

Teorema (continuità della funzione composta)

$$f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g: Y \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) \in Y$$

f sia continua in x_0 , g sia continua in $f(x_0)$.

Allora $(g \circ f)$ è continua in x_0 .

Teorema (di esistenza degli zeri)

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad f \text{ continua in } [a, b]$$

$$f(a) > 0 \text{ e } f(b) < 0 \quad (\text{oppure } f(a) < 0 \text{ e } f(b) > 0)$$

Allora esiste $c \in (a, b)$ t. c. $f(c) = 0$.

Teorema (dei valori intermedi)

$f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ f continua in I . Allora

$$\forall y \quad \inf_x f < y < \sup_x f$$

esiste $c \in I$ t.c. $f(c) = y$.

Osservazione - se f inferiormente limitata $\inf_x f \in \mathbb{R}$

- se f non è inferiormente limitata $\inf_x f = -\infty$

- se f è superiormente limitata $\sup_x f \in \mathbb{R}$

- se f non è superiormente limitata $\sup_x f = +\infty$

Corollario (teorema di connessione)

$f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ I intervallo

f continua

Allora

$f(I)$ è un intervallo.

Teorema (continuità della funzione inversa)

$f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e invertibile.

Se X è un intervallo

oppure

X è un insieme chiuso e limitato

Allora $f^{-1}: f(X) \rightarrow X$ è continua.

Esercizi: 1) $f(x) = \frac{1}{x}$

2) $f(x) = \frac{x^5 + 3x^2 + x - 1}{x^4 - 1}$

3) $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_m(x)}$

$P_m(\cdot)$ polinomio di grado m

$Q_m(\cdot)$ polinomio di grado m

$$1) f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$\forall x \in \text{dom } f$ sono soddisfatte le ipotesi del teorema sull'algebra delle funzioni continue.

Quindi f è continua in x , $\forall x \in \text{dom } f$

$$2) f(x) = \frac{x^5 + 3x^2 + x - 1}{x^4 - 1}$$

$$\begin{aligned} \text{dom } f &= \{x \in \mathbb{R} : x^4 - 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 1\} \\ &= (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty) \end{aligned}$$

$\forall x \in \text{dom } f$ sono soddisfatte le ipotesi del teorema sull'algebra delle funzioni continue.

Quindi $f(x)$ è continua in x , $\forall x \in \text{dom } f$

$$3) f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_m(x)}$$

$P_m(\cdot)$ polinomio di grado m

$Q_m(\cdot)$ polinomio di grado m

Come negli esempi precedenti possiamo concludere che $f(x)$ è continua in x , $\forall x \in \text{dom } f$.

$$4) f(x) = \log(\cos^4 x + \sin^4 x)$$

Osserviamo che $\cos^4 x + \sin^4 x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Quindi $\text{dom } f = \mathbb{R}$.

Le funzioni $\sin x$, $\cos x$, $\log x$, x^2 sono continue in tutto il dominio. La funzione f è ottenuta come composizione di funzioni continue, quindi è continua in x , $\forall x \in \text{dom } f$.

$$5) f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Se $x_1 < 1 \quad \exists U_1$ intorno di x_0 tale che $U_1 \subset (-\infty, -1)$
In U_1 la funzione coincide con la funzione $g_1(x) = (2 - x^2)$ che è continua in x_1 . Quindi f è continua in x_1 , $\forall x_1 < 1$.

Se $x_2 > 1 \quad \exists U_2$ intorno di x_0 tale che $U_2 \subset (1, +\infty)$.
In U_2 la funzione coincide con la funzione $g_2(x) = x$ che è continua in x_2 . Quindi f è continua in x_2 , $\forall x_2 > 1$.

$x_0 = 1$: Comunque fissiamo un intorno di x_0 , in tale intorno ci sono punti nei quali la funzione va calcolata con la formula $g_1(x) = 2 - x^2$ e punti nei quali la funzione va calcolata con la formula $g_2(x) = x$.

L'unico strumento per verificare la continuità è la definizione: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Calcoliamo il limite dx e il limite sx:

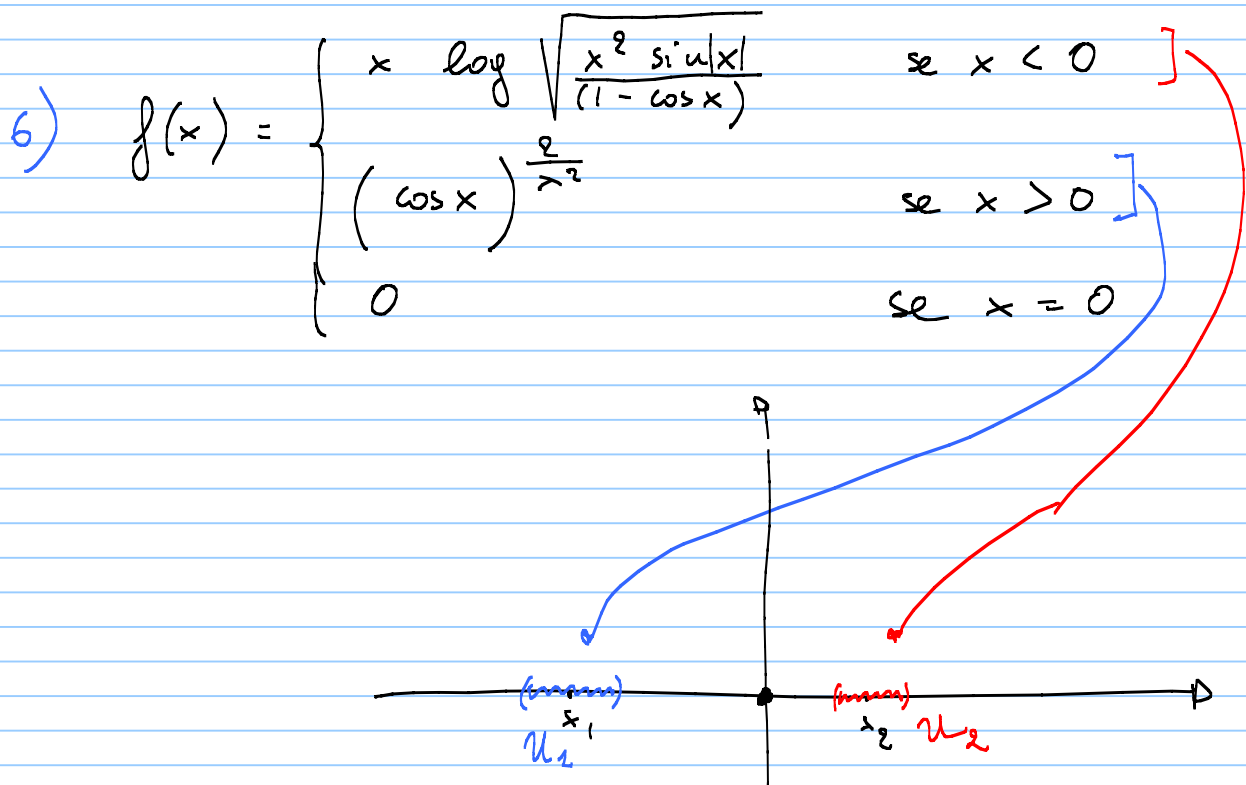
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 - x^2 = 1$$

sono uguali
quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \quad \text{inoltre} \quad 1 = f(x_0)$$

quindi f è continua in $x_0 = 1$



dom $f = ?$

$0 \in \text{dom } f$, 0 è di acc. per dom f

f è continua in 0 ?

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \log \sqrt{\frac{x^2 \sin|x|}{(1-\cos x)}}$$

$$\frac{x^2 \sin|x|}{(1-\cos x)} = \frac{\left(\frac{x^2}{1-\cos x}\right) \cdot \left(\frac{\sin|x|}{|x|}\right) \cdot (|x|)}{\quad \quad \quad} \rightarrow 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t \log t$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{x}{\sqrt{\frac{x^2 \sin|x|}{(1-\cos x)}}} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{x^2 \sin|x|}{(1-\cos x)}}}_{t} \log \underbrace{\sqrt{\frac{x^2 \sin|x|}{(1-\cos x)}}}_{t} \right] = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{\frac{x^2}{(1-\cos x)} \cdot \frac{\sin|x|}{|x|} \cdot |x|}} = \frac{-\sqrt{|x|}}{\sqrt{\frac{x^2}{(1-\cos x)} \cdot \frac{\sin|x|}{|x|}}}$$

Quindi $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 = f(0)$ e continua a sx in

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{\frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \underbrace{\cos x - 1}_t \right)^{\frac{2}{x^2}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\underbrace{(1 + \underbrace{\cos x - 1}_t)}_e \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x - 1}}_{\frac{1}{t}} \right] \cdot \underbrace{(\cos x - 1) \cdot \frac{2}{x^2}}_{\underbrace{\left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) \cdot 2}_{\rightarrow -1} \cdot \frac{1}{2}} = e^{-1}
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e^{-1} \neq 0 = f(0)$$

Quindi f non è continua a dx in 0

$\Rightarrow$ non è continua in 0.

$$7) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{e^{(x+2)} - 1}{(x+2)} & \text{se } x < -2 \\ ax & \text{se } x \geq -2 \end{cases}$$

$$8) \quad f(x) = \begin{cases} e^{\frac{a}{1-x^2}} & \text{se } x > 1 \\ (\sin a) |x-1| + b & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$$

$$9) \quad f(x) = \begin{cases} (1-x)^{\frac{1}{x}} & \text{se } x < 0 \\ a & \text{se } x = 0 \\ a + \sin(x^b) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$10) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(x^a)}{x^2} & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 + b & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (06/08/13)$$

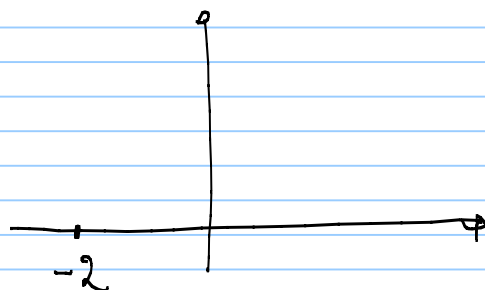
$$a > 0, b \in \mathbb{R}$$

$$11) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-2x} - 1}{x^{\sqrt{a}}} & x > 0 \\ b + cx + x^2 & x \leq 0 \end{cases} \quad (28/06/13)$$

$$a > 0, b, c \in \mathbb{R}$$

$$7) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{e^{(x+2)} - 1}{(x+2)} & \text{se } x < -2 \\ ax & \text{se } x \geq -2 \end{cases}$$

Continuità in $x = -2$



$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{e^{(x+2)} - 1}{(x+2)}$$

$$x+2 = t \quad = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{e^t - 1}{t} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} ax = -2a = f(-2)$$

$\downarrow$ per la continuità di ax $\downarrow$ per def. di f

f è continua a dx in -2

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 1 = f(-2) = -2a$$

f è continua in -2 se e solo se:

$$-2a = 1$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

$$8) \quad f(x) = \begin{cases} e^{\frac{a}{1-x^2}} & \text{se } x > 1 \\ (\sin a) |x-1| + b & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{dom } f = \mathbb{R}$$

continua in $x_0 = 1$?

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{a}{1-x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a}{\boxed{1-x^2} \rightarrow 0} = \begin{cases} -\infty & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ +\infty & a < 0 \end{cases}$$

$< 0 \rightarrow 0$

$$a = 0$$

$$\frac{0}{1-x^2} = 0 \quad \downarrow \quad \forall x \neq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{a}{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & a > 0 \\ 1 & a = 0 \\ \boxed{+\infty} & a < 0 \end{cases}$$

$\hookrightarrow f$ non è continua

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (\sin a) |x-1| + b = b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = b \iff \begin{cases} a > 0 & \text{e } b = 0 \\ \text{oppure} \\ a = 0 & \text{e } b = 1 \end{cases}$$

10)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(x^a)}{x^2} & \text{se } x > 0 \\ x^2 + b & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \quad (06/09/13)$$

$a > 0, b \in \mathbb{R}$

Continua in $x_0 = 0$?

$\lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 + b = b$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(x^a)}{x^2} =$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(x^a)}{x^{2a}} \cdot \frac{x^{2a}}{x^2} \quad \text{②}$

$x^a = t \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{2a}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{2(a-1)} = \begin{cases} 0 & \text{se } 2(a-1) > 0 \\ 1 & \text{se } 2(a-1) = 0 \\ +\infty & \text{se } 2(a-1) < 0 \end{cases}$

⑤
$$= \begin{cases} 0 & \text{se } a > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } a = 1 \\ +\infty & \text{se } a < 1 \end{cases} \quad \text{non e' continua}$$

f e' continua se e solo se

$a > 1 \quad \text{e} \quad b = 0$

oppure

$a = 1 \quad \text{e} \quad b = \frac{1}{2}$

11)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-2x} - 1}{x\sqrt{a}} & x > 0 \\ b + cx + x^2 & x \leq 0 \end{cases}$$

(28/06/13)

$$a > 0, b, c \in \mathbb{R}$$

continuità in $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} b + cx + x^2 = b$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-2x} - 1}{x\sqrt{a}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{e^{-2x} - 1}{-2x}}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{\left[\frac{x}{x\sqrt{a}} \right]}_{\downarrow} (-2) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{1-\sqrt{a}} = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ +\infty \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\text{se } 1 - \sqrt{a} > 0 \\ &\text{se } 1 - \sqrt{a} = 0 \\ &\text{se } 1 - \sqrt{a} < 0 \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < a < 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ +\infty & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1 - \sqrt{a} &> 0 & \sqrt{a} &< 1 \\ (0 <) & a &< 1 \end{aligned}$$

$$1 - \sqrt{a} = 0 \quad a = 1$$

f è continua in $x_0 = 0$ se e solo se

$$0 < a < 1 \quad \text{e} \quad b = 0$$

oppure $a = 1 \quad \text{e} \quad b = 1$

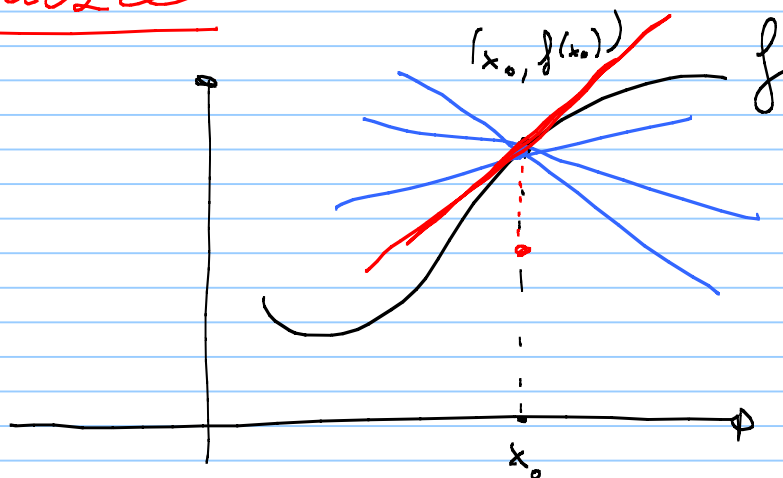
Derivate

Approssimazione lineare

$$y = f(x)$$

$$y = ax + b$$

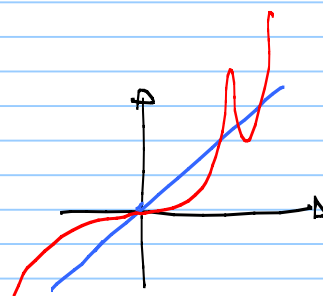
$$- ax_0 + b = f(x_0)$$



Esempio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

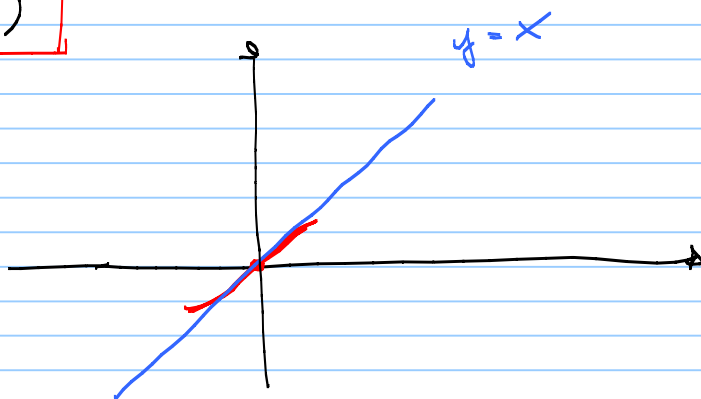
$$\sigma(x) \quad \text{def:} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma(x)}{x} = 0$$



$$\sin x - x = \sigma(x), \text{ in fatti:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} - 1 = 0$$

$$\boxed{\sin x = x + \sigma(x)}$$



$$y = x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - ax}{x} = 1 - a$$

Retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$

$f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 sia interno a I

si chiede se la retta $y = f(x_0) + m(x - x_0)$
(eq. retta passante per $(x_0, f(x_0))$)

è tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ se
 $f(x) - [f(x_0) + m(x - x_0)] = o(x - x_0)$

$$f(x) - f(x_0) - m(x - x_0) = o(x - x_0)$$

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + o(x - x_0)$$

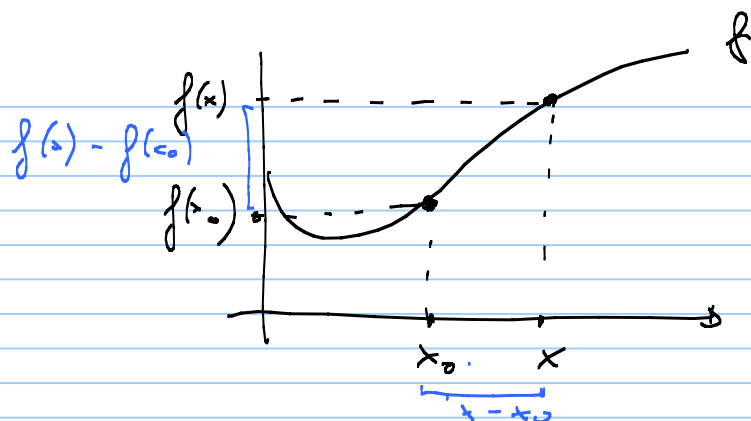
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)}{(x - x_0)} = 0$$

equivalenza

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m \in \mathbb{R}$$

rapporto incrementale



Definizione $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$,
 x_0 sia in tutto I . Diamo che f
 è derivabile in x_0 se $\exists$ finito

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \underbrace{f'(x_0)}_{\text{derivata prima di } f \text{ in } x_0} = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0}$$

Oss. $\left. \frac{d}{dx} (\sin x) \right|_{x=0} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0 - x}{x - 0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = 1$$

Definizione $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f sia derivabile
 in x , $\forall x \in I$.

Si dice (funzione) derivata di f

$$x \mapsto f'(x)$$

$$f': I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Notazioni

$$f'$$

$$\frac{df}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} f$$

Definizione

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$a \leq x_0 \leq b$$

$$(a < x_0 < b)$$

diremo che f ammette
derivata dx in x_0 se

$$(sx \text{ in } x_0)$$

$\exists$ finito

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \underbrace{f'_+(x_0)}_{\substack{\text{derivata} \\ \text{dx in } x_0}}$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow x_0^-} \dots = \underbrace{f'_-(x)}_{\substack{\text{derivata} \\ \text{dx in } x_0}} \right)$$

Teorema

$$f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

, I aperto

Se f è derivabile in x_0



$$\exists f'_+(x_0), f'_-(x_0) \quad e \quad f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$$

Teorema (derivabilità $\Rightarrow$ continuità)

$f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I aperto

f sia derivabile in $x_0 \in I$.

(der. 2 dx in x_0)

Allora f è continua in x_0

(cont. 2 dx)

dim.: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \overset{f}{f(x_0)} - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$



$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\sigma(x - x_0)}_{\text{se } x \rightarrow x_0 \rightarrow 0}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Osservazione

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

x_0, h

$$x = x_0 + h$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

Derivate delle funzioni elementari

1) x^2 ($x > 0$) $2 \in \mathbb{R}$

se $2 = 0$ $x^2 = x^0 = 1 \quad \forall x$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{0}{h}}_0 = 0$$

generalizzazione: $f(x) = c \quad \forall x \Rightarrow f'(x) = 0$

se $2 \neq 0$ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} =$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 \left[\left(1 + \frac{h}{x}\right)^2 - 1 \right]}{\frac{h}{x}}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^2 - 1}{t} = 2$$

$$= 2x^{2-1}$$

2) $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\boxed{\sin x} \cdot \boxed{\cos h} + \cos x \sin h - \boxed{\sin x}}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \left[\frac{(\cos h - 1)h}{h^2} \right] + \cos x \cdot \left[\frac{\sin h}{h} \right] = \cos x$$

$\downarrow$
0
 $\downarrow$
1

3) $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$ (per esercizio)

4) $\frac{d}{dx} e^x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} =$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} e^x \underbrace{\left(\frac{e^h - 1}{h} \right)}_1 = e^x$$

5) $\frac{d}{dx} a^x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} =$ $a \neq 1$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} a^x \underbrace{\left(\frac{a^h - 1}{h} \right)}_{\log a} = a^x \log a$$

Algebra delle derivate

$f, g: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ f, g siano derivabili in x_0 , Allora

1) $f+g$ è derivabile in x_0 e

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

2) $c \in \mathbb{R}$ cf è derivabile in x_0 e

$$(cf)'(x_0) = c f'(x_0)$$

3) $(f \cdot g)$ è derivabile in x_0 e

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

4) se $g(x_0) \neq 0$ $\frac{f}{g}$ è derivabile in x_0

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Esempio 1) $\frac{d}{dx} \tan x = \frac{d}{dx} \frac{\sin x}{\cos x} = \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

2) $\frac{d}{dx} \cot x = \frac{d}{dx} \frac{\cos x}{\sin x} = \quad \left(x \neq k\pi\right)$

$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$$