto

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

chiuso

illimitati:

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$

$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

limitati: $2dx$

illimitati: $2sx$

limitati: $2sx$

illimitati: $2dx$

Modulo o valore assoluto

$$x \in \mathbb{R} \quad |x| \equiv \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Proprietà (Esercizi!)

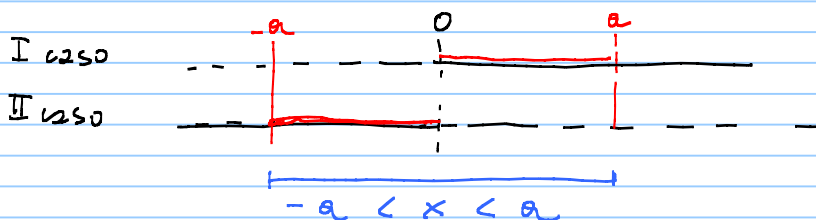
$$\bullet |x| < a \iff -a < x < a$$

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$$

$$|x| < a$$

$$1) \text{ caso } x \geq 0 \quad x < a$$

$$2) \text{ caso } x < 0 \quad |x| = -x < a \\ x > -a$$



• disuguaglianza triangolare

$$|x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

dimostrazione (Esercizio!)

1) $x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow x+y \geq 0$

$$|x+y| = x+y = |x| + y = |x| + |y|$$

2) $x < 0, y \geq 0, x+y \geq 0$

$$|x+y| = x+y =$$

$$x \leq 0$$

$$|x| = -x$$

$$x = -|x|$$

$$= -|x| + |y| \leq |y| \leq |x| + |y|$$

3) $x < 0, y \geq 0, x+y < 0$

$$|x+y| = -(x+y) = \underbrace{(-x)}_{|x|} + \underbrace{(-y)}_{-|y|} =$$

$$= |x| - |y| \leq |x| \leq |x| + |y|$$

4) $x < 0, y < 0 \Rightarrow x+y < 0$

$$|x+y| = -(x+y) = (-x) + (-y) = |x| + |y|$$

- $||x| - |y|| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

dimostrazione (Esercizio!)

$$|x| = |\underbrace{x - y}_{\text{red}} + \underbrace{y}_{\text{red}}| \leq |x - y| + |y|$$

$$|x| - |y| \leq |x - y|$$

$$|y| = |\underbrace{y - x}_{\text{red}} + \underbrace{x}_{\text{red}}| \leq |y - x| + |x|$$

$$|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$$

$$-|x - y| \leq |x| - |y|$$

$$\underbrace{-|x - y|}_{-a} \leq |x| - |y| \leq \underbrace{|x - y|}_a$$

per la proprietà 4

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

■

Radici m-esime

$$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$$

Teorema | Dati $y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$ e $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$
 $\exists! x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ t.c. $x^m = y$.
 x si dice radice m-esima di y , $x = \sqrt[m]{y} = y^{\frac{1}{m}}$

Si può dimostrare che
 $x = \sup \{ \lambda \in \mathbb{Q} : \lambda^m \leq y \}$
 $= \inf \{ \lambda \in \mathbb{Q} : \lambda^m \geq y \}$

Osservazione m pari / dispari

Potenze x^a

1) $a = m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$

$$x^m = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{m \text{ volte}} \quad \text{se } m=0 \quad \underline{x^0 = 1}$$

2) $a \in \mathbb{Q}$ $a > 0$, $a = \frac{p}{q}$ e $x \geq 0$
 $x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}}$

3) $a \in \mathbb{Q}$ $a < 0$, $a = -\frac{p}{q}$ e $x > 0$

$$x^a = x^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{x^{\frac{p}{q}}} = \frac{1}{(x^p)^{\frac{1}{q}}}$$

4) $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ $x > 1$

$$\alpha = p, q_1, q_2, \dots, q_m, \dots$$

$$x^\alpha = \sup \{ x^{p, q_1, q_2, \dots, q_m} : m \in \mathbb{N} \}$$

5) $\alpha \in \mathbb{R}, 0 < x < 1, x \in \mathbb{R}$

$$x^\alpha = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha}$$

6) $\alpha \in \mathbb{R}, x = 1$

$$1^\alpha = 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Proprietà delle potenze di base reale
ad esponente reale

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

1) $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

2) $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$

3) $((x^\alpha)^\beta) = x^{\alpha\beta}$

4) $x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$

5) $x^\alpha > 0, x^0 = 1, 1^\alpha = 1$

6) $x^\alpha > 1$ se $x > 1$ e $\alpha > 0$
oppure se $0 < x < 1$ e $\alpha < 0$

$x^\alpha < 1$ se $x > 1$ e $\alpha < 0$
oppure se $0 < x < 1$ e $\alpha > 0$

7) $\alpha \leq \beta$ e $x > 1 \Rightarrow x^\alpha \leq x^\beta$ crescente
 $\alpha \leq \beta$ e $0 < x < 1 \Rightarrow x^\alpha \geq x^\beta$ decrescente
monotonia rispetto all'esponente

8) se $0 < x \leq y$ e $\alpha > 0 \Rightarrow x^\alpha \leq y^\alpha$ crescente
se $0 < x \leq y$ e $\alpha < 0 \Rightarrow x^\alpha \geq y^\alpha$ decrescente
monotoniz rispetto alla base

9) $\forall x \neq 1 \quad x^\alpha = x^\beta \Rightarrow \alpha = \beta$
iniettività

Logaritmi

Teorema

Sia $x \in \mathbb{R}^+$ e $a > 0, a \neq 1$
Allora $\exists!$ $y \in \mathbb{R}$ tale che $a^y = x$
 y si dice il logaritmo in base a di x
e si scrive $y = \log_a x$

$$\mathbb{R}^+ = \{x > 0\}$$

Proprietà dei Logaritmi

$$\forall a, b, x, y \in \mathbb{R}^+ \quad a \neq 1, b \neq 1$$

$$1) a^{\log_a x} = x$$

$$2) \log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$3) \log_a \left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$$

$$4) \log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$5) \log_a x^2 = 2 \log_a x$$

$$6) \log_a x = \frac{1}{\log_x a}$$

$$7) \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$8) 0 < x \leq y \text{ e } a > 1 \Rightarrow \log_a x \leq \log_a y$$

crescente

$$0 < x \leq y \text{ e } 0 < a < 1 \Rightarrow \log_a x \geq \log_a y$$

decrecente

monotoniz

$$9) \forall a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1 \Rightarrow \log_a 1 = 0, \log_a a = 1$$

$$\log_a \left(\frac{1}{a}\right) = -1$$

$$10) \forall x \neq 0 \quad \log_a x^2 = 2 \log_a |x| \quad x^2 = |x|^2$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: xy > 0 \Rightarrow \log_a xy = \log_a |x| + \log_a |y|$$

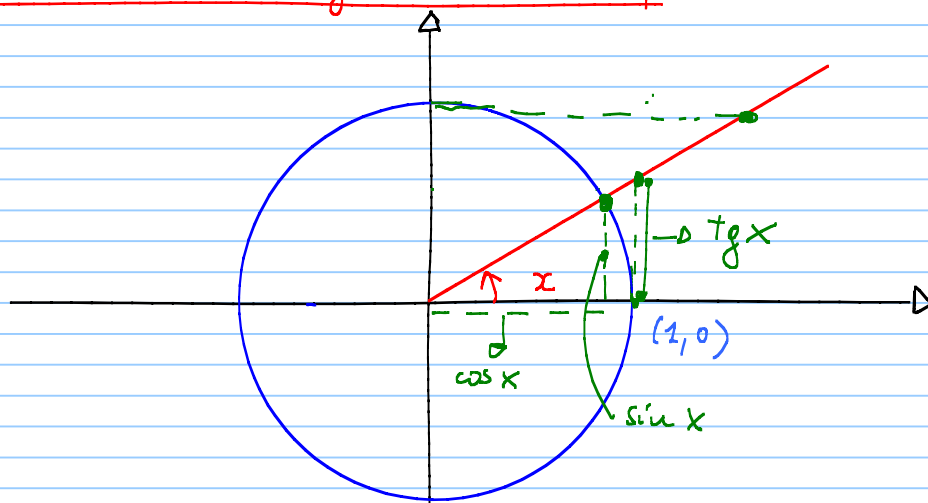
$$\text{se } x, y > 0 \text{ vale la 2)} \quad \log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\text{se } x < 0, y < 0 \quad (xy) = (-x)(-y) = |x||y|$$

$$|x| > 0 \quad |y| > 0 \quad \text{applico 2)}$$

$$\log_a (xy) = \log_a |x||y| \stackrel{!}{=} \log_a |x| + \log_a |y|$$

Grandezze trigonometriche



$$\sin(x + 2k\pi) = \sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\text{coeff. ang}}{\text{cos}} = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\operatorname{cotg} x = \left(\frac{\text{coeff. ang}}{\text{sin}} \right)^{-1} = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \forall x \neq k\pi$$

Proprietà

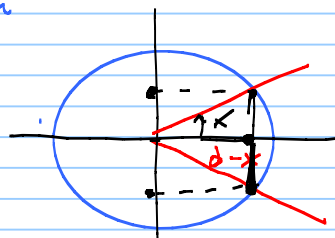
1) $|\cos x| \leq 1$ e $|\sin x| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ identità fondamentale

3) $\sin(-x) = -\sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ dispari

4) $\cos(-x) = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ pari

5) $\left. \begin{aligned} \sin x &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ \cos x &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \end{aligned} \right\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
angoli complementari



6) $\cos 0 = \sin \frac{\pi}{2} = 1$
 $\sin 0 = \cos \frac{\pi}{2} = \sin \pi = \cos \frac{3}{2}\pi = 0$

7) $\cos \pi = \sin \frac{3}{2}\pi = -1$ $\sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

8) $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$9) \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos(x+(-y)) = \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y)$$

$$= \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$10) \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \quad \quad \quad \text{(esercizio!)}$$

$$11) \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\sin(x+x) \quad \text{(esercizio!)}$$

$$12) \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad \text{(esercizio!)}$$

$$= 1 - 2 \sin^2 x$$

$$= 2 \cos^2 x - 1$$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$13) (\sin x) - (\sin y) = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$$

$$x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} \quad y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x = \sin \left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} \right) =$$

$$= \sin \left(\frac{x+y}{2} \right) \cos \left(\frac{x-y}{2} \right) + \cos \left(\frac{x+y}{2} \right) \sin \left(\frac{x-y}{2} \right)$$

$$\sin y = \sin \left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} \right) =$$

$$= \sin \left(\frac{x+y}{2} \right) \cos \left(\frac{x-y}{2} \right) - \cos \left(\frac{x+y}{2} \right) \sin \left(\frac{x-y}{2} \right)$$

$$14) \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x-y}{2} \sin \frac{x+y}{2}$$

Esercizio

$$15) \quad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x \quad \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{dispari}$$

$$16) \quad \operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x \quad \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{periodica di periodo } \pi$$

$$17) \quad \operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} \quad \forall x, y, x+y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} =$$

$$= \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}$$

dividendo num.
e den. per
 $\cos x \cos y$

$$= \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

$$18) \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \quad \forall 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

angoli complementari

$$19) \quad \operatorname{tg} 0 = 0 \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1 \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$20) \quad \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus (\pi + k\pi)$$

$$\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{1}$$

dividendo num.
e den. per
 $\cos^2 \frac{x}{2}$

$$= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = 1 + \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \quad \text{D.K.}$$

$$21) \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \quad \forall x \neq \pi + 2k\pi$$

Esercizi

$$22) \quad \operatorname{tg} x =$$

$$23) \quad \cotg x =$$

} bisezione