

Ancora sull'estremo superiore

Proprietà che caratterizzano il sup

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ superiormente limitato

$k = \sup A$ se e solo se valgono

1) $\forall a \in A \quad si \quad ha \quad k \geq a$

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a_\varepsilon : k - \varepsilon < a_\varepsilon \leq k$

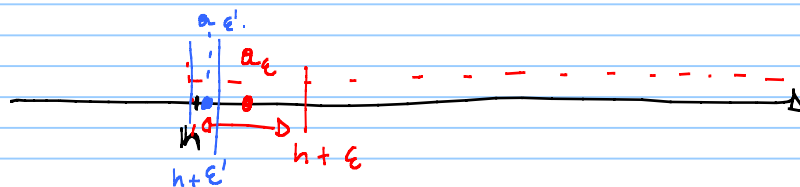
Proprietà che caratterizzano l'inf

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ inferiormente limitato

$h = \inf A$ se e solo se valgono

1) $\forall a \in A \quad h \leq a$

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a_\varepsilon : h \leq a_\varepsilon < h + \varepsilon$



Esercizi

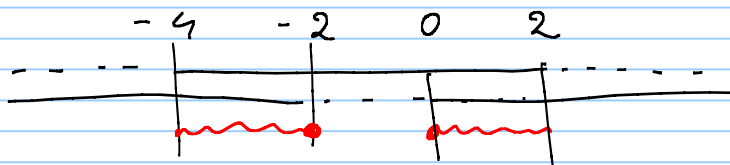
1) $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq |x+1| < 3\}$

$$\begin{cases} |x+1| < 3 & \Leftrightarrow -3 < x+1 < 3 \\ |x+1| \geq 1 & \Leftrightarrow x+1 \leq -1 \quad \text{or} \quad x+1 \geq 1 \end{cases}$$

Esercizio

$$|x| \geq a \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -a \quad \text{or} \quad x \geq a \quad (a > 0)$$

$$\begin{cases} -4 < x < 2 \\ x \leq -2 \quad \text{or} \quad x \geq 0 \end{cases}$$



$$-4 < x \leq -2 \quad \text{or} \quad 0 \leq x < 2$$

$$(-4, -2] \cup [0, 2)$$

3 è un maggiorante, -5 è un minorante

$\Rightarrow$ $\bar{e}$ limitato

est. sup: dimostriamo che $\sup A = 2$

1) $2 \geq a \quad \forall a \in A$ ovvio.

2) $\varepsilon > 0 \quad 2 - \varepsilon \quad 2 \quad \dots \cup [0, 2)$

$$\Rightarrow \exists a_\varepsilon = 2 - \frac{\varepsilon}{2} : \quad 2 - \varepsilon < 2 - \frac{\varepsilon}{2} < 2.$$

est. inf: $\inf A = -4$

1)

2)

Osservazione: • $\sup A = 2 \notin A \Rightarrow A$ non ha massimo.

• $\inf A = -4 \notin A \Rightarrow A$ non ha minimo

Esercizio $[a, b], [a, b), (a, b], (a, b)$

det. $\inf, \sup, \max, \min$.

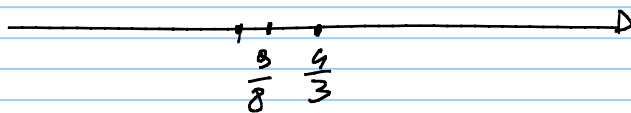
(da ricordare!)

2) $A = \left\{ \frac{m^2}{m^2-1} : m \in \mathbb{N}, m \geq 2 \right\}$ determinare
 $\cap \mathbb{R}$ inf / sup / max / min

$$m=2 \quad \frac{4}{3}$$

$$m=3 \quad \frac{9}{8}$$

⋮



A è superiormente limitato?

$$\frac{m^2}{m^2-1} \leq 2 \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad m \geq 2 \quad ?$$

$$m^2 \leq 2m^2 - 2$$

$$m^2 - 2 \geq 0$$

$$\cancel{m \leq \sqrt{2}} \quad \text{or} \quad \underline{m \geq \sqrt{2}} \quad (SI)$$

$$\sup A = \frac{4}{3} \quad ?$$

$$m=2 \rightarrow \frac{4}{3} \in A$$

$$\frac{m^2}{m^2-1} \leq \frac{4}{3}$$

$$3m^2 \leq 4m^2 - 4$$

$$m^2 - 4 \geq 0$$

$$\cancel{m \leq -2} \quad \text{or} \quad \underline{m \geq 2}$$

$\frac{4}{3}$ è il massimo $\Rightarrow \frac{4}{3}$ è l'estremo sup.

- A è inferiormente limitato?

$$1 \leq \frac{m^2}{m^2-1}$$

$$m^2 - 1 \leq m^2$$

$$-1 \leq 0 \quad \forall m$$

1 è un minorante

$$\inf A = 1$$

1 soddisfa

1)

2) ?

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \quad \left(1 \leq \frac{m^2}{m^2-1} < 1 + \varepsilon \right)$$

Inf A_i :

$$m^2 < m^2 - 1 + \epsilon m^2 - \epsilon$$

$$\epsilon m^2 - (\epsilon + 1) > 0$$

$$m^2 - \left(\frac{\epsilon + 1}{\epsilon}\right) > 0$$

~~$$m < -\sqrt{\frac{\epsilon + 1}{\epsilon}}$$~~

$$\text{or } m > \sqrt{\frac{\epsilon + 1}{\epsilon}}$$

Funzioni

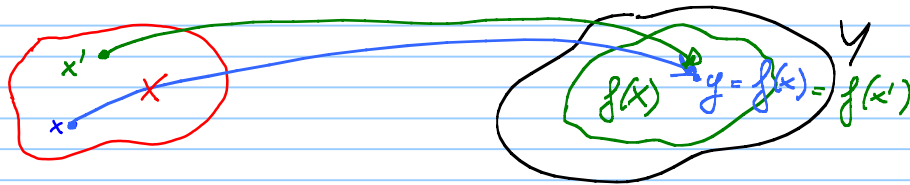
Definizione X, Y insiemi

$f: X \rightarrow Y$ una **funzione** da X in Y
 $x \mapsto y \quad y = f(x) \quad x \in X \quad y \in Y$
 è una relazione che a ogni elemento $x \in X$ corrisponde un unico $y \in Y$.

f è una corrispondenza univoca di X in Y

- X si dice **dominio** della funzione f
- Y si dice **codominio** della funzione f
- $f(x)$ si dice **immagine** di x tramite f

$$f(X) = \{y \in Y : \exists x \in X \quad y = f(x)\} \subset Y$$



- $A \subseteq X \quad f(A)$ **immagine** di A **tramite** f

$$f(A) = \{y \in Y : \exists x \in A \quad y = f(x)\}$$

- $f: X \rightarrow Y$

si dice **grafico** di f

$$\text{graph } f = \{ (x, y) \in \underbrace{X \times Y}_{\text{prodotto cartesiano}} : y = f(x) \}$$

Caso speciale

$$f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

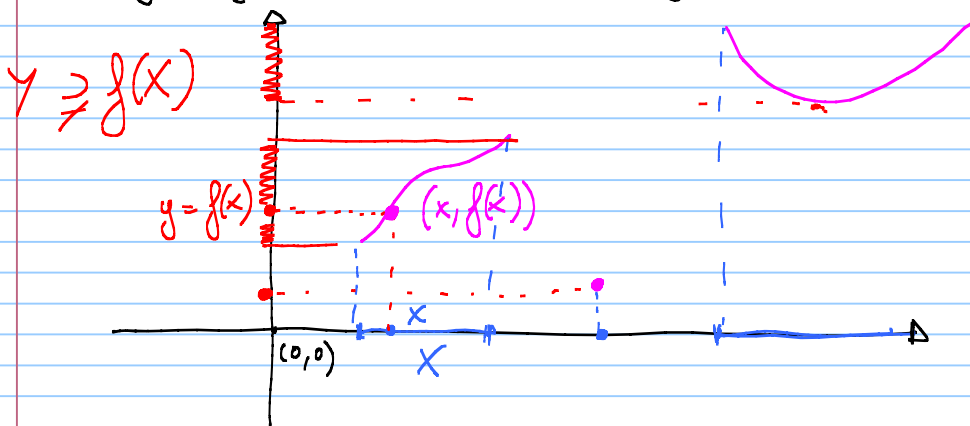
funzione reale di
variabile reale

il dominio di f è X

il codominio di f è $\mathbb{R}$

l'insieme immagine $f(X)$ va calcolato (caso per caso)

$$\text{graph } f = \{ (x, y) \in X \times \mathbb{R} : y = f(x) \} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$



f reale di variabile reale:

- Si dice **dominio naturale** di f il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ nel quale f è **ben** definita.

Esercizi:

1) $f(x) = x^3$

2) $f(x) = \frac{1}{x^4}$

3) $f(x) = \sqrt{\sin x} + (\log_3 x) \frac{1}{(x-1)^2}$

1) $f(x) = x^3$

$\text{dom } f = \mathbb{R}$

$Y = \mathbb{R}$

$f(\text{dom } f) = \{ y \in \mathbb{R} : \exists x \in \text{dom } f \quad y = f(x) \}$

per def

$y \in f(\text{dom } f) \iff \exists x : y = x^3$

$y = x^3 \iff x = \sqrt[3]{y}$

$\Rightarrow f(\text{dom } f) = \mathbb{R}$

2) $f(x) = \frac{1}{x^4}$

$\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 $= (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$f(\text{dom } f) = ?$

$y = \frac{1}{x^4}$

- se $y \leq 0 \quad \nexists x : y = \frac{1}{x^4}$

- se $y > 0$ $y = \frac{1}{x^4} \quad x^4 y = 1$

$x^4 = \frac{1}{y} \quad x = \left(\pm\right) \sqrt[4]{\frac{1}{y}}$

$f(\text{dom } f) = \{ y \in \mathbb{R} : y > 0 \}$

$$3) f(x) = \sqrt{\sin x} + (\log_3 x) \frac{1}{(x-1)^2}$$

dom f :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin x \geq 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{array} \right. \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi \\ x \neq 1 \end{array} \quad k \geq 0, k \in \mathbb{Z}}$$

$$f(\text{dom } f) = ??$$

$$y = \sqrt{\sin x} + (\log_3 x) \left(\frac{1}{(x-1)^2} \right)$$

dopo aver fatto il grafico!

Definizione

Si dice **successione (reale)** una funzione

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(n)$$

$$n \rightsquigarrow a_n$$

$$0 \longmapsto a_0$$

$$1 \longmapsto a_1$$

$$2 \longmapsto a_2$$

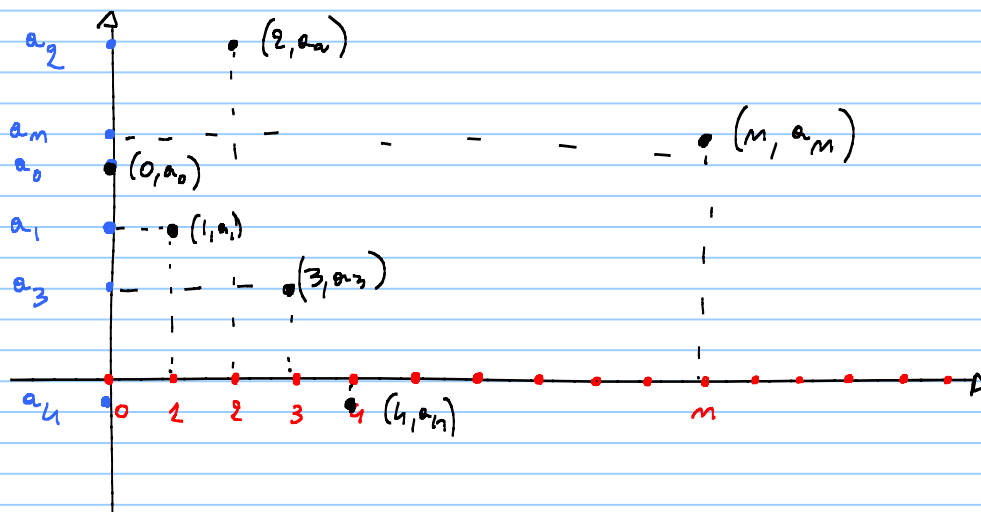
$\vdots$

$$n \longmapsto a_n$$

$\vdots$

$$\{a_m\}_{m \in \mathbb{N}} \quad (a_m)_{m \in \mathbb{N}}$$

insieme immagine



Esempio

$$\left\{ \frac{1}{2m+1}, m \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\left\{ \frac{1}{2m+1} \right\}_{m \in \mathbb{N}}$$

$$a_m = \frac{1}{2m+1}$$

Definizioni

- 1) Si dice che $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è **superiormente limitata** se $f(x)$ è superiormente limitato e si dice **estremo superiore di f in X**
$$\sup_X f \triangleq \sup f(x)$$
- 2) Si dice che $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è **inferiormente limitata** se $f(x)$ è inferiormente limitato e si dice **estremo inferiore di f in X**
$$\inf_X f \triangleq \inf f(x)$$
- 3) Si dice che $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è **limitata** se è sia superiormente che inferiormente limitata
- 4) Si dice che $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è **illimitata** o **non limitata** se o non è sup. limitata o non è inf. limitata.

7) Si dice che $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ammette **minimo** in X se $\exists x_0 \in X : f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in X$

x_0 si dice **punto di minimo** per f in X
 $f(x_0)$ si dice **minimo** di f in X
$$f(x_0) = \min_X f$$

Osservazione Se $\exists \min_X f = \inf_X f$

8) Si dice che $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ammette **massimo** in X se $\exists x_1 \in X$ t.c. $f(x_1) \geq f(x) \quad \forall x \in X$

x_1 si dice **punto di massimo** per f in X
 $f(x_1)$ si dice **massimo** di f in X
$$f(x_1) = \max_X f$$

Osservazione Se $\exists \max_X f = \sup_X f$

Esempi 1) $\log_2 x$ 2) $\frac{x^2}{x^2+1}$

3) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ x^2 & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$

1) $f(x) = \log_2 x$ $\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = (0, +\infty)$

$f(\text{dom } f) = \mathbb{R}$ infatti:

$$y = \log_2 x$$

$$2^y = 2^{\log_2 x}$$

$$x = 2^y \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

f non è limitata

2) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ $\text{dom } f = \mathbb{R}$

$f(\text{dom } f)$

$$y = \frac{x^2}{x^2+1}$$

$$x^2(1-y) - y = 0$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{y}{1-y}}$$

$$y(1-y) \geq 0$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{0 \leq y < 1}$$

$f(\text{dom } f) = [0, 1)$

f è limitata

$\sup_{\text{dom } f} f = 1$

$\nexists \max_{\text{dom } f} f$

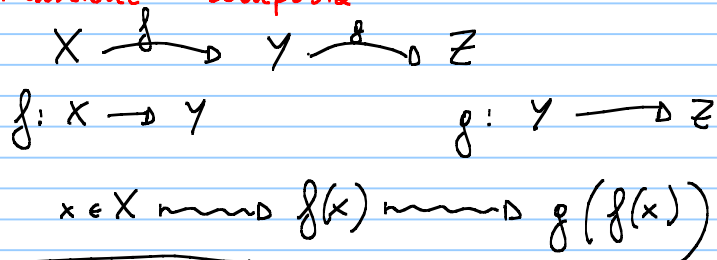
$\inf_{\text{dom } f} f = \min_{\text{dom } f} f = 0$

Definizione $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice

- monotona crescente se $\forall x, y \in X \quad x < y$
si ha $f(x) \leq f(y)$
- monotona strettamente crescente
 $<$
- monotona decrescente se $\forall x, y \in X \quad x < y$
si ha $f(x) \geq f(y)$
- monotona strettamente decrescente
 $>$

Definizione

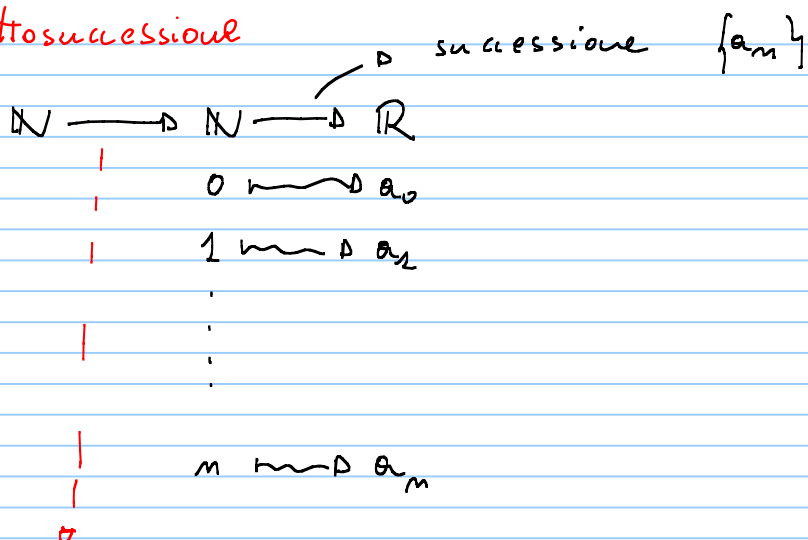
Funzione composta



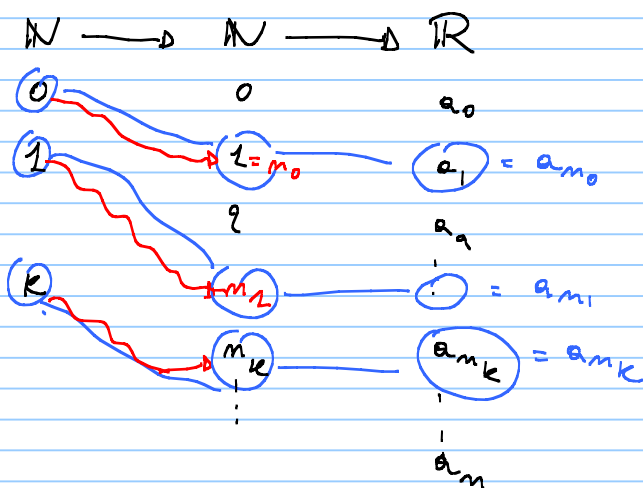
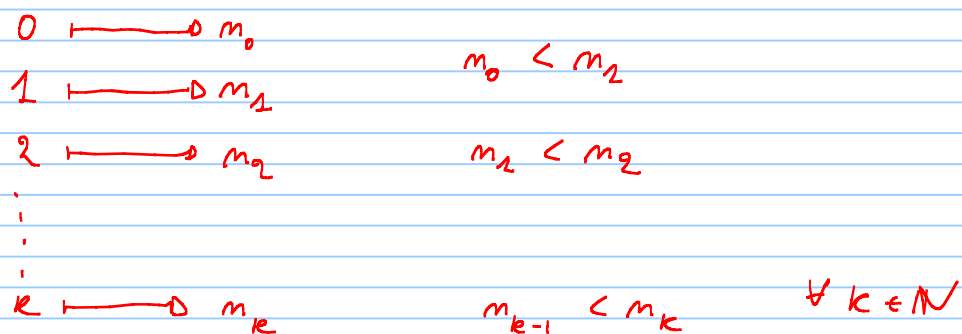
$$\boxed{f(x) \in Y}$$

$$(g \circ f)(x) \triangleq g(f(x))$$

Sottosuccessione



successione di numeri naturali strettamente crescente



$$\{a_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$$

Esempi: $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$\{a_{2k}\}_{k \in \mathbb{N}}$$

sottosuccessione di
indici pari

$$\{a_{2k+1}\}_{k \in \mathbb{N}}$$

sottosuccessione degli
indici dispari

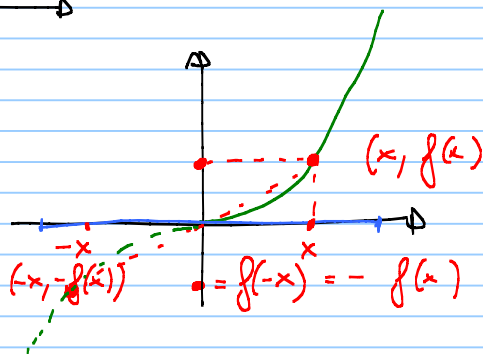
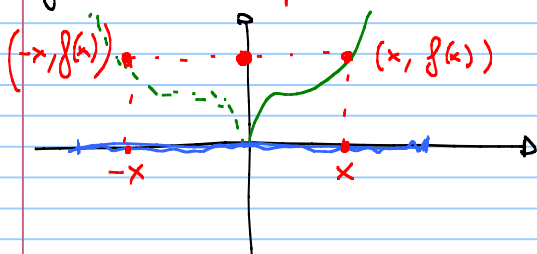
$$\{a_{5k+1}\}_{k \in \mathbb{N}}$$

Definizione $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in X \Rightarrow -x \in X$.

simmetria
all'origine

f si dice **pari** se $f(x) = f(-x)$
 $\forall x \in X$

f si dice **dispari** se $f(x) = -f(-x)$ $\forall x \in X$.



Definizione $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in X \Rightarrow x+T \in X$

f si dice **periodica** se $T > 0$

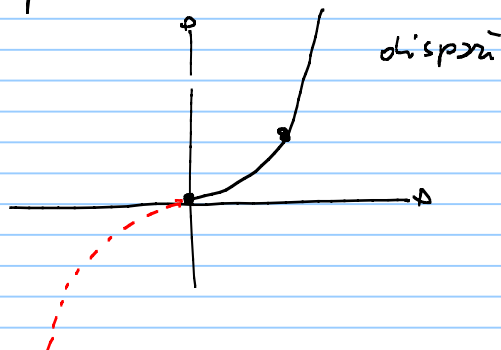
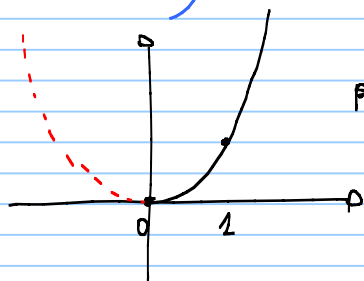
$$f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in X$$

Si dice **periodo** di f il più piccolo numero $T > 0$ per il quale vale $f(x+T) = f(x)$ $\forall x \in X$.

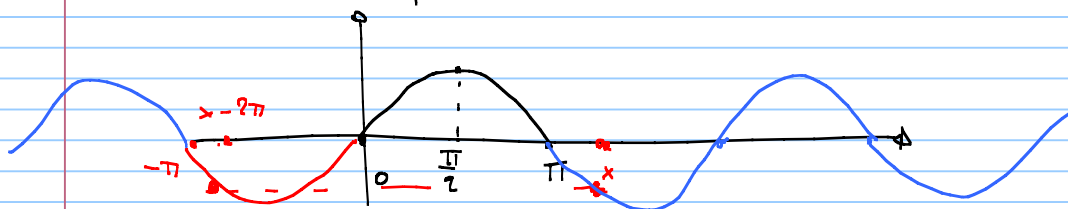
Esempi

1) x^{2n} è pari $\forall n \in \mathbb{N}$

2) x^{2n+1} è dispari $\forall n \in \mathbb{N}$



3) $\sin x$ è dispari
periodica di periodo 2π

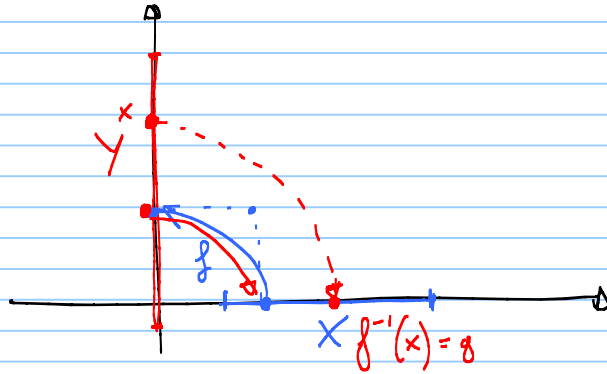


Definizioni

- $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **iniettiva** se $\forall y_1, y_2 \in f(X)$
se $y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 = x_2$
($\forall y \in f(X) \exists! x \in X : y = f(x)$)
($\exists x_1 : y_1 = f(x_1)$)
($\exists x_2 : y_2 = f(x_2)$)
- $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}$ si dice **suriettiva** se $\forall y \in Y$
 $\exists x \in X : y = f(x)$
($f(X) = Y$)
- Dato $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e dato $Y \subsetneq X$ si dice
restrizione di f a $Y \subsetneq X$ la funzione
 $f|_Y(x) \triangleq f(x) \quad \forall x \in Y$

- Dato $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}$ iniettiva e suriettiva
si dice **funzione inversa** di f la funzione

$$f^{-1}: Y \rightarrow X \quad \text{e} \quad f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow x = f(y)$$

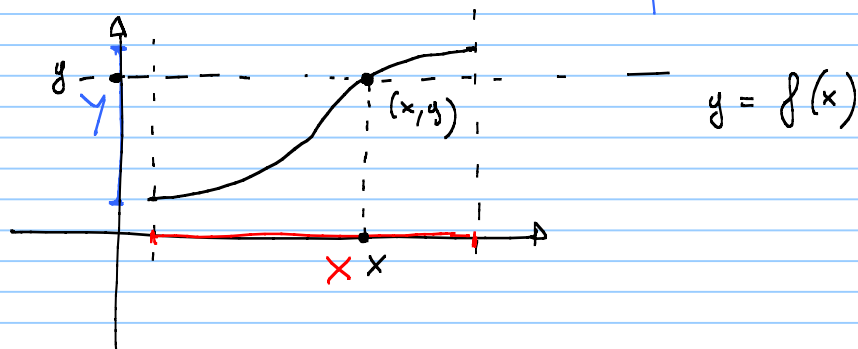
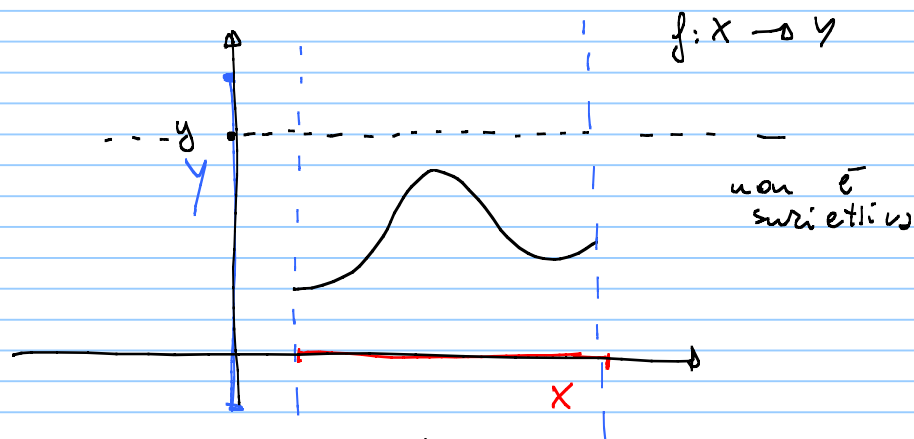
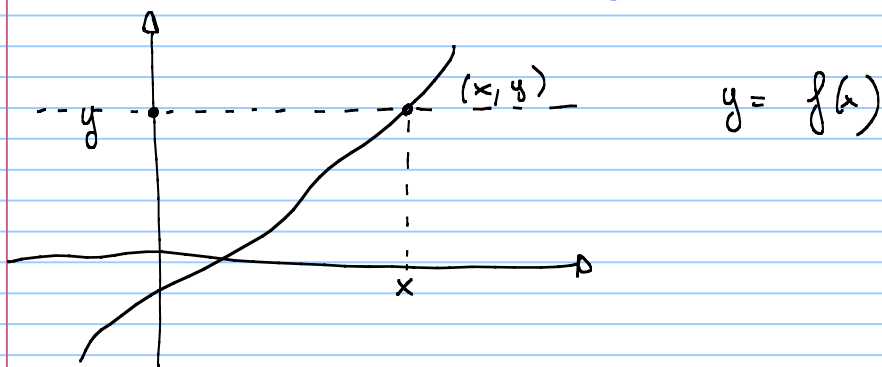
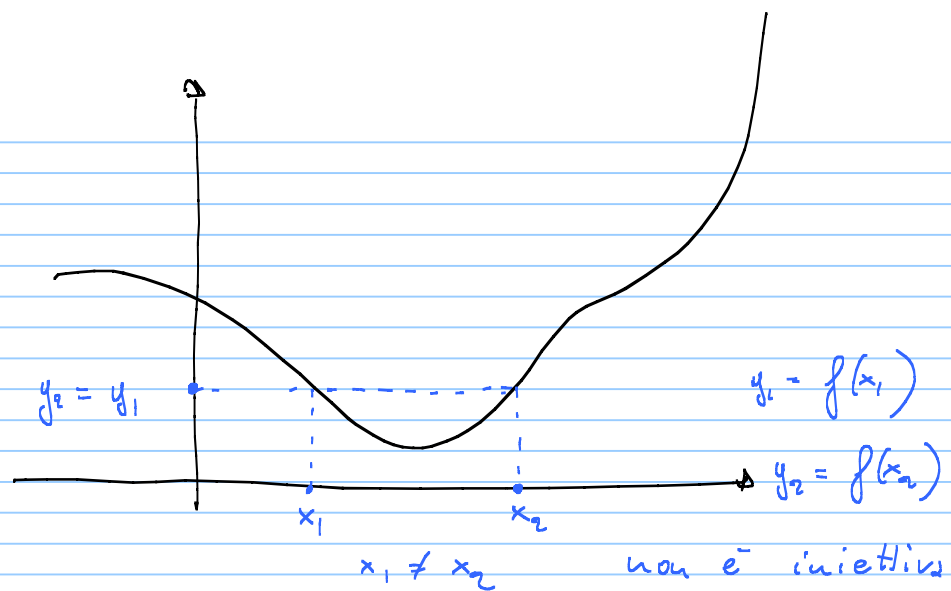


NOTAZIONI

$$x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$f^{-1}(x)$ la funzione inversa di f

$$(f(x))^{-1} = \frac{1}{f(x)}$$



Osservazione: Se $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}$ è strettamente monotona allora è iniettiva.

(le vice versa non è vero!)

Esercizio!

Esempi 1) $f(x) = x^5 + 2$

2) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2}$

3) $f(x) = x^7 + x^3 + 1$

4) $f(x) = (\sin x) + \frac{x}{x+1}$

1) $f(x) = x^5 + 2$ $\text{dom } f = \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

suriettiva sì, iniettiva?

$y \in \mathbb{R}$

$y = x^5 + 2$

$x^5 = y - 2$

$x = \sqrt[5]{y-2}$

Osservo che x è unico! quindi f è iniettiva

$\exists f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y)$

$x = y^5 + 2$

$y = \sqrt[5]{x-2}$

$f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x-2}$

NOTAZIONI

$f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x-2}$

!! diverse !!

$(f(x))^{-1} = (x^5 + 2)^{-1} = \frac{1}{x^5 + 2}$

2) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2}$

$\text{dom } f = \mathbb{R}$

suriettiva?

$y \in \mathbb{R}$

$y = \frac{x}{x^2 + 2}$

$x^2 y - x + 2y = 0$

$\Delta = 1 - 8y^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow$

$-\frac{1}{2\sqrt{2}} \leq y \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

non è suriettiva!

Cambiare la funzione, cambiamo il codominio

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \left[-\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right] = f(\text{dom } f)$$

è suriettiva

è iniettiva?

$$y \in \left[-\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right]$$

$$y = \frac{x}{x^2+2} \iff x^2 y - x + 2y = 0$$

$$\Delta \geq 0 \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-8y^2}}{2y}$$

non è iniettiva

3) $f(x) = x^7 + x^3 + 1$ $\text{dom } f = \mathbb{R}$

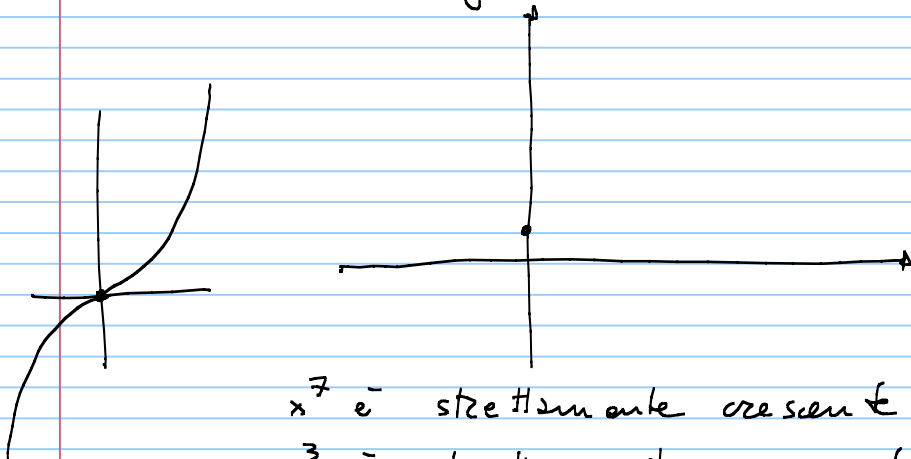
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

è suriettiva, infatti:

$$y \in \mathbb{R} \quad y = x^7 + x^3 + 1$$

ha almeno una soluzione reale
per il teo. fond. algebr.

è iniettiva? $y = x^7 + x^3 + 1$



x^7 è strettamente crescente

x^3 è strettamente crescente

Proprietà: f è strett. crescente

g è strett. crescente

$\Rightarrow f+g$ è strett. crescente

(olim. x esercizio)

quindi $f(x) = x^7 + x^3 + 1$ è strett. cresc.

$\Rightarrow$ iniettiva

$$f(x) = x^2 + x^3 + 1$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

iniettiva e suriettiva

$$f'(x) = ?$$

$$y = x^2 + x^3 + 1$$

$$x = ? ? ?$$

$$\underline{\underline{\cdot \cdot \cdot}}$$

$$4) f(x) = (\sin x) + \frac{x}{x+1}$$

$$\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

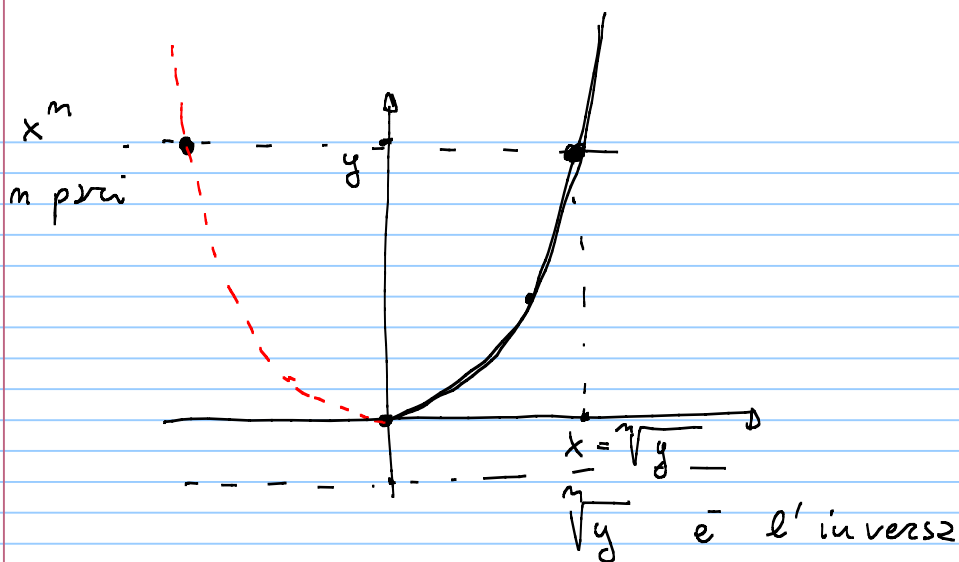
$$f: \text{dom } f \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y = (\sin x) + \frac{x}{x+1}$$

$$??$$

Funzioni elementari

- potenze ad esponente naturale x^n
- potenze ad esponente reale
- esponenziale
- $\sin x$
- $\cos x$
- $\operatorname{tg} x$
- $\operatorname{cotg} x$



$$f(x) = x^n$$

$$\text{di } f(x) = x^n$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{non e' suriettiva}$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty) \quad \text{e' suriettiva}$$

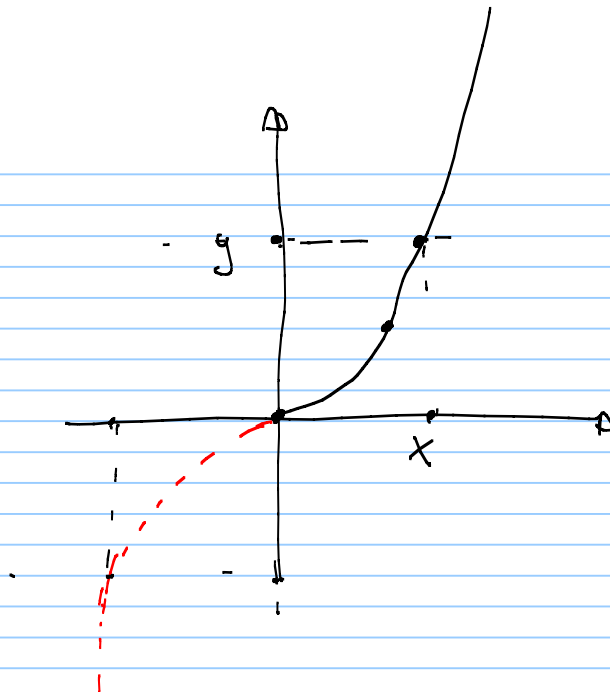
non e' iniettiva

$$f|_{[0, +\infty)} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty) \quad \text{suriettiva e iniettiva}$$

$$\text{invertibile} \quad f'(x) = \sqrt[n]{x}$$

$$\sqrt[n]{} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

x^m m dispari



$f(x) = x^m$ m dispari

è suriettiva $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 iniettiva

$$f^{-1}(x) = \sqrt[m]{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$