

L'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$

$$\{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

operazioni algebriche: $+$

Proprietà

1) commutativa $\forall m, n \in \mathbb{N} \quad m + n = n + m$

2) associativa $\forall m, n, k \in \mathbb{N} \quad (m + n) + k =$
 $= m + (n + k)$

3) $\exists$ elemento neutro $0 + m = m \quad \forall m \in \mathbb{N}$

Osservazione l'equazione $x + 1 = 0$

non ha soluzioni

• Completamento algebrico di $\mathbb{N}$ rispetto a $+$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$$

$(\mathbb{Z}, +)$ soddisfa

1)

2)

3)

4) esistenza dell'opposto

$$\forall p \in \mathbb{Z} \quad \exists! (-p) : \begin{aligned} p + (-p) &= 0 \\ p - p &= 0 \end{aligned}$$

↪ gruppo commutativo

$(\mathbb{Z}, \cdot)$ Proprietà del prodotto in $\mathbb{Z}$

5) commutativa $\forall p, q \in \mathbb{Z} \quad p \cdot q = q \cdot p$

6) associativa $\forall p, q, r \in \mathbb{Z} \quad (p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r)$

7) $\exists$ l'elemento neutro $1 \cdot p = p \quad \forall p \in \mathbb{Z}$

Osservazione l'equazione $2x = 1$
non ha soluzione in $\mathbb{Z}$

• Completamento algebrico di $\mathbb{Z}$ rispetto
 a •

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, q \neq 0 \right\}$$

$|p|, q$ sono primi tra loro

$$\mathbb{Q} = \left\{ \begin{array}{l} \text{allineamenti decimali finiti} \\ \text{o periodici propri} \end{array} \right\}$$

$$\frac{p}{q} \quad p > 0, q > 0$$

$$a, b_1, b_2, \dots, b_n$$

$$\sigma \quad a, b_1, b_2, \dots, \overline{b_n b_{n+1} \dots b_{n+k}}$$

NON PROPRIO

$$0, \overline{8} = 1$$

$$0, 1\overline{8} = 0,2$$

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ soddisfa

1) }
2) } +
3) }
4) }

5) }
6) } ·
7) }

8) Esistenza dell'opposto ripetuto al .

$$\forall q \in \mathbb{Q} \quad q \neq 0 \quad \exists! (q)^{-1} = \frac{1}{q} \quad \because q(q)^{-1} = \\ = q \cdot \frac{1}{q} = 1$$

reciproco o inverso

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ soddisfa anche

9) proprietà distributiva

$$x(y+z) = xy + xz \quad \forall x, y, z \in \mathbb{Q}$$

• $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ è un corpo (o campo) commutativo

In $\mathbb{Q}$ c'è anche una relazione d'ordine totale " $\leq$ ".

Definizione 1) $x = y \iff x \leq y$ e $y \leq x$

2) $x < y \iff x \leq y$ e $x \neq y$.
strettamente minore

$(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ soddisfa le proprietà
da 1 a 9, inoltre

$$10) \forall x, y, z \in \mathbb{Q} \quad \text{se } x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$$

$$11) \forall x, y, z \in \mathbb{Q} \quad \text{se } x \leq y \text{ e } z \geq 0 \\ \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$$

$$12) \forall x, y \quad \text{se } x > 0 \Rightarrow -x < 0 \\ \text{se } x \geq y \Rightarrow -x \leq -y$$

$$13) \forall x \neq 0, y \neq 0 \quad \text{se } x > 0 \Rightarrow x^{-1} = \frac{1}{x} > 0 \\ \text{se } x \geq y \quad x^{-1} \leq y^{-1}$$

$$14) \forall x, y, z \quad \text{se } x \leq y \text{ e } z < 0 \\ \Rightarrow x \cdot z \geq y \cdot z$$

$$15) \forall x \neq 0 \Rightarrow x \cdot x = x^2 > 0$$

$$16) \text{L'equazione } x^2 + 1 = 0 \text{ non ha soluzioni}$$

Osservazione Le proprietà da 12 a 16
si possono dimostrare usando
le 1 - 11.

Altre proprietà importanti:

17) Proprietà di densità

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, \text{ se } x < y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{Q} \\ x < z < y$$

18) Proprietà di Archimede

$$\forall x > 0, y > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : nx \geq y$$

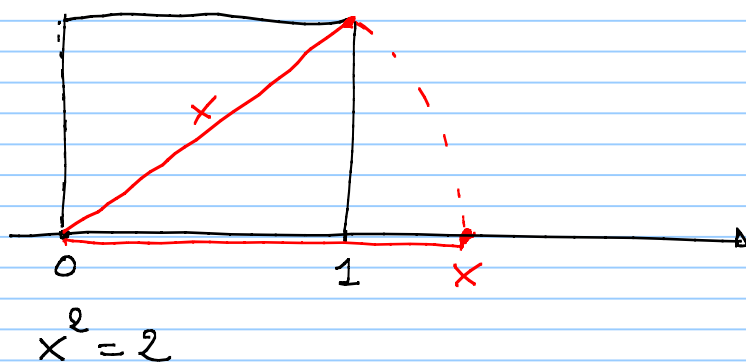
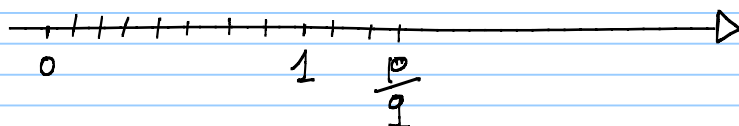
18') Variante della proprietà di Archimede

$$\forall x > 0 \quad \exists n : \frac{1}{n} < x$$

$(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ è un campo ordinato
Archimedeo

Possiamo contare di $\mathbb{Q}$?

come si rappresenta il numero $\frac{p}{q} (>0)$?



Teorema $\{x^2 = 2 \Rightarrow x \notin \mathbb{Q}\}$

dim: per assurdo

$$x \in \mathbb{Q}$$

$$x = \frac{p}{q}$$

$$(x > 0, p > 0)$$

$$p, q \in \mathbb{N}$$

$$p = 2^{a_1} \cdot \bar{p}$$

$$q = 2^{a_2} \cdot \bar{q}$$

$$\underbrace{a_1, a_2}_{\in \mathbb{N}} \geq 0$$

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$$

$$p^2 = 2q^2$$

$$(2^{a_1} \cdot \bar{p})^2 = 2 (2^{a_2} \cdot \bar{q})^2$$

$$2^{2a_1} \cdot (\bar{p})^2 = 2 (2^{2a_2} \cdot (\bar{q})^2)$$

$$2^{2a_1} (\bar{p})^2 = 2^{(2a_2+1)} (\bar{q})^2$$

↓

$$\begin{array}{ccc} 2a_1 & = & 2a_2 + 1 \\ \text{pari} & & \text{dispari} \\ & \neq & \end{array}$$