

Teorema (di derivazione delle funzioni composte)

$f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile $(\Rightarrow \text{continua} \Rightarrow f(I) \text{ è un intervallo})$

$g: J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile

$$f(I) \subseteq J$$

Allora $(g \circ f)$ è derivabile e

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) f'(x) \quad (\text{chain rule})$$

Teorema (di derivazione della funzione inversa)

$f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in x_0
e $f'(x_0) \neq 0$. f sia invertibile

Allora (f^{-1}) è derivabile in $f(x_0) = y_0$

$$e \quad (f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad (x_0 = f^{-1}(y_0))$$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$1) f(x) = \arcsin x \quad f = g^{-1} \quad g = \sin \mid \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$f'(x) = (g^{-1})'(x) = \frac{1}{\underline{g'(g^{-1}(x))}} = \quad g' = \cos$$

$$= \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$2) f(x) = \arccos x$$

$$f'(x) = \frac{1}{-\sin(\arccos x)}$$

$$f = g^{-1} \quad g = \cos \mid [0, \pi]$$

$$\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$3) f(x) = \operatorname{arctg} x \quad f = g^{-1} \quad g = \operatorname{tg} \mid \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'(x) = (g^{-1})'(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$4) f(x) = \log_a x \quad f = g^{-1} \quad g = a^x$$

$$f'(x) = \frac{1}{a^{\log_a x} \log a} = \frac{1}{x \log a} \quad \left(\begin{array}{l} a = e \\ \frac{1}{x} \end{array} \right)$$

Esempi: 1) $f(x) = \arcsin x$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2) $f(x) = \arccos x$

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3) $f(x) = \arctan x$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

4) $f(x) = a^{\sin x}$

5) $f(x) = \cos\left(\frac{x+1}{x^3+2}\right)$

6) $f(x) = \frac{\sin x + e^{\frac{1}{x}}}{x^2 \cos x} + \log x$

$$4) f(x) = a^{\sin x}$$

$$f_2(x) = \sin x$$

$$f_1(x) = a^x$$

$$f_1'(x) = \underline{a^x \log a}$$

$$f(x) = (f_2 \circ f_1)$$

$$f'(x) = \underline{f_2'(f_1(x))} f_1'(x) =$$

$$= a^{\sin x} \log a \cdot \cos x$$

$$5) f(x) = \cos \left(\frac{x+1}{x^3+2} \right)$$

$$f_1(x) = \frac{x+1}{x^3+2}$$

$$f_2(x) = \cos x$$

$$f = f_2 \circ f_1$$

$$f'(x) = \underline{f_2'(f_1(x))} f_1'(x)$$

$$= \left[-\sin \left(\frac{x+1}{x^3+2} \right) \right] \left[\frac{1(x^3+2) - (x+1)(3x^2)}{(x^3+2)^2} \right]$$

$$= - \left[\sin \left(\frac{x+1}{x^3+2} \right) \right] \left[\frac{-2x^3 - 3x^2 + 2}{(x^3+2)^2} \right]$$

$$= \left[\sin \left(\frac{x+1}{x^3+2} \right) \right] \left[\frac{2x^3 + 3x^2 - 2}{(x^3+2)^2} \right]$$

$$6) f(x) = \frac{\sin x + e^{\frac{1}{x}}}{x^2 \cos x} + \log x$$

$$f'(x) = \frac{(\cos x - e^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2}) [x^2 \cos x] - (\sin x + e^{\frac{1}{x}}) [2x \cos x - x^2 \sin x]}{x^4 \cos^2 x}$$

$$+ \frac{1}{x}$$

$$7) f(x) = x^x$$

~~$$f'(x) = x \cdot x^{(x-1)}$$~~ !!! no!!

$$f(x) = e^{x \log x}$$

$$f'(x) = e^{x \log x} \left[\log x + x \frac{1}{x} \right] = e^{x \log x} (\log x + 1)$$

$$8) f(x) = (tg x)^{\left(\frac{x+1}{x}\right)}$$

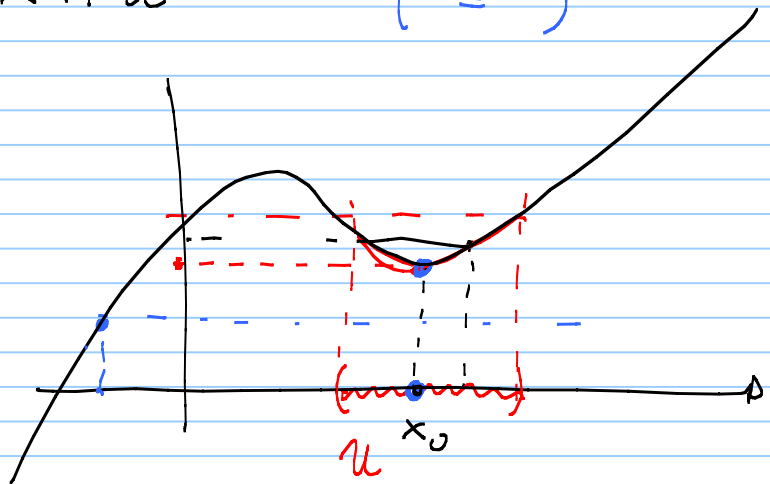
$$= e^{\left(\frac{x+1}{x}\right) \log (tg x)}$$

$$f'(x) = e^{\left(\frac{x+1}{x}\right) \log (tg x)} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{x - (x+1)}{x^2} \log (tg x) + \frac{x+1}{x} \frac{1}{tg x} (1 + tg^2 x) \right]$$

Definizione (massimi/minimi relativi e assoluti)

$f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diremo che $x_0 \in X$ è di minimo (massimo) relativo (o locale) per f se $\exists U$ intorno di x_0 b. c.
 $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in X \cap U \quad (\leq)$



x_0 si dice di minimo (massimo) assoluto per f in X se

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in X \quad (\leq)$$

Osservazione x_0 è di minimo assoluto (massimo)

Allora x_0 è di minimo relativo (massimo)

Teorema 2 (di Fermat)

$f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sia derivabile in x_0 ,
 x_0 interno ad I .

Se x_0 è un punto di minimo relativo (o di massimo relativo) per f , allora

$$f'(x_0) = 0$$

dim: $\frac{x_0 \text{ minimo}}{\forall f \text{ derivabile in } x_0 \Leftrightarrow}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$\frac{U}{x_0 \in I}$$

$$U \subseteq I$$

$$x \in U \subset I \quad x > x_0$$

$$x - x_0 > 0$$

x_0 è minimo

$$\forall x \in U$$

$$f(x) \geq f(x_0)$$

$$f(x) - f(x_0) \geq 0$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \forall x \in U, x > x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geq 0$$

$$x < x_0 \quad x - x_0 < 0$$

x_0 è minimo

$\Rightarrow$

$$\forall x \in U \quad f(x) - f(x_0) \geq 0$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \forall x \in U, x < x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \leq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$\Rightarrow$

$= 0 !!$

Definizione Sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ x_0 interno ad I
 f sia derivabile in x_0 . Diremo che x_0 è
un punto critico per f se $f'(x_0) = 0$

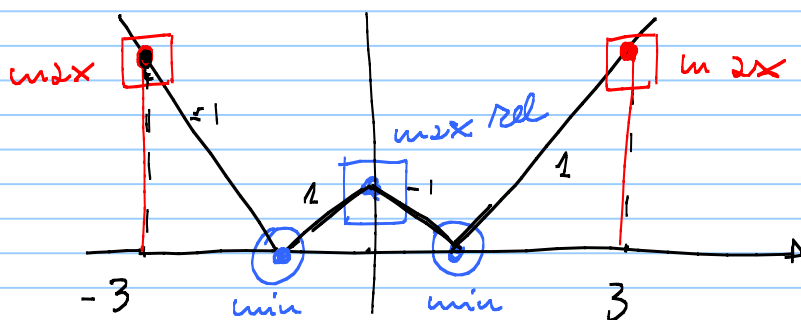
Teorema (Condizioni necessarie del 1° ordine
per max/min relativi)

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ x_0 sia di minimo (o di massimo)
relativo per f . (I intervallo)

Allora vale una delle seguenti

- 1) x_0 è un punto critico per f
- 2) x_0 non è interno a I
- 3) f non è derivabile in x_0

Esempio $f(x) = |x| - 1$ in $[-3, 3]$



non è derivabile in $-1, 0, 1$

Esercizi:

$$1) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \leq 1 \\ (x-1) \sin\left(\frac{1}{x-1}\right) & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$2) \quad f(x) = \begin{cases} ax^9 + b & \text{se } x \leq 0 \\ e^{\frac{3x^2}{x^3+x}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

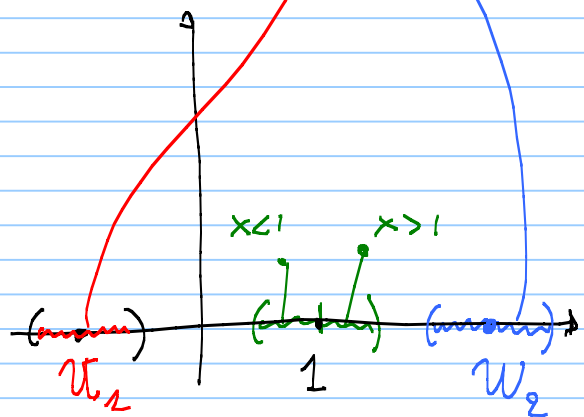
$$1) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \leq 1 \\ (x-1) \sin\left(\frac{1}{x-1}\right) & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

- $x < 1$

f continua in $x < 1$

f è derivabile in $x < 1$

$$f'(x) = 2x$$



- $x > 1$ f è continua e derivabile

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin\left(\frac{1}{x-1}\right) + (x-1) \cos\left(\frac{1}{x-1}\right) \left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right) \\ &= \sin\left(\frac{1}{x-1}\right) - \frac{1}{(x-1)} \cos\left(\frac{1}{x-1}\right) \end{aligned}$$

- $x = 1$

continuità:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \underbrace{(x-1)}_{\text{limite 1}} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)}_{\text{limite 2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 1) = 0 = f(1)$$

f e continuu

derivabilità:

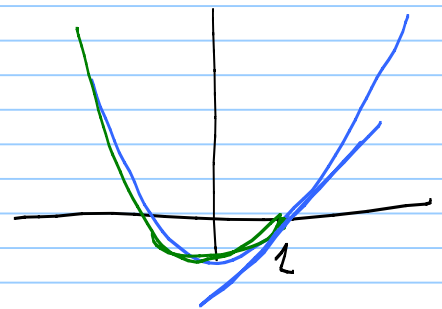
$$- \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0)$$

se se limite esiste!

$$x_0 = 1$$

$$f(x) = x^2 - 1$$

$$f'_-(1) = 2x|_{x=1} = 2$$



$$- \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cancel{(x-1)} \sin\left(\frac{1}{x-1}\right) - 0}{\cancel{(x-1)}} = \cancel{\quad}$$

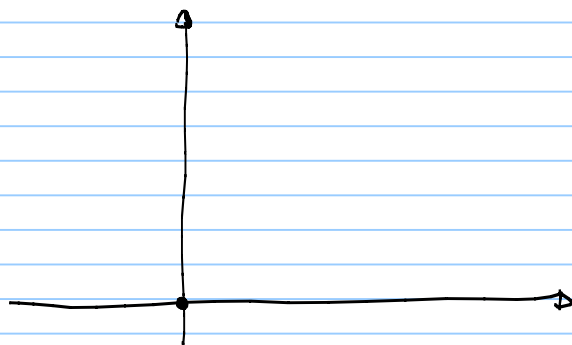
$\cancel{\nexists} f'_+(1) \Rightarrow f$ non e derivabile in $x = 1$

$$2) \quad f(x) = \begin{cases} ax^3 + b & \text{se } x \leq 0 \\ e^{\frac{3x^2}{x^3+x}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

- $x < 0$

f è continua e derivabile

$$f'(x) = 2ax$$



- $x > 0$ f è continua e derivabile

$$f'(x) = e^{\frac{3x^2}{x^3+x}} \left(\frac{6x(x^3+x) - 3x^2(3x^2+1)}{(x^3+x)^2} \right)$$

- $x = 0$

continuità: $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{3x^2}{x^3+x}} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} ax^3 + b = b$$

f è continua in tutto $\mathbb{R}$ se $b = 1$

derivabilità: ($b = 1$)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{3x^2}{x^3+x}} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{3x^2}{x^3+x}} - 1}{\frac{3x^2}{x^3+x}} \cdot \frac{3x^2}{x^2+1} \cdot \frac{1}{x} = 3$$

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$f(x) = ax^2 + 1$$

$$f'_-(0) = 2ax \Big|_{x=0} = 0 \neq f'_+(0)$$

f non è derivabile per nessun valore di a

$$3) \quad f(x) = \begin{cases} bx + c & \text{se } x < \pi \\ \sin(ax) & \text{se } x \geq \pi, \quad a \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- $x < \pi$ f è continua e derivabile
 - $x > \pi$ f " " " "

- $x = \pi$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \sin(ax) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} bx + c = b\pi + c$$

$$f \text{ è continua} \Leftrightarrow b\pi + c = 0$$

continuità

- derivabilità

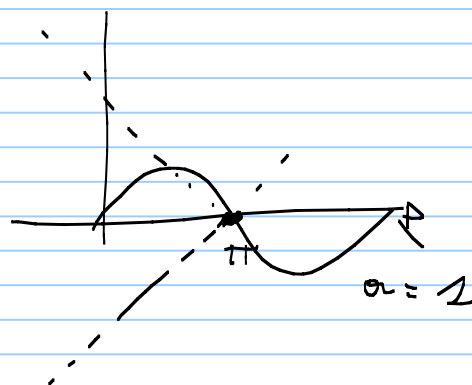
$$f(x) = bx + c$$

$$f'_-(\pi) = b$$

$$f'_+(\pi) = a \cos(a\pi)$$

$$\boxed{b = a \cos(a\pi)}$$

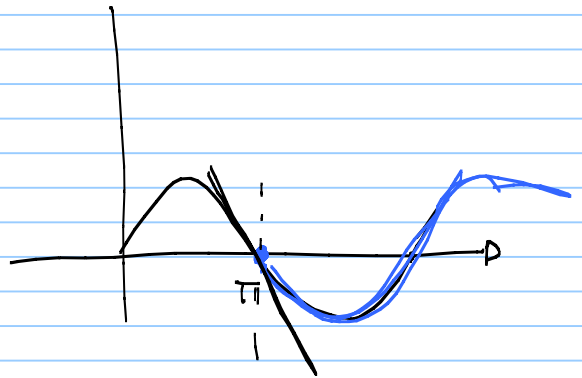
$$\boxed{b\pi + c = 0}$$



$$\begin{array}{lll}
 a \text{ pari} & b = a & c = -a\pi \\
 a \text{ dispari} & b = -a & c = a\pi
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{lll} a \text{ pari} \\ a \text{ dispari} \end{array}} \right\} \text{derivabilit\`e}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin ax & \text{se } x \geq \pi \end{cases}$$

$$a \cos(ax)$$



Teorema (di Rolle)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ f continua in $[a, b]$

f derivabile in (a, b) , $f(a) = f(b)$

Allora

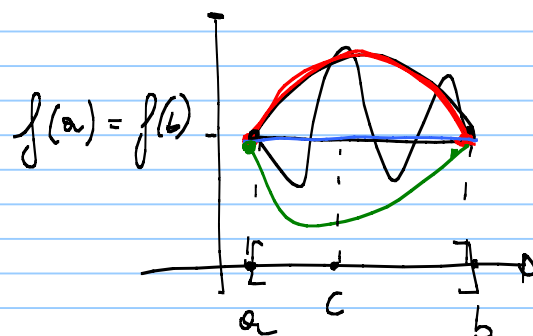
$\exists c \in (a, b)$ t.c. $f'(c) = 0$

dim.

1) caso

$$f(x) = f(a) \quad \forall x \in [a, b]$$

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$$



2) caso f non è costante

$\Rightarrow$ teo di Weierstrass $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$

$$\text{t.c.} \quad \begin{array}{ccc} f(x_1) & \leq f(x) & \leq f(x_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \min & & \max \end{array} \quad \forall x \in [a, b]$$

Se f non è costante

$$\text{opp. } x_1 \in (a, b) \quad \text{opp. } x_2 \in (a, b)$$

$$\text{se } x_1 \in (a, b) \Rightarrow (\text{Fermat}) \quad f'(x_1) = 0$$

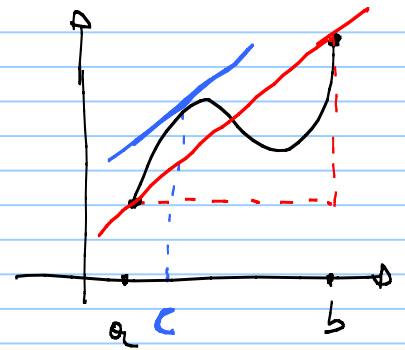
$$\text{se } x_2 \in (a, b) \Rightarrow (\text{Fermat}) \quad f'(x_2) = 0$$

Teorema (di Lagrange / del valor medio)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$,
derivabile in (a, b) .

Allora $\exists c \in (a, b)$ t.c.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Osservazione

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

dim: $g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$

f è continua in $[a, b]$
 f è derivabile in (a, b)

$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ è continua in $[a, b]$
 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ è derivabile in (a, b)

g è continua in $[a, b]$
 g è derivabile in (a, b)

$$g(a) = f(a)$$

$$g(b) = \cancel{f(b)} - \frac{(\cancel{f(b)} - f(a))}{(b - a)}(b - a) = f(a)$$

applicando Rolle a g $\exists c \in (a, b)$ t.c.

$$g'(c) = 0$$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$g'(c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Teorema (di Cauchy)

$f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f, g continue in $[a, b]$
 derivabili in (a, b) , $g(a) \neq g(b)$ e $g' \neq 0$

Allora

$\exists c \in (a, b)$ t.c.

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

dim:

$$h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$$

h è continua in $[a, b]$

h è derivabile in (a, b)

$$h(a) = \underbrace{f(a)g(b)} - \cancel{f(a)g(a)} - \underbrace{g(a)f(b)} + \cancel{g(a)f(a)}$$

$$h(b) = \cancel{f(b)g(b)} - \underbrace{f(b)g(a)} - \cancel{g(b)f(b)} + \underbrace{g(b)f(a)}$$

$$h(a) = h(b)$$

Per Rolle $\exists c \in (a, b) : h'(c) = 0$

$$h'(x) = f'(x)(g(b) - g(a)) - g'(x)(f(b) - f(a))$$

$$h'(c) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$f'(c)(g(b) - g(a)) - g'(c)(f(b) - f(a)) = 0$$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

□

Derivate prime e monotonia

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x_1, x_2 \in I$$

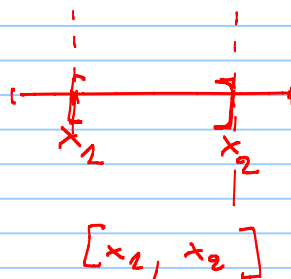
$$x_1 < x_2$$

derivabile in I

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) (x_2 - x_1)$$

Lagrange

$$c \in (x_1, x_2)$$



Se $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$ intervallo

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(c)}_{>0} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} > 0$$

$$f(x_2) > f(x_1)$$

Se $f'(x) > 0$ in $I \Rightarrow f$ è strettamente crescente in I

Se $f'(x) < 0 \quad \forall x \in I$ intervallo

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(c)}_{<0} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} < 0$$

$$f(x_2) < f(x_1)$$

Se $f'(x) < 0$ in $I \Rightarrow f$ è strettamente decrescente in I

D'altra parte
 se I intervallo e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ è crescente

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \left[\begin{array}{l} 1) \text{ se } x > x_0 \quad D > 0 \\ f(x) \geq f(x_0) \quad N > 0 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2) \text{ se } x < x_0 \quad D < 0 \\ f(x) \leq f(x_0) \quad N \leq 0 \end{array} \right.$$

Se f sia derivabile in x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$\underbrace{\quad}_{\forall \quad 0}$

$\forall \quad 0$

teo

con fronto

$$\Rightarrow f'(x_0) \geq 0$$

Analogamente

$f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ decrescente e derivabile

$$\text{Allora } f'(x_0) \leq 0 \quad \forall x_0 \in I$$

Riassumendo:

Teorema $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo
 f derivabile in I . Si ha

$$f \text{ è crescente in } I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$$

$$f \text{ è decrescente in } I \Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$$

Se $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ è strettamente cresc. in I

Se $f'(x) < 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ è strettamente decr. in I

Esempio $f(x) = x^3$

è strettamente crescente $x_2 > x_1$

$$(x_2^3 - x_1^3) = \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \underbrace{(x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2)}_{\Delta < 0} > 0$$

$$f'(x) = 3x^2 \begin{cases} > 0 & \text{se } x \neq 0 \\ = 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Osservazione: $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile
è strett. crescente sse $f'(x) > 0$ per
quasi ogni $x \in I$

"sono pochi" gli x t.r. $f'(x) = 0$. Esempi: sono
in numero finito; sono un insieme numerabile

Teorema 2 $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Se f è strettamente monotona $\Rightarrow f$ è invertibile

Inoltre

Se f è continua allora è invertibile se e
soltanto se è strettamente monotona.

Esempio $f(x) = x^3 - 1$

$$x^3 - 1 = y$$

$$x^3 = y + 1$$

$$x = \sqrt[3]{y+1} = f^{-1}(y) \quad (x \text{ è unico, } \forall y \in \mathbb{R})$$

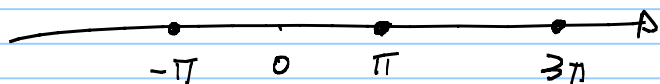
Esercizio 1) Dato $f(x) = x + \sin x$

1) dimostrare che f è invertibile

2) calcolare $(f^{-1})'(\frac{3}{2}\pi - 1)$

$$1) f'(x) = 1 + \cos x > 0 \\ \forall x \neq (2k+1)\pi$$

$$\left| \begin{array}{ll} \cos x \geq -1 & \forall x \\ \cos x = -1 & \text{se } x = (2k+1)\pi \end{array} \right.$$



$\Rightarrow f$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ è invertibile

2) calcolare $(f^{-1})'(\frac{3}{2}\pi - 1)$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{dove} \quad y_0 = f(x_0)$$

$$y_0 = \frac{3}{2}\pi - 1$$

$$\text{determinare } x_0 : f(x_0) = y_0$$

$$x + \sin x = \frac{3}{2}\pi - 1$$

$$x_0 = \frac{3}{2}\pi$$

$$f'(x) = 1 + \cos x$$

$$(f^{-1})'(\frac{3}{2}\pi - 1) = \frac{1}{1 + \cos(\frac{3}{2}\pi)} = 1$$

Asintoti

Definizione

- La retta di equazione $y = y_0$ è un asintoto orizzontale per f ($x \rightarrow +\infty$ o $x \rightarrow -\infty$) se
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0 \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$$
- La retta di equazione $x = x_0$ è un asintoto verticale per f se
$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$$
- La retta di equazione $y = mx + q$ ($m \neq 0$) è un asintoto obliquo $x \rightarrow +\infty$ ($-\infty$) se
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx = q$$

$$(-\infty) \quad (-\infty)$$

Studio di funzione

$$1) f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{2x - 1}$$

(simile a un pezzo
del 3/01/12)

$$1) f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{2x - 1} \quad \left(\text{simile 2 un pezzo} \right. \\ \left. \text{del 9/01/12} \right)$$

$$\begin{aligned} 1) \text{ determinare } \text{dom} f &= \{x \in \mathbb{R} : 2x - 1 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{1}{2}\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} \\ &= (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty) \end{aligned}$$

2) determinare l'insieme A dei punti di accumulazione del dominio.
 $\forall x_0 \in A$ calcolare $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

$$A = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad \forall x \in A$$

- f è continua in $\text{dom} f$

$$\forall x_0 \in \text{dom} f \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$A \setminus \text{dom} f = \{\frac{1}{2}, +\infty, -\infty\}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{2x - 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x + 1}{2x - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{x^2 + x + 1}{2x - 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{x^2 + x + 1}{2x - 1} = -\infty$$

3) Determinare eventuali asintoti

No asintoti orizzontali

$x = \frac{1}{2}$ è un asintoto verticale

asintoti obliqui?

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x(2x - 1)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{(2x - 1)} - \frac{1}{2}x =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2(x^2 + x + 1) - (2x - 1)x}{2(2x - 1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 2}{2(2x - 1)} = \frac{3}{4}$$

$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ è un asintoto obliquo $x \rightarrow +\infty$
e $x \rightarrow -\infty$

4) Determinare l'insieme B dei punti in cui f è derivabile e calcolare $f'(x)$, $\forall x \in B$.

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{2x - 1} \quad B = \text{dom} f$$

$$f'(x) = \frac{(2x + 1)(2x - 1) - 2(x^2 + x + 1)}{(2x - 1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - 3}{(2x - 1)^2}$$

5) Determinare gli intervalli di monotonia della funzione e eventuali punti di massimo e/o minimo relativo e/o assoluto.

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 2x - 3}{(2x - 1)^2}$$

$$\frac{2x^2 - 2x - 3}{(2x - 1)^2} > 0$$

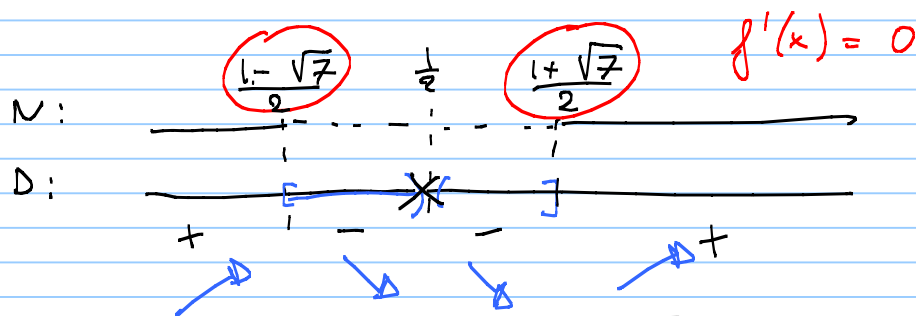
$$\frac{2x^2 - 2x - 3}{(2x - 1)^2} = 0$$

N: $2x^2 - 2x - 3 > 0$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+6}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$$

$$x < \frac{1 - \sqrt{7}}{2} \quad x > \frac{1 + \sqrt{7}}{2}$$

D: $(2x - 1)^2 > 0 \quad \forall x \neq \frac{1}{2}$



$$f'(x) > 0 \quad \text{se } x < \frac{1 - \sqrt{7}}{2} \quad \text{e} \quad \text{se } x > \frac{1 + \sqrt{7}}{2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{se } x = \frac{1 - \sqrt{7}}{2} \quad \text{e} \quad \text{se } x = \frac{1 + \sqrt{7}}{2}$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{se } \frac{1 - \sqrt{7}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{7}}{2} \quad \text{e} \quad x \neq \frac{1}{2}$$

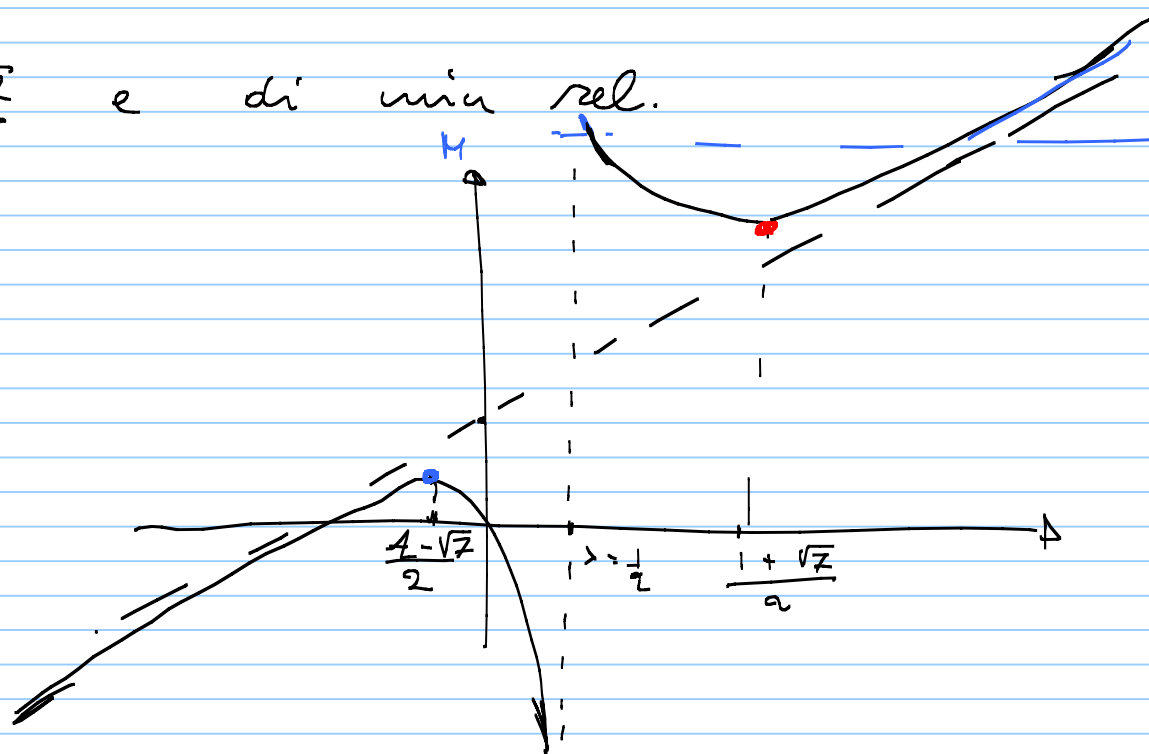
non è un intervallo!

f è crescente in $(-\infty, \frac{1 - \sqrt{7}}{2}]$ e in $[\frac{1 + \sqrt{7}}{2}, +\infty)$

f è decrescente in $\left[\frac{1-\sqrt{7}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
 " " " $\left(\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right]$

$\frac{1-\sqrt{7}}{2}$ è di max rel.

$\frac{1+\sqrt{7}}{2}$ è di min rel.



Non ci sono né max ass. né min ass.