

$$x^m, m \in \mathbb{N}$$

$$x^m \quad \boxed{m \text{ pari}}$$

$$x^m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x^m|_{\{x \geq 0\}}: \{x \geq 0\} \rightarrow \{y \geq 0\}$$

iniettiva e suriettiva

ha una inversa e

$$\sqrt[m]{x}: \{x \geq 0\} \rightarrow \{x \geq 0\}$$

$$\sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$$

$$x^m \quad \boxed{m \text{ dispari}}$$

$$x^m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e' iniettiva e suriettiva}$$

ha una inversa

$$\sqrt[m]{x}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

funzione inversa

$$\sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$$

se m dispari
e $x > 0$

$$x^{\frac{1}{m}}: \{x > 0\} \rightarrow \{x > 0\}$$

potenza

- potenze ad esponente reale, $z \in \mathbb{R}$

$$x^z: \{x > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

iniettiva $(\{y > 0\})$

$$x^{\frac{1}{2}}$$

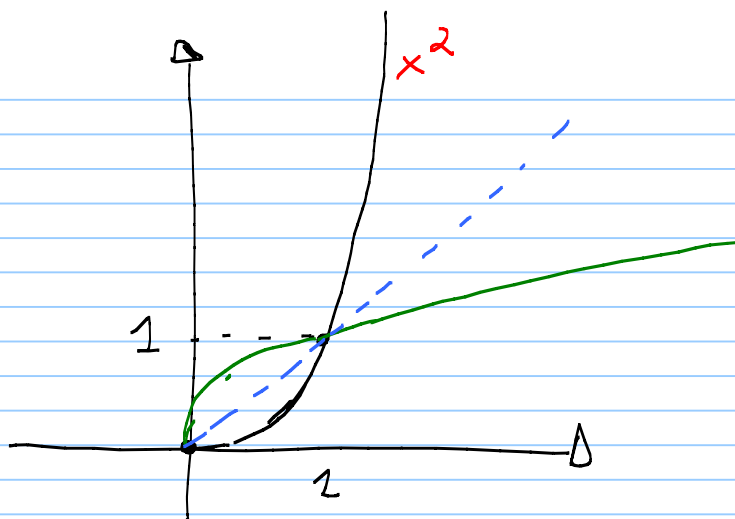
$$(x^2)^{\frac{1}{2}} = x$$

$$z > 1$$

$$x^2, \quad 2 > 1$$

$$x^\beta, \quad 0 < \beta < 1$$

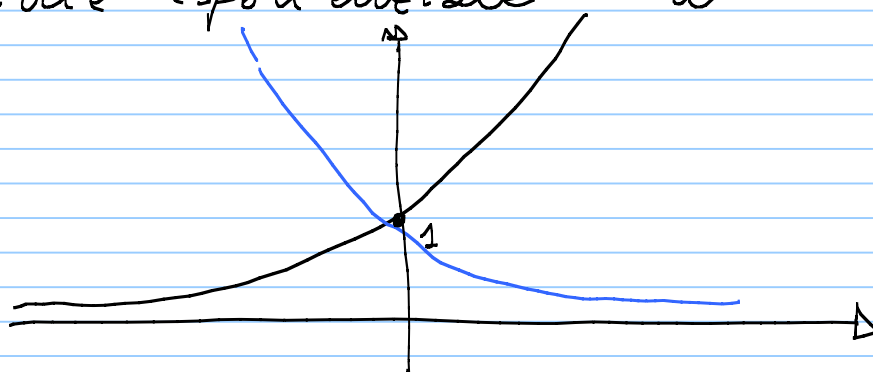
$$\beta = \frac{1}{2} \quad 2 = \frac{1}{\beta}$$



• funzione esponenziale a^x

$$a > 1$$

$$0 < a < 1$$



$$a^x: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad a \neq 1,$$

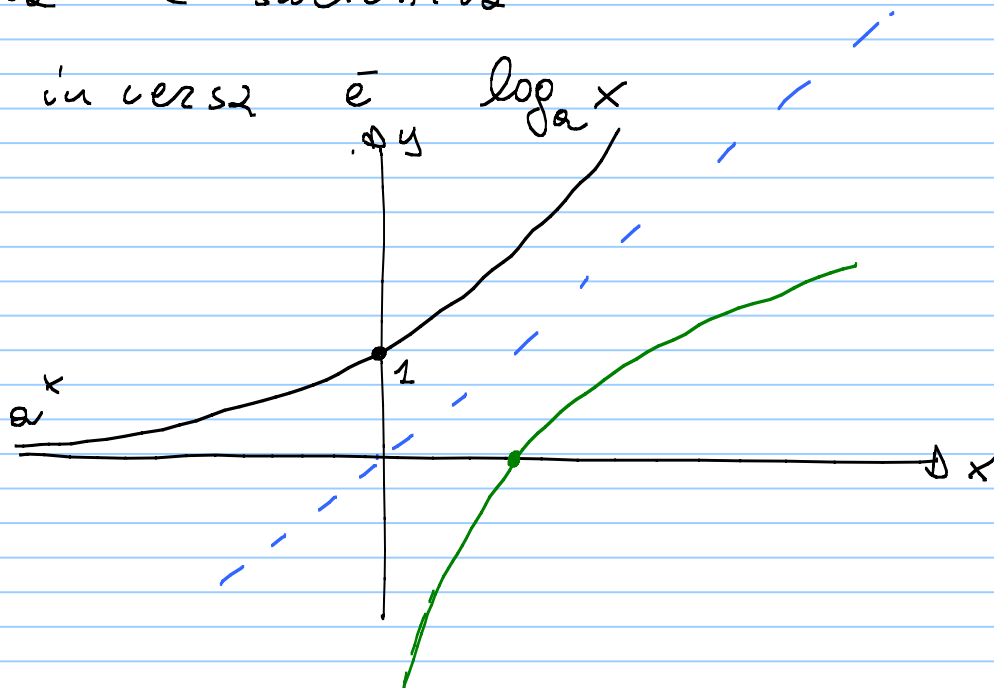
è iniettiva, non è suriettiva

$$a^x: \mathbb{R} \longrightarrow \{x > 0\}$$

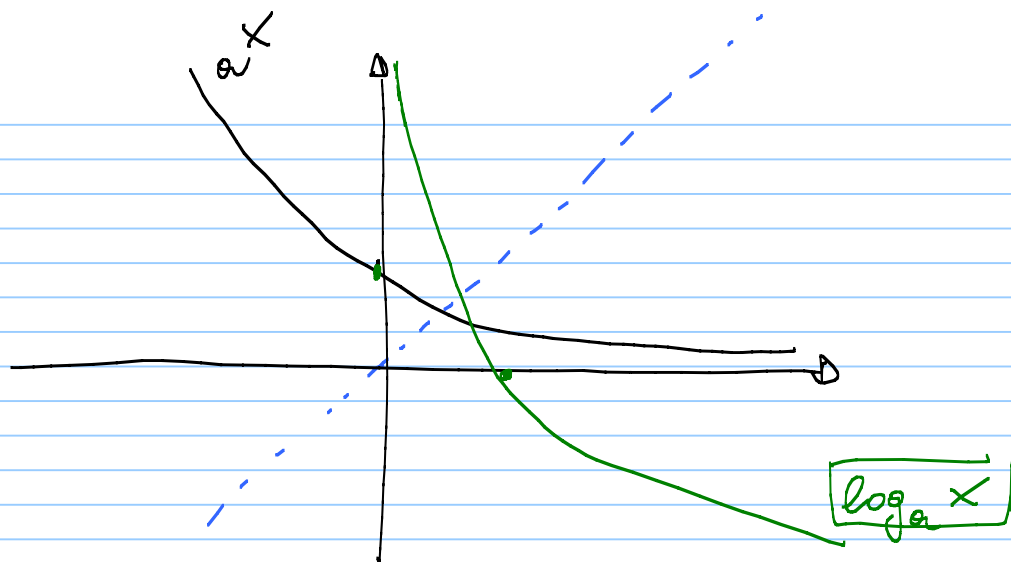
è iniettiva e suriettiva

le sue inverse è $\log_a x$

$$a > 1$$

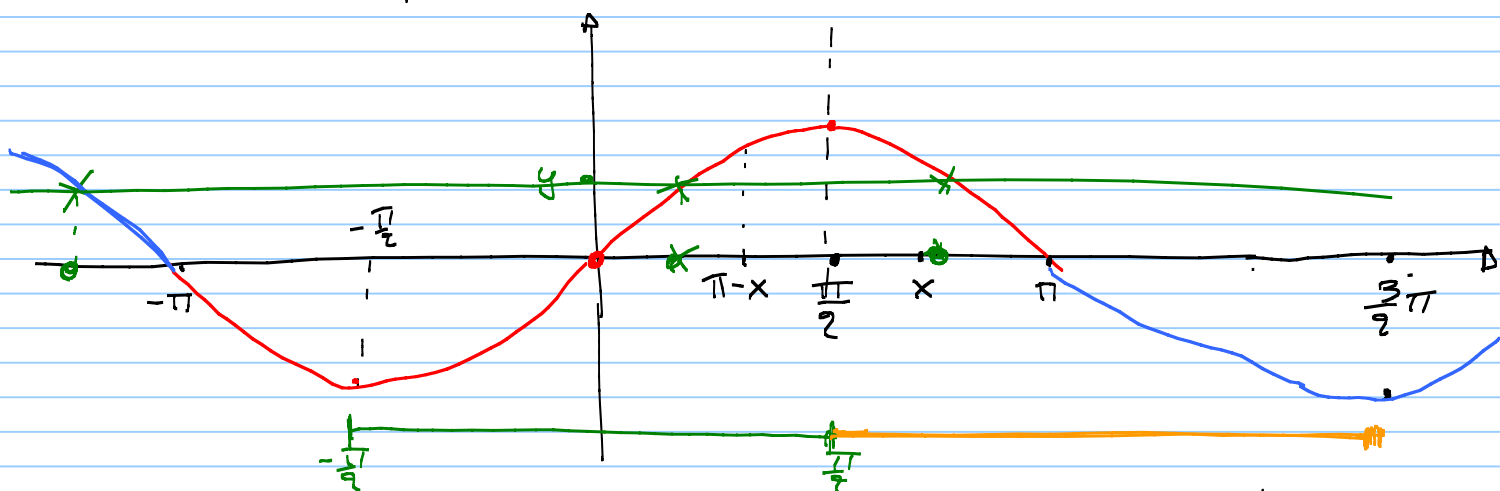
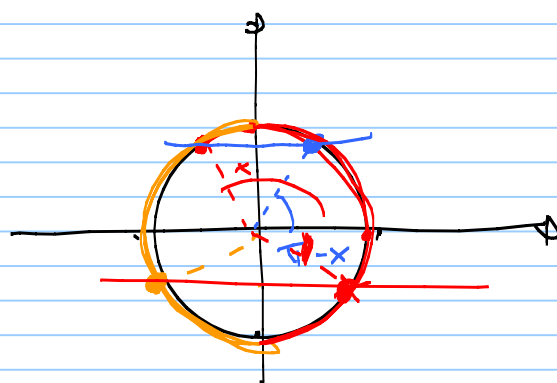


$$0 < a < 1$$



- $\sin x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
non è suriettiva

$\sin x : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$
è suriettiva, non è iniettiva



$\sin(x) = \sin(\pi - x)$ è simmetrica rispetto $x = \frac{\pi}{2}$
 $k \in \mathbb{Z}$

$$\sin x : \left[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right] \rightarrow [0, 1]$$

è iniettiva e suriettiva

$$\boxed{k=0}$$

$$\sin x \Big|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

l' inversa è $\arcsin x$

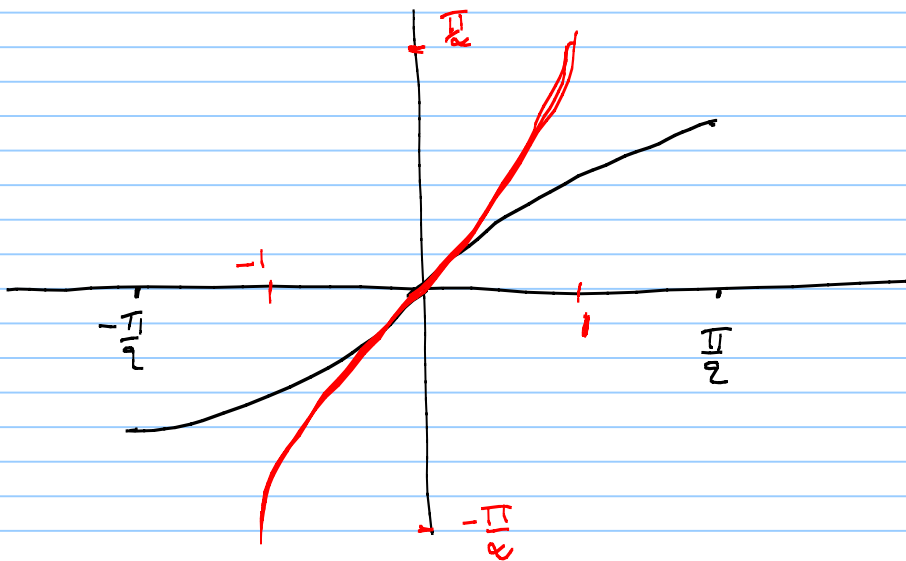
Esempi: 1) l' inversa di $\sin x$ $\Big|_{[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]}$ è

$$\pi - \arcsin x$$

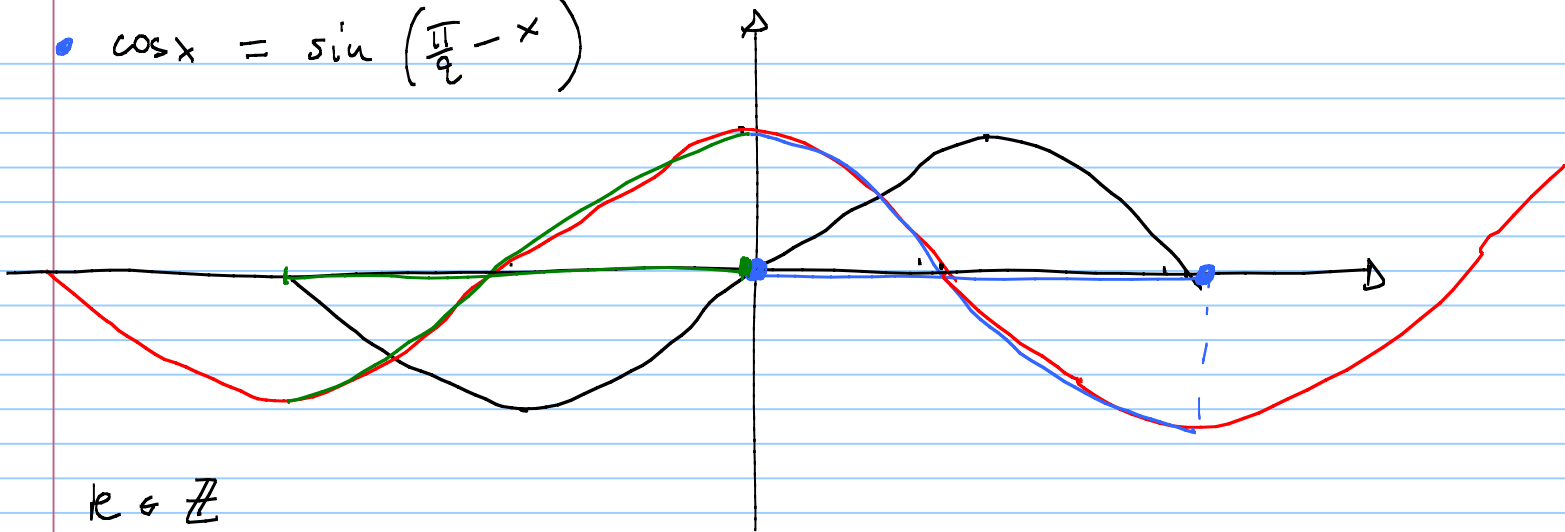
2) l' inversa di $\sin x$ $\Big|_{[\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi]}$ è

$$\arcsin x + 2\pi$$

$$\arcsin x : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



- $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$



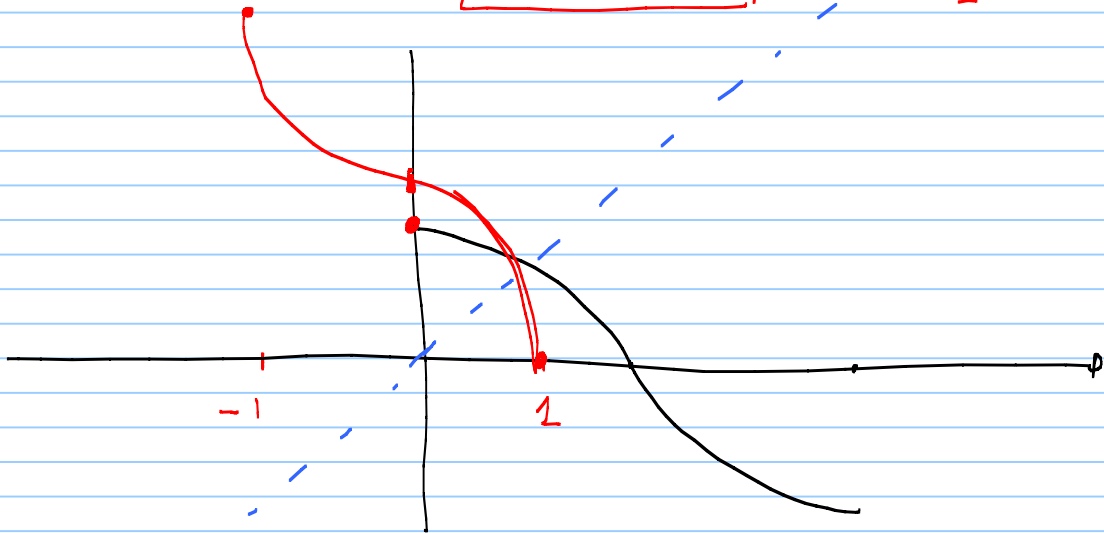
$$k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos : [k\pi, (k+1)\pi] \rightarrow [-1, 1] \quad \text{è invertibile}$$

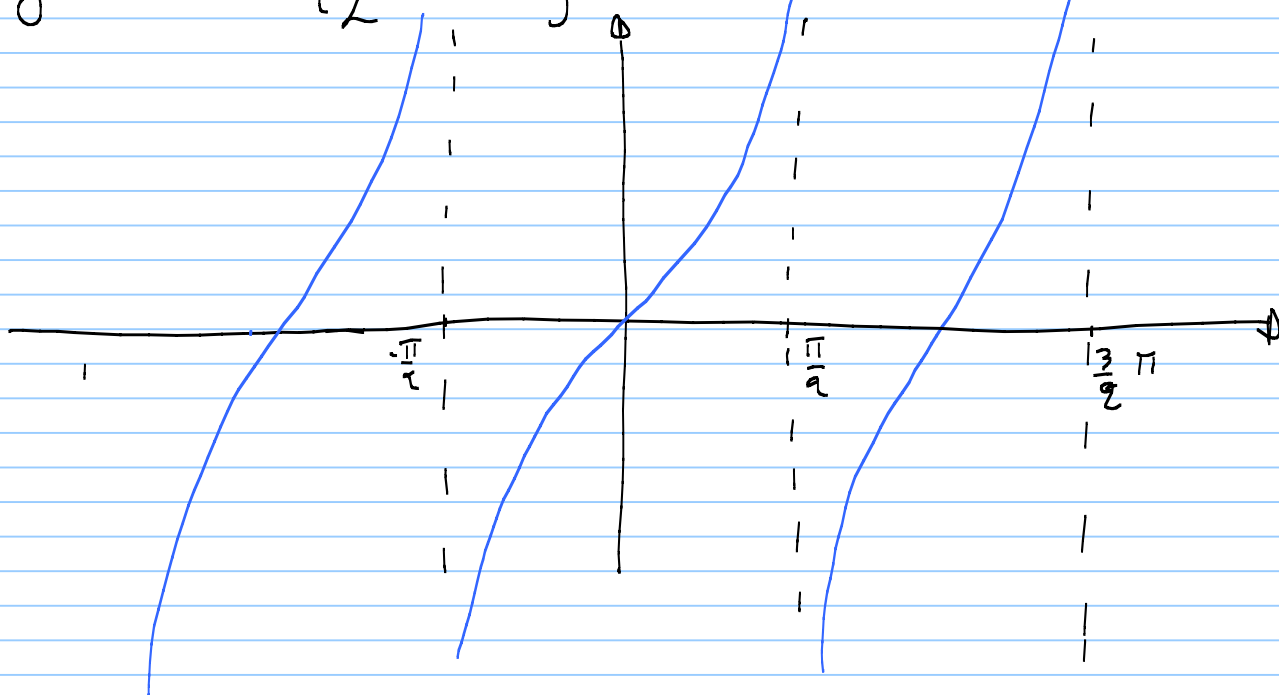
$$\boxed{k=0}$$

$$\cos|_{[0, \pi]} : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

è sur e invertibile $\boxed{\arccos x} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$



• $\text{tg } x : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \rightarrow \mathbb{R}$ suriectiv



$\forall k \in \mathbb{Z}$

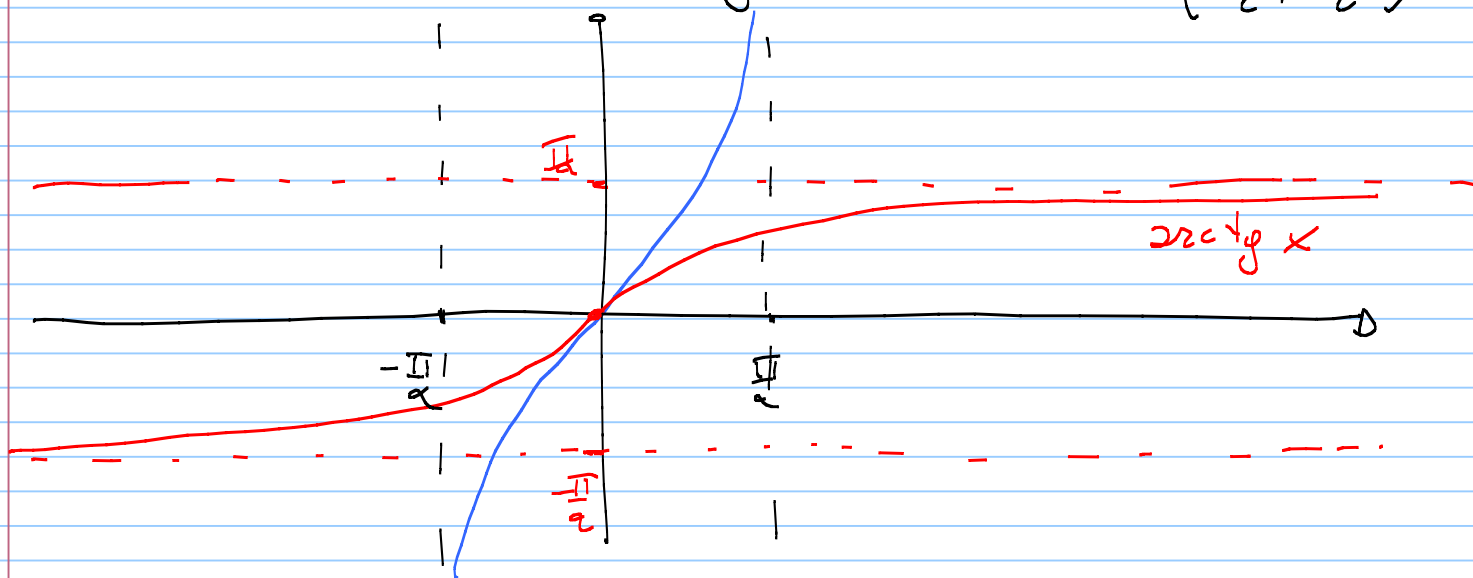
$\text{tg} \mid \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$

$\bar{e}$ injectiv

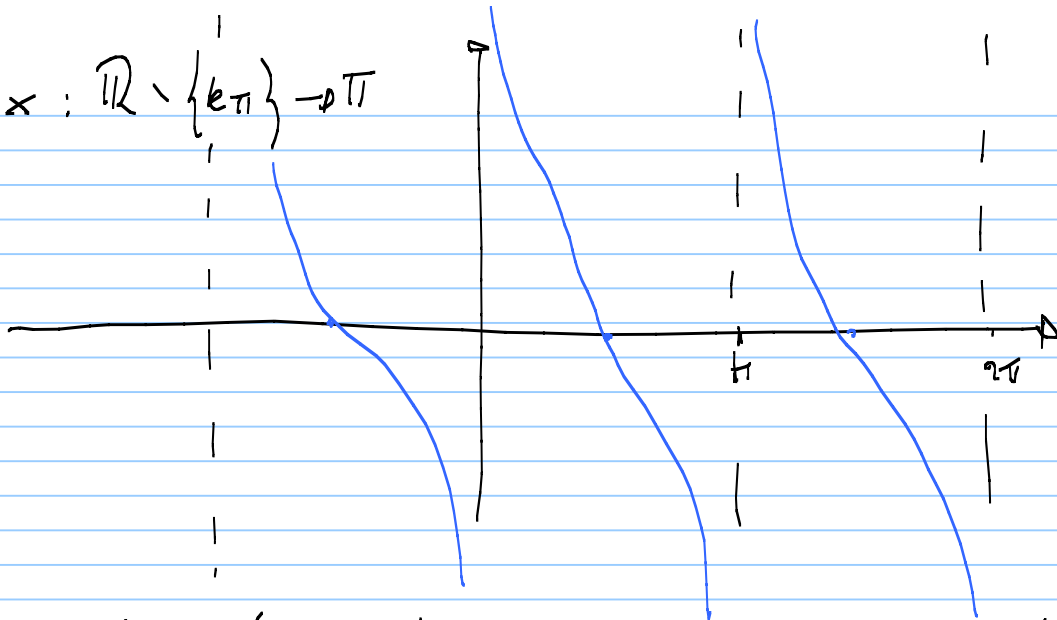
$k=0$

$\text{tg} \mid \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow \mathbb{R}$

e suu inversu $\bar{e}$ arc $\text{tg } x : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$



• $\cot g x : \mathbb{R} \setminus \{k\pi\} \rightarrow \mathbb{R}$

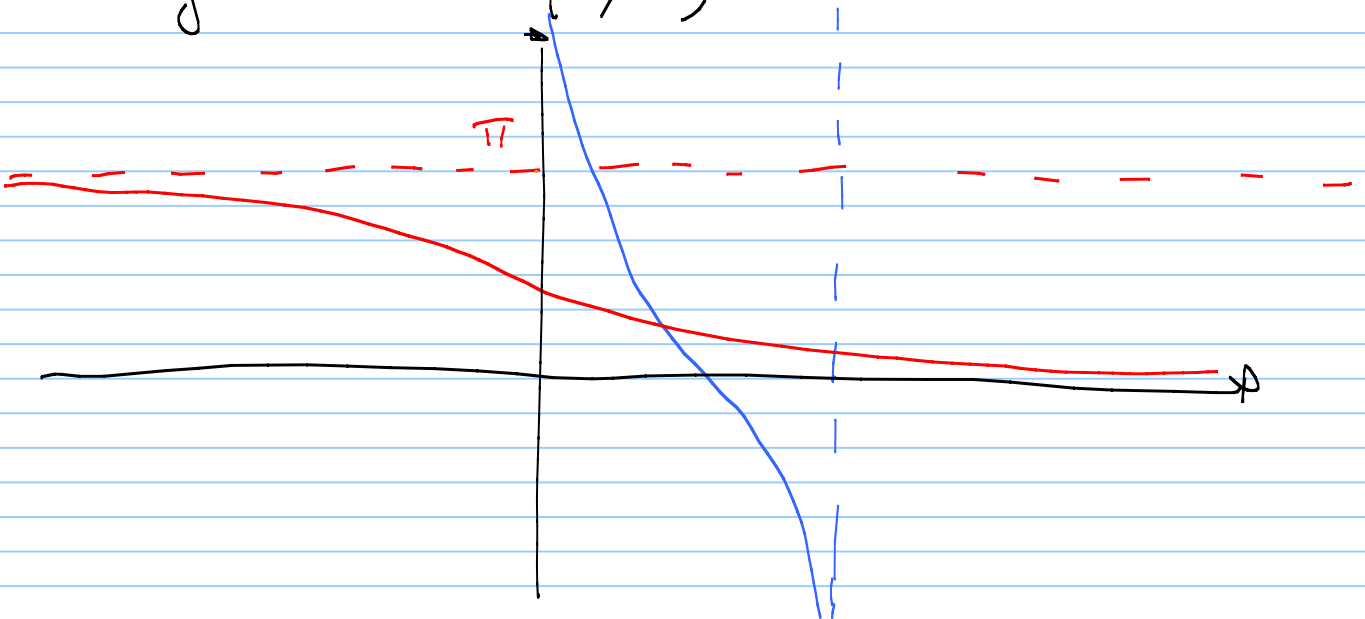


$k \in \mathbb{Z}$

$\cot g x : (k\pi, (k+1)\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ $\bar{e}$ in vertibale

$k = 0$ $\bar{e}$ in versz $\cot g x \mid_{(0, \pi)}$ si di 2ms

$\arccot g x : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$



Topologia in $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^*$)

Definizione $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice intorno (circolare) di x_0 di raggio $r > 0$

$$I_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - r < x < x_0 + r\} = (x_0 - r, x_0 + r)$$

Definizione $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$

- $-\infty < x < +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
 $a + (+\infty) = +\infty + a = +\infty$
- $(-\infty) + (-\infty) = -\infty - \infty = -\infty$
 $a + (-\infty) = a - \infty = -\infty + a = -\infty$
- $\left. \begin{array}{l} (+\infty)(+\infty) \\ (-\infty)(-\infty) \end{array} \right\} = +\infty$

$$(+\infty)(-\infty) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$$

$$a > 0 \quad a(+\infty) = +\infty$$

$$a(-\infty) = -\infty$$

$$a < 0 \quad a(+\infty) = -\infty$$

$$a(-\infty) = +\infty$$

$+$, $\cdot$ non sono definite in tutto $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$

$$(+\infty) + (-\infty) = +\infty - \infty$$

$$0 \cdot (\pm \infty) =$$

forme
inde terminate

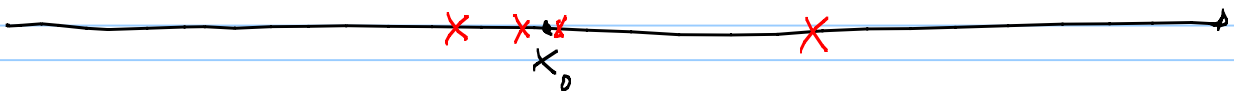
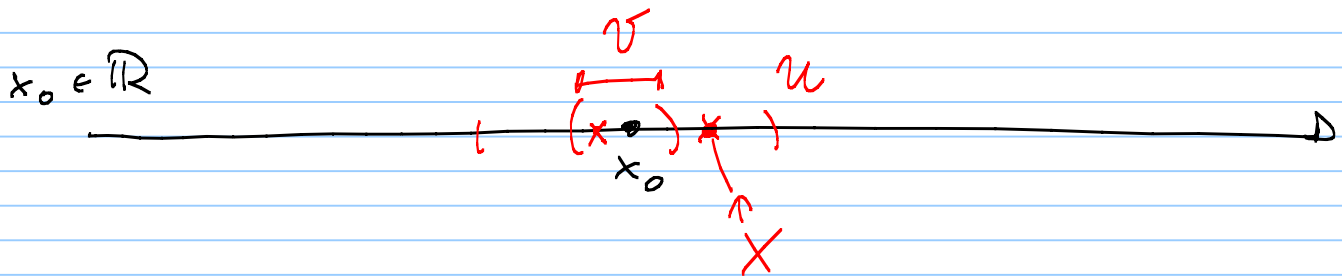
Definizione si dice intorno (circolare) di $+\infty$ ogni intervallo $(a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$ o $a = -\infty$

$-\infty$ ogni intervallo $(-\infty, a)$, $a \in \mathbb{R}$ o $a = +\infty$

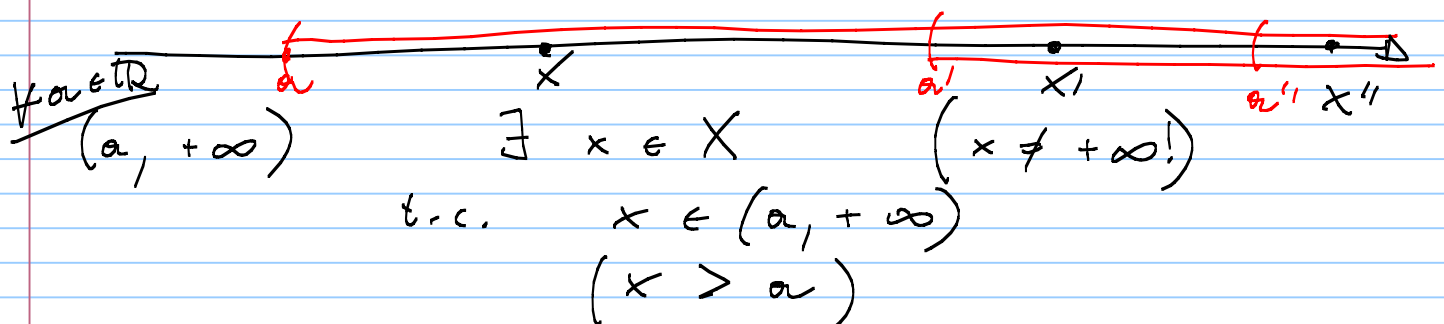
intorni I , $I_r(x_0)$, U , V , $\dots$

Definizione $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ si dice punto di accumulazione per X se
 $\forall U$ intorno di x_0 si ha $(U \setminus \{x_0\}) \cap X \neq \emptyset$

($\forall U$ " " " esiste un punto di X , diverso da x_0 , appartenente a U)



$x_0 = +\infty$



Esempi: 1) intervalli limitati

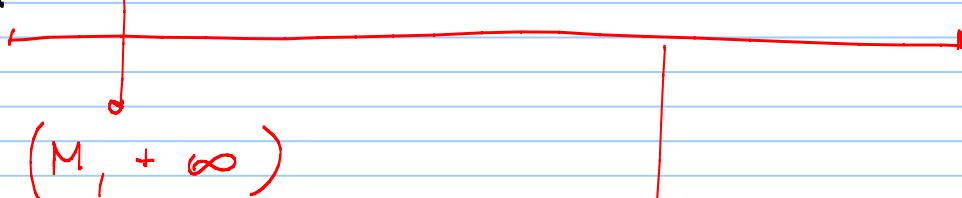
$$a, b \in \mathbb{R} \quad [a, b], (a, b), (a, b], [a, b)$$

L'insieme dei punti di accumulazione è $[a, b]$.

In fatti: $[a, b], (a, b), (a, b], [a, b)$

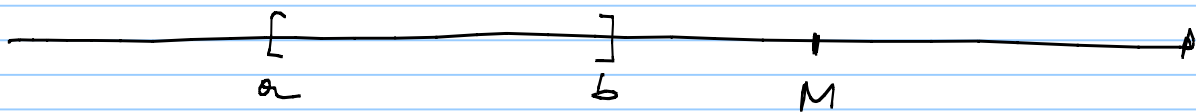
- $+\infty$ non è di accumulazione per gli int. limitati

$$\neg (\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists x \in [a, b] : x > M) =$$



$+\infty$ è di accumulazione per $[a, b]$

$$= \exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in [a, b] \text{ si ha } x \leq M$$



$$M > b \Rightarrow M > x \quad \forall x \in [a, b]$$

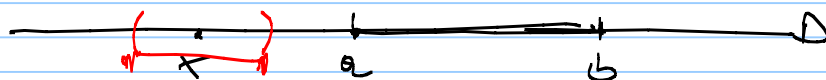
- $-\infty$ non è di acc. per gli intervalli limitati
In fatti se $M < a \Rightarrow M < x \quad \forall x \in \text{intervallo}$

- $x \in \mathbb{R}$
 - $x < a$
 - $x = a$
 - $a < x < b$

- $x = b$

- $x > b$

- $x < a$



$$\neg \left(\forall \mathcal{U} \text{ intorno di } x \quad (\mathcal{U} \setminus \{x\}) \cap [a, b] \neq \emptyset \right)$$

(a, b)

$$\exists \mathcal{U} \text{ di } x_0 : (\mathcal{U} \setminus \{x\}) \cap [a, b] = \emptyset$$

$$\mathcal{U} = I_r(x)$$

$$r = \frac{a-x}{2}$$

quindi

$$x < a$$

non è di accumulazione

- $x = a$

$$I_r(a) = (a-r, a+r) \quad \forall \boxed{r > 0}$$

$$(a-r, a+r) \cap [a, b] = [a, a+r)$$

$$\cap [a, b]$$

$$(a+r < b)$$

$$((a-r, a+r) \setminus \{a\}) \cap [a, b] = (a, a+r) \neq \emptyset$$

a è di accumulazione

-

$$a < x < b$$

$$I_r(x) = (x-r, x+r), \quad r > 0$$

se r è suff. piccolo

$$((x-r, x+r) \setminus \{x\}) \cap [a, b] = (x-r, x+r) \setminus \{x\} \neq \emptyset$$

- $x = b$

- $x = +\infty$

2) Intervalli non limitati:

l'insieme dei punti di accumulazione di

$$(a, +\infty), [a, +\infty) \quad \bar{e} \quad [a, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

$$(-\infty, a), (-\infty, a] \quad \bar{e} \quad (-\infty, a] \cup \{-\infty\}$$

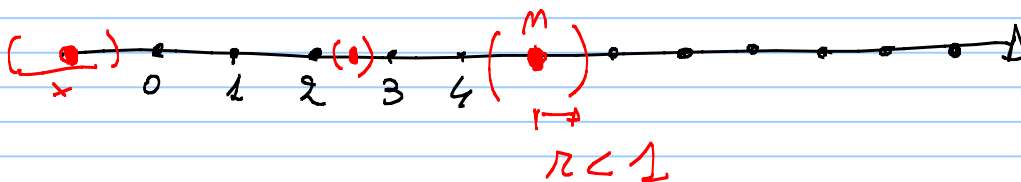
$$(-\infty, +\infty) \quad \bar{e} \quad (-\infty, +\infty) \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

$\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$

3) $A, B \subseteq \mathbb{R}$ l'insieme dei punti di accumulazione di $A \cup B$ è

$$\{\text{punti di acc. di } A\} \cup \{\text{punti di acc. di } B\}$$

4) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ l'unico punto di acc. per $\mathbb{N}$ è $+\infty$.



$$(I_r(m) \setminus \{m\}) \cap \mathbb{N} = \emptyset$$

Definizioni $X \subseteq \mathbb{R}$

- x_0 si dice punto interno di X se $\exists r > 0$:
 $I_r(x_0) \subseteq X$.
- si dice interno di X , $\overset{\circ}{X}$, l'insieme dei punti interni di X .
- x_0 si dice punto esterno ad X se x_0 è interno a X^c .
- x_0 si dice di frontiera per X se
 $\forall r > 0 \quad I_r(x_0) \cap X \neq \emptyset$ e $I_r(x_0) \cap X^c \neq \emptyset$
- $X \subseteq \mathbb{R}$ si dice aperto se $X = \overset{\circ}{X}$
(se $x \in X$ è interno a X , $\forall x \in X$)
- $X \subseteq \mathbb{R}$ si dice chiuso se X^c è aperto

Teorema (Bolzano - Weierstrass)

$X \subseteq \mathbb{R}$, X limitato e infinito (contiene infiniti elementi) ammette almeno un punto di accumulazione

Limite

$f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 di accumulazione per X

Si dice che il limite per x che tende

a x_0 di f è l ($l \in \mathbb{R}^*$) se

$\forall \mathcal{U}$ intorno di l $\exists \mathcal{V}$ intorno di x_0 t.c.

$$f(x) \in \mathcal{U}$$

$$\forall x \in (\mathcal{V} \setminus \{x_0\}) \cap X$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Casi particolari

1) $x_0 \in \mathbb{R}$ $l \in \mathbb{R}$

$f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 di accumulazione per X .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \text{se}$$

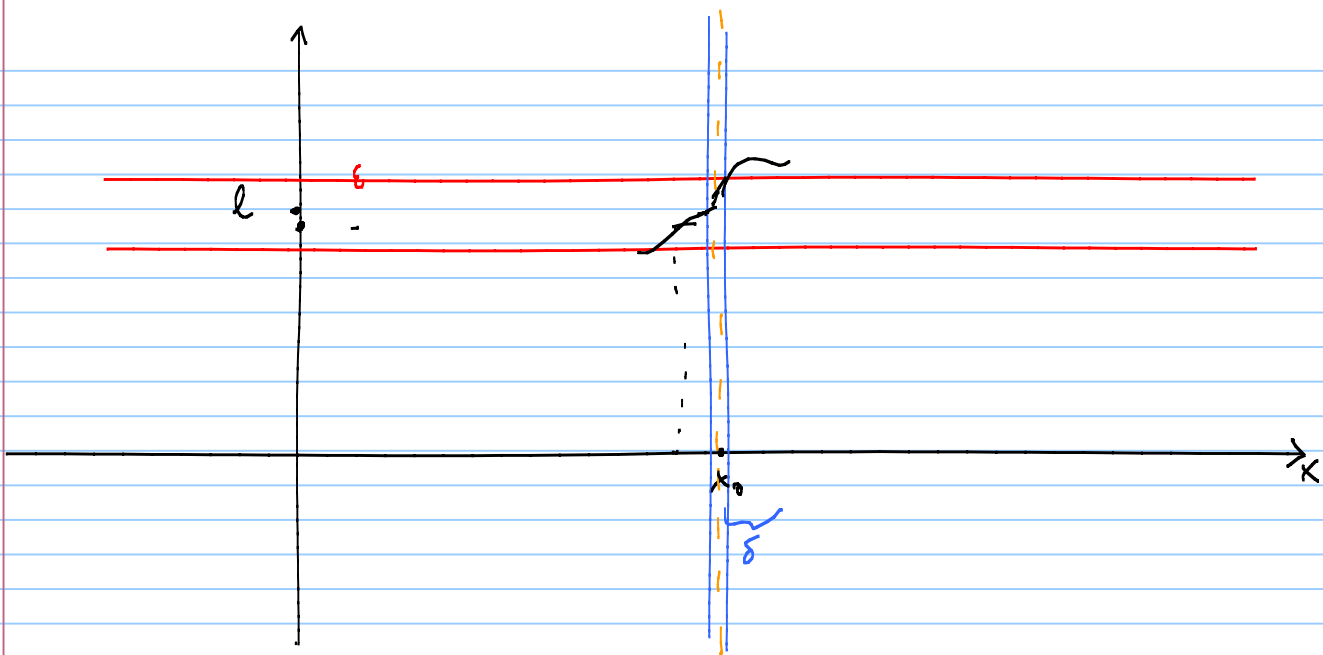
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tale che}$$
$$\forall x \in ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}) \cap X$$
$$\text{si ha } f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$$

possiamo anche scrivere

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{t.c.}$$

$$\forall x \in X \quad \text{tale che } 0 < |x - x_0| < \delta$$

$$\text{si ha } |f(x) - l| < \varepsilon$$



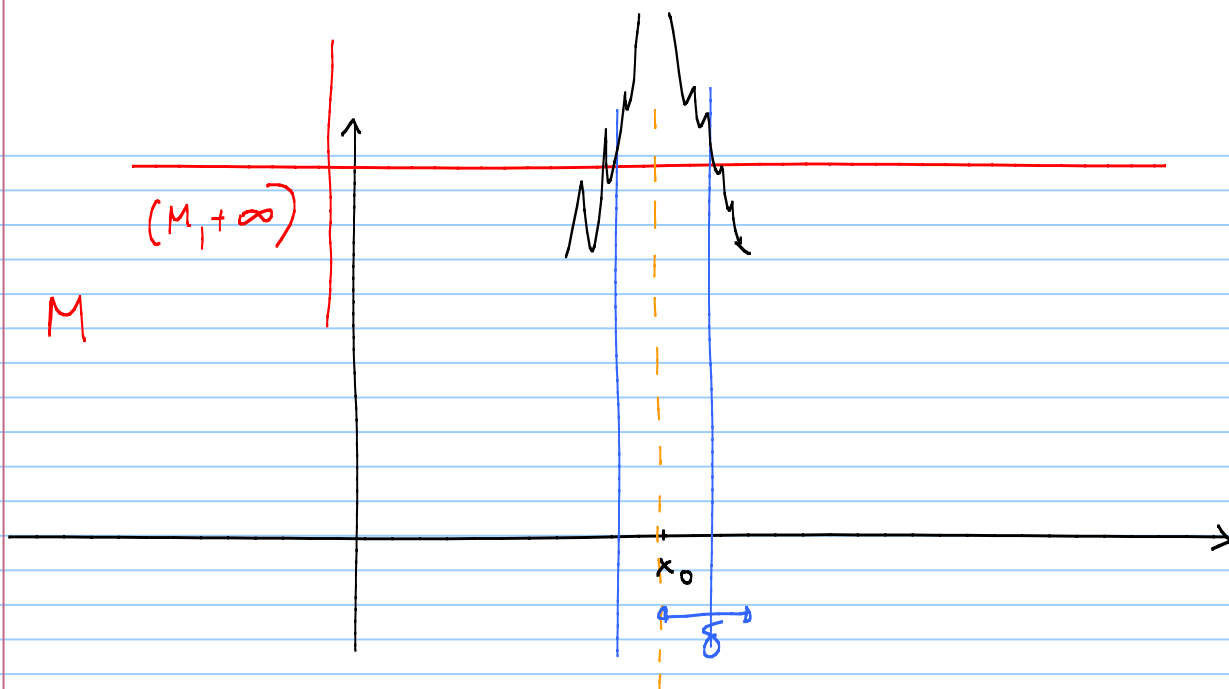
2) $x_0 \in \mathbb{R} \quad l = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

Se $\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0$:

$$\forall x \in X \quad 0 < |x - x_0| < \delta$$

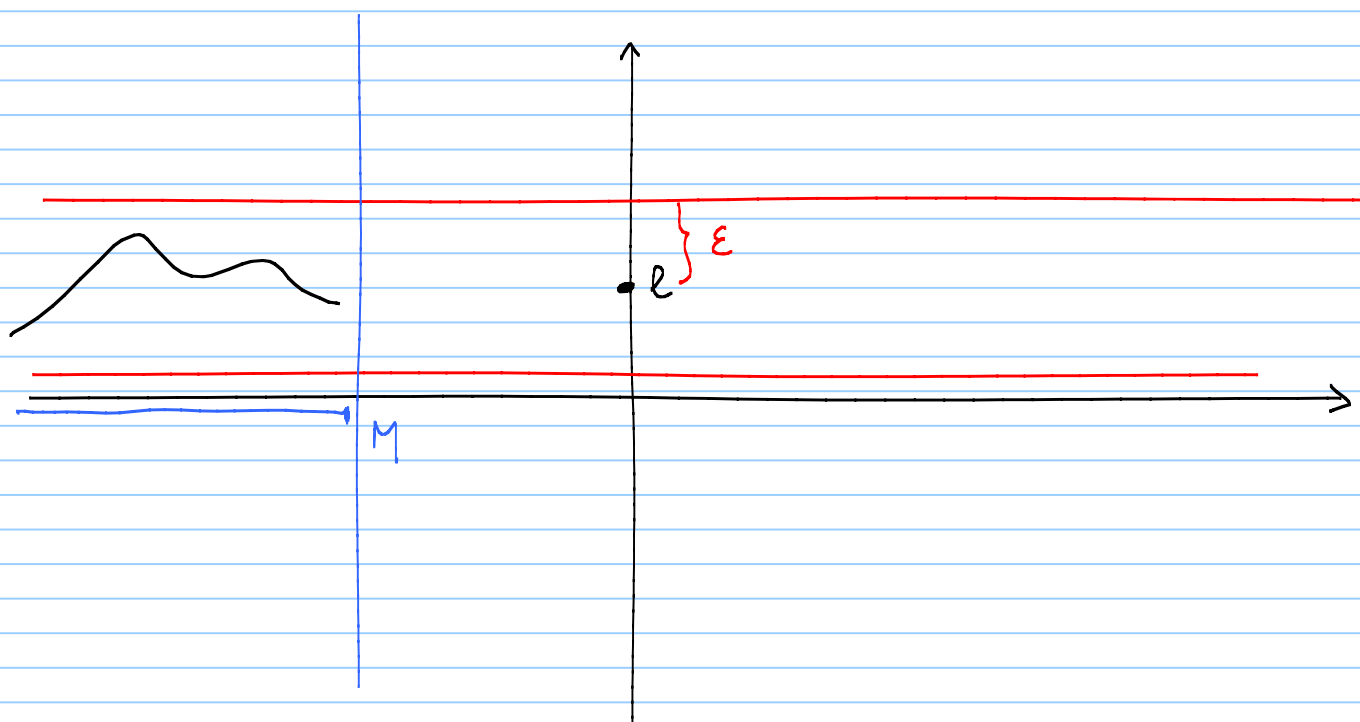
si ha $f(x) > M$



3) $x_0 = -\infty, l \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{R} :$

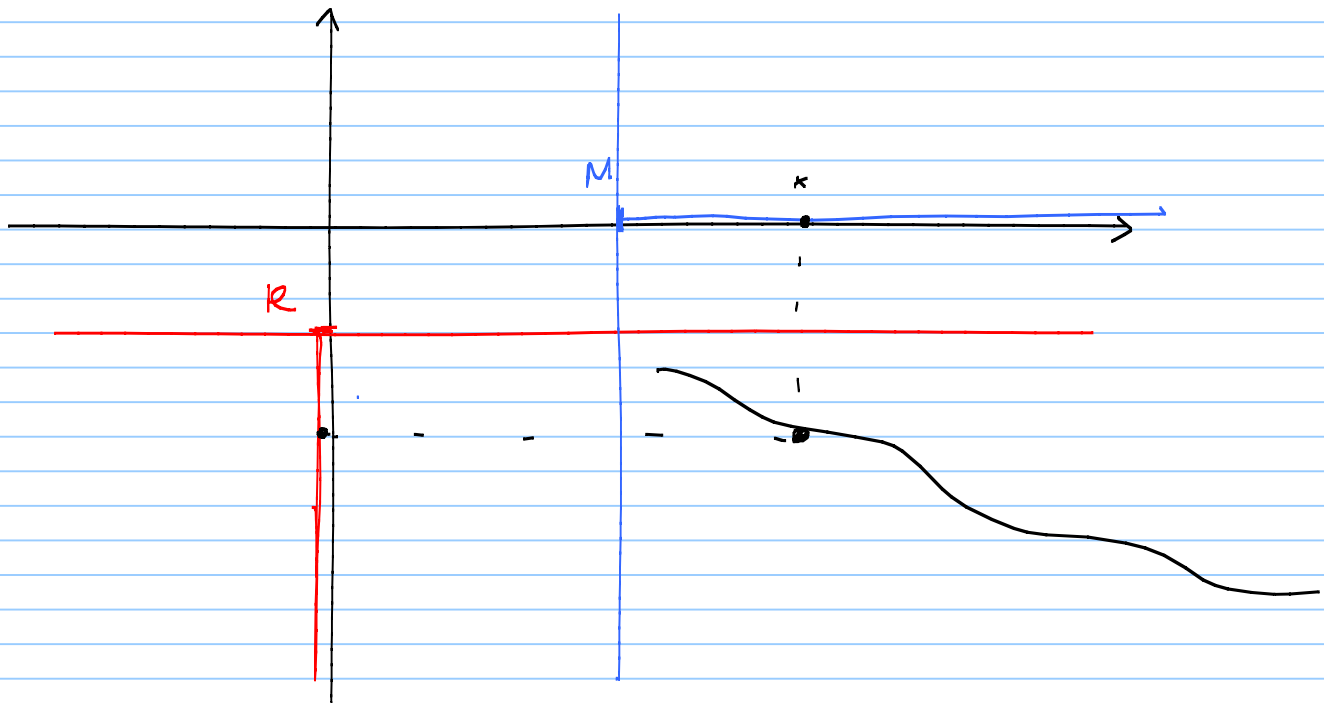
$\forall x \in X \quad x < M \quad \text{si} \quad h_2 \quad |f(x) - l| < \varepsilon$



4) $x_0 = +\infty \quad l = -\infty$

$\forall k \in \mathbb{R} \quad \exists M \text{ b.c.}$

se $x \in X$ e $x > M$ si ha $f(x) < k$.



Esempi

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$$

$$\text{dom}(x^2) = \mathbb{R}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \text{se } 0 < |x - 2| < \delta$$

$$\text{allora si ha } |x^2 - 4| < \varepsilon$$

$$\boxed{\varepsilon} \quad |x^2 - 4| < \varepsilon \quad x^2 \in (4 - \varepsilon, 4 + \varepsilon)$$

$$-\varepsilon < x^2 - 4 < \varepsilon$$

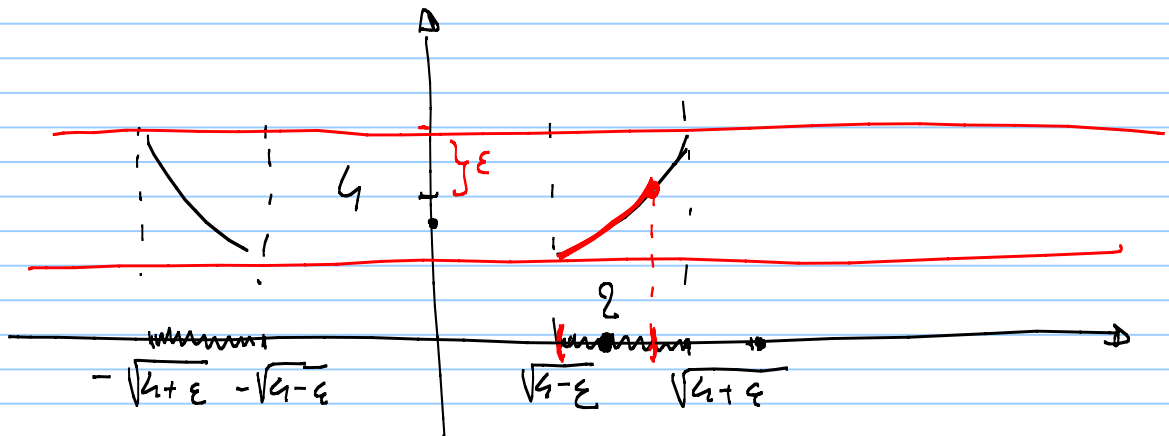
$$\begin{cases} x^2 - 4 < \varepsilon \\ x^2 - 4 > -\varepsilon \end{cases}$$

$$-\sqrt{4+\varepsilon} < x < \sqrt{4+\varepsilon}$$

$$x < -\sqrt{4-\varepsilon}$$

o

$$x > \sqrt{4-\varepsilon}$$



$$\delta = \min \{ \sqrt{4-\varepsilon} - 2, 2 - \sqrt{4-\varepsilon} \}$$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$ dom $f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

0 è punto di accumulazione per dom f

- Può essere vero che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|} = +\infty$?

NO

Infatti: se fosse vero dovrei avere che

$$\forall k \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \text{ t.c. se } x \neq 0 \text{ e } |x| < \delta$$

$$\text{si ha } \frac{x}{|x|} > k$$

Vediamo se la disuguaglianza è vera:

$\frac{x}{|x|}$ consideriamo il caso

$$1) x > 0 \Rightarrow \frac{x}{|x|} = \frac{x}{x} = 1. \text{ Quindi in questo}$$

caso la disuguaglianza diventa

$$\frac{x}{|x|} = 1 > k$$

se $k > 1$
non è mai
soddisfatta.

Quindi non è vero che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|} = +\infty$

- In modo simile si dimostra che non è vero che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|} = -\infty$

- Sia ora $l \in \mathbb{R}$

$$\text{Dato } \varepsilon = \frac{1}{2} \max\{|l-1|, |l+1|\}$$



$$\varepsilon = \frac{1}{2} \max \{ |l-1|, |l+1| \} < \begin{matrix} \frac{1}{2} |l-1| \\ \frac{1}{2} |l+1| \end{matrix}$$

Dobbiamo considerare la disequazione

$$\underbrace{\left| \frac{x}{|x|} - l \right|}_{f(x)} < \underbrace{\frac{1}{2} \max \{ |l-1|, |l+1| \}}_{\varepsilon}$$

1) se $\max \{ |l-1|, |l+1| \} = |l-1|$
e $x > 0$

$$|1 - l| = |l-1| < \frac{1}{2} \max \{ |l-1|, |l+1| \} = \frac{1}{2} |l-1|$$

quindi $|l-1| < \frac{1}{2} |l-1|$ assurdo

così se $\max \{ |l-1|, |l+1| \} = |l-1|$

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{2} |l-1| \quad \text{t.c.} \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x (> 0), x \in (-\delta, \delta)$$

t.c. $\left| \frac{x}{|x|} - l \right| > \varepsilon$

2) se $\max \{ |l-1|, |l+1| \} = |l+1|$
e $x < 0$

$$\left| \frac{x}{|x|} - l \right| = |-1 - l| = |l+1| < \frac{1}{2} \max \{ |l-1|, |l+1| \} = \frac{1}{2} |l+1|$$

così $|l+1| < \frac{1}{2} |l+1|$ assurdo.

Anche in questo caso abbiamo dimostrato che
 $\exists \varepsilon > 0 \quad \text{t.c.} \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x < 0, x \in (-\delta, \delta)$

t.c. $\left| \frac{x}{|x|} - l \right| > \varepsilon.$

Concludiamo che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$ non è $l \in \mathbb{R}$

e che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$ non esiste.

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \nexists$

Infatti

i) poiché $|\sin x| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ il limite non può essere né $+\infty$, né $-\infty$.

ii) poiché $|\sin x| \leq 1 \quad \forall \ell, |\ell| > 1$

se prendiamo $\varepsilon = \frac{|\ell| - 1}{2}$,

consideriamo la disuguaglianza

$$|\sin x - \ell| < \frac{|\ell| - 1}{2}$$

e verifichiamo che è falsa.

Infatti, poiché $|\sin x| \leq 1$ otteniamo

$$|\ell| - 1 \leq |\ell| - |\sin x| = ||\ell| - |\sin x|| \leq$$

perché $|\ell| > 1$ e $|\sin x| \leq 1$

$$\leq |\ell - \sin x| \quad \text{Quindi } \ell \text{ non può essere il limite.}$$

prop. val. ass.

iii) $\forall \ell, |\ell| < 1$ scegliamo $\varepsilon = \frac{1 - |\ell|}{2}$

$$\text{e } x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Otteniamo $\sin x_k = 1$ e

$$\varepsilon = \frac{1 - |\ell|}{2} < 1 - |\ell| \leq 1 - \ell = \sin x_k - \ell \leq |\sin x_k - \ell|$$

Così abbiamo dimostrato che $\forall \ell, |\ell| < 1$

$$\exists \varepsilon = \frac{1 - |\ell|}{2} < 1 - |\ell| \leq 1 - \ell \leq \sin x_k - \ell \leq |\sin x_k - \ell|$$

$$\text{e } \forall M > 0 \quad \exists k: x_k > M.$$

Quindi 2 non può essere il limite

iv) $l=1$. Scegliamo $\varepsilon=1$ e $x_k = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$

quindi

$$|\sin x_k - 1| = |-1 - 1| = 2 > \varepsilon = 1$$

$$\text{e } \forall M \quad \exists k \in \mathbb{Z}: x_k > M.$$

Quindi 1 non può essere il limite

v) $l=-1$ Scegliamo $\varepsilon=1$ e $x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

quindi

$$|\sin x_k - (-1)| = 2 > \varepsilon = 1$$

Quindi -1 non può essere il limite.