ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione P. Mannucci, A. Sommariva, a.a. 2014-2015

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

9 luglio 2015

TEMA 1

IAM: es 1, 2, 3, 4. IAM1, v.o.: es 1, 2. IAM2, v.o.: es 3, 4.

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = (\cos x)^2 + 2|\sin x|.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f, calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) (facoltativo) calcolare f'' e determinare gli intervalli di concavità e convessità con eventuali punti di flesso.

(e) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento

(a)
- Dominio. Si vede facilmente che è $\mathbb{R}$.
- Simmetrie. Si vede facilmente che la funzione f è pari perchè somma di funzioni pari.
- Periodicitá. Si ha che $f(x + \pi) = f(x)$, quindi f è periodica con periodo π.
- Segno. La funzione è sempre positiva, poichè somma di funzioni positive.

(b)
- Limiti agli estremi. Non esistono i limiti a $\pm\infty$, per effetto del fatto che la funzione è periodica e non costante.
- Asintoti. Poichè non esistono i limiti a $\pm\infty$, non ci sono asintoti orizzontali. Poichè

$$\lim_{\infty} f(x)/x = \lim_{\infty} \frac{(\cos x)^2 + 2|\sin x|}{x} = 0$$

  se ci fosse un asintoto obliquo sarebbe orizzontale, e quindi non ci sono nemmeno asintoti obliqui.
- Prolungamento per continuitá. La funzione è continua (somma e composizione di funzioni continue) e quindi non necessita prolungarla per continuitá.

(c)
- Continuitá. La funzione è continua (somma e composizione di funzioni continue).

– Derivabilitá. Studiamo la derivabilitá in $\Omega = (0, \pi)$ e poi in $x = 0$. Altrove l'analisi è la stessa vista la periodicitá della funzione. Poichè in Ω si ha che

$$f(x) = (\cos x)^2 + 2|\sin x| = (\cos x)^2 + 2\sin x$$

abbiamo che

$$f'(x) = -2\sin(x)\cos(x) + 2\cos(x) = 2\cos(x)(1 - \sin(x)).$$

Quindi, vista la periodicitá, è derivabile in tutti i punti del tipo $x + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, $x \in (0, \pi)$. Per quanto riguarda $x = 0$ abbiamo, per il teorema di De L'Hopital

$$\begin{aligned}
& \lim_{h\to 0^+} \frac{(\cos(x+h))^2 + 2|\sin(x+h)| - ((\cos x)^2 + 2|\sin x|)}{h} \\
= & \lim_{h\to 0^+} \frac{(\cos(h))^2 + 2\sin(h) - ((\cos 0)^2 + 2\sin 0)}{h} \\
= & \lim_{h\to 0^+} \frac{(\cos(h))^2 + 2\sin(h) - 1}{h} \\
= & \lim_{h\to 0^+} (-2\sin(h)\cos(h)) + 2\cos(h) = 2
\end{aligned} \tag{1}$$

e

$$\begin{aligned}
& \lim_{h\to 0^-} \frac{(\cos(x+h))^2 + 2|\sin(x+h)| - ((\cos x)^2 + 2|\sin x|)}{h} \\
= & \lim_{h\to 0^-} \frac{(\cos(h))^2 - 2\sin(h) - ((\cos 0)^2 + 2\sin 0)}{h} \\
= & \lim_{h\to 0^-} \frac{(\cos(h))^2 - 2\sin(h) - 1}{h} \\
= & \lim_{h\to 0^-} (-2\sin(h)\cos(h)) - 2\cos(h) = -2
\end{aligned} \tag{2}$$

e quindi la funzione f non è derivabile in $x = 0$ e di conseguenza, vista la periodicitá, non è derivabile in tutti i punti del tipo $k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

– Monotonia, massimi e minimi. Studiamo la monotonia in $\Omega = (0, \pi)$. Per gli intervalli $\Omega_k = (k\pi, (k+1)\pi)$ l'analisi è uguale. Da

$$f'(x) = 2\cos(x)(1 - \sin(x))$$

essendo $1 - \sin(x) > 0$ per ogni $x \in \Omega$, deduciamo che il segno di $f'(x)$ è lo stesso di $\cos(x)$. Quindi la funzione è crescente in $(0, \pi/2)$, e decrescente in $(\pi/2, \pi)$. Conseguentemente 0, π sono minimi (si noti che $f(0) = f(\pi)$) e $\pi/2$ è massimo.

(d) – Calcolo f''. Studiamo la derivata seconda in $\Omega = (0, \pi)$. Ricordiamo che non esiste in 0 come pure nei punti $k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ poichè ivi la funzione non è derivabile. Essendo in Ω

$$f'(x) = -2\sin(x)\cos(x) + 2\cos(x)$$

ricaviamo che

$$\begin{aligned}
f''(x) &= -2\cos^2(x) + 2\sin^2(x) - 2\sin(x) \\
&= -2(1 - \sin^2(x)) + 2\sin^2(x) - 2\sin(x) \\
&= 4\sin^2(x) - 2\sin(x) - 2.
\end{aligned} \tag{3}$$

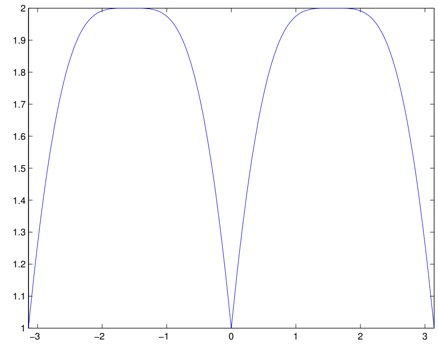

Figura 1: Grafico di f in $(-5,5)$.

- Regioni concavità o convessita. Studiamo il segno di f''. Posto $t=\sin(x)$, $4\sin^2(x)-2\sin(x)-2>0$ se e solo se $4t^2-2t-2>0$ ovvero $2t^2-t-1>0$. Poichè $2t^2-t-1=0$ per $t=-1/2$ e $t=1$, $2t^2-t-1>0$ per $t\in(-\infty,-1/2)\cup(1,+\infty)$, $2t^2-t-1\le 0$ altrove. Essendo $t=\sin(x)$, $x\in(0,\pi)$, risulta $t=\sin(x)\in(0,1)$ per $x\in(0,\pi)$, la derivata seconda è sempre negativa e quindi la funzione concava.

(e) Dai vari punti discussi, otteniamo il grafico in figura (da prolungare per periodicità in $\mathbb{R}$).

Esercizio 2 (8 punti)
Sia

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x\log(x+1)}{2\sin(x^2)} & x>0\\ ax+b & x\le 0\end{cases}$$

a) Dire per quali valori dei parametri a e b la funzione è continua;
b) dire per quali valori dei parametri a e b la funzione è derivabile; (suggerimento scrivere $f'_+(0)$ attraverso il rapporto incrementale).

Svolgimento

(a) Osserviamo che la funzione $\frac{x\log(x+1)}{2\sin(x^2)}$ non è definita nei punti $x=k\pi$ con $k\in\mathbb{N}\backslash 0$ e ivi nemmeno estendibile per continuità. Studiamo il caso particolare $x=0$. Altrove la funzione risulta banalmente continua.

Osserviamo che da $\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{x}=1$ e $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{x\log(x+1)}{2\sin(x^2)} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\log(x+1)}{2x\sin(x^2)}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{\sin(x^2)}\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(x+1)}{2x}\\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(x+1)}{x}=\frac{1}{2}. \qquad (4)\end{aligned}$$

e

$$\lim_{x\to 0^-} ax+b = b \qquad (5)$$

affinchè la funzione f sia continua in 0,

$$b = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{2},$$

necessita cioè che sia $b = 1/2$.

(b) Studiamo la derivata in 0, nel caso $b = 1/2$ (per altri b non ha senso, perchè la funzione non è nemmeno continua). Non è difficile vedere che la derivata prima, da sinistra, in 0, vale a. Per quanto riguarda la destra in $x = 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\left(\frac{(x+h)\log((x+h)+1)}{2\sin((x+h)^2)}\right) - (ax+b)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{h\log(h+1)}{2\sin(h^2)} - b}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{h\log(h+1)}{2\sin(h^2)} - \frac{1}{2}}{h} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left(\frac{h\log(h+1)-\sin(h^2)}{\sin(h^2)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0^+} \frac{h^2}{h^3}\left(\frac{h\log(h+1)-\sin(h^2)}{\sin(h^2)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0^+} \frac{h\log(h+1)-\sin(h^2)}{h^3}
\end{aligned}$$

Poichè

$$\sin(h) = h - h^3/3 + o(h^3)$$

e

$$\log(h+1) = h - h^2/2 + o(h^2)$$

il numeratore è tale che

$$h\log(h+1) - \sin(h^2) \sim h(h - h^2/2 + o(h^2)) - (h^2 - h^6/3 + o(h^6)) = -h^3/2 + o(h^3)$$

deduciamo che

$$\frac{1}{2}\lim_{h\to 0^+} \frac{h\log(h+1)-\sin(h^2)}{h^3} = \frac{1}{2}\lim_{h\to 0^+} \frac{-h^3/2 + o(h^3)}{h^3} = -\frac{1}{4} \tag{6}$$

Quindi affinchè la funzione sia derivabile in 0 necessita siano $a = -\frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$.

Esercizio 3 (8 punti)
(a) Calcolare tutte le primitive di $f(x) = 3x\, e^{-x^2}$.
(b) Dopo aver calcolato

$$\int_0^{+\infty} 3x\, e^{-x^2} dx,$$

dire se l'integrale converge o no.

Svolgimento

(a) Per sostituzione. Posto $t = x^2$, $dt = 2x\,dx$ e quindi, per C arbitraria,

$$\begin{aligned} I &= \int 3x\, e^{-x^2} dx = \frac{3}{2}\int e^{-t} dt \\ &= -\frac{3}{2}e^{-t} + C = -\frac{3}{2}e^{-x^2} + C. \end{aligned} \tag{7}$$

(b) Ricordiamo che dal teorema fondamentale del calcolo, e dalla definizione di integrale improprio

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} 3x\, e^{-x^2} dx &= \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{3}{2}e^{-x^2} - \left(-\frac{3}{2}e^{-0^2}\right)\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} -\frac{3}{2}e^{-x^2} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned} \tag{8}$$

Esercizio 4 (8 punti)

a) Trovare i punti critici della funzione $f(x,y) = \frac{(x+y)^3}{3}$ e disegnarli sul piano cartesiano. (Non è richiesto lo studio della natura dei punti critici)
b) Trovare i massimi e minimi assoluti della funzione $f(x,y)$ soggetta al vincolo $g(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy + y^2 - 2 = 0$.

(a) Poichè il gradiente di f è

$$\mathrm{grad} f(x,y) = ((x+y)^2, (x+y)^2)$$

abbiamo che si annulla nei punti (x,y) per cui $x+y=0$, cioè $y=-x$ (bisettrice secondo e quarto quadrante). I punti si tale retta sono tutti e soli i punti critici.

Seppure non richiesto, si vede facilmente che la funzione si annulla nel generico punto critico e che in qualsiasi intorno esistono valori della funzione che sono negativi ed altri che sono positivi (si considerino rette $x+y+c=0$, con $c \in \mathbb{R}$ arbitrariamente piccolo). Quindi sono tutti punti di sella.

(b) Usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Da

$$f(x,y) = \frac{(x+y)^3}{3}$$

$$g(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy + y^2 - 2$$

definiamo

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = \frac{(x+y)^3}{3} + \lambda\left(\frac{x^2}{2} + xy + y^2 - 2\right).$$

I punti critici vincolati (x,y) verificano, per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial F(x,y,\lambda)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F(x,y,\lambda)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

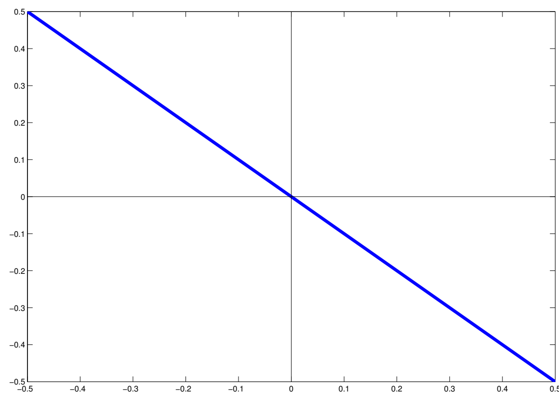

Figura 2: Grafico dei punti estremali (in blue).

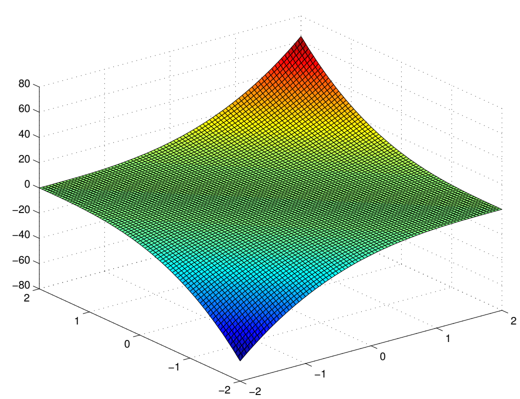

Figura 3: Grafico della funzione f nel quadrato $[-2, 2] \times [-2, 2]$.

e quindi

$$\begin{cases} (x+y)^2 + \lambda(x+y) = 0 \\ (x+y)^2 + \lambda(x+2y) = 0 \\ \frac{x^2}{2} + xy + y^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} (x+y)(x+y+\lambda) = 0 \\ (x+y)^2 + \lambda(x+2y) = 0 \\ \frac{x^2}{2} + xy + y^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione o è $x + y = 0$ oppure $x + y + \lambda = 0$.

(i) Se $x + y = 0$, allora $x = -y$. La terza equazione diventa così

$$\frac{y^2}{2} - y^2 + y^2 - 2 = 0$$

da cui

$$y^2 = 4$$

cioè $y = \pm 2$. Quindi $P_1 = (-2, 2)$, $P_2 = (2, -2)$ sono punti candidati a essere di massimo o minimo assoluto.

(ii) Se $x + y + \lambda = 0$, necessariamente $x + y = -\lambda$ o equivalentemente $y = -x - \lambda$. Osserviamo dalla seconda equazione che

$$\begin{aligned} 0 &= (x+y)^2 + \lambda(x+2y) = \lambda^2 + \lambda(x + 2(-x-\lambda)) \\ &= \lambda(\lambda - x - 2\lambda) = \lambda(-x-\lambda) = -\lambda(x+\lambda) \end{aligned} \tag{9}$$

e quindi o $\lambda = 0$ oppure $x = -\lambda$. Se $\lambda = 0$ si vede subito che per verificare la prima equazione dev'essere $x+y = 0$ e quindi ricadiamo nel caso discusso in [(i)]. Altrimenti, se $x = -\lambda$, da $x + y + \lambda = 0$ ricaviamo $y = 0$. La terza equazione diventa così

$$0 = \frac{x^2}{2} + xy + y^2 - 2 = \frac{x^2}{2} - 2$$

cioè $x = \pm\sqrt{2}$. Quindi $P_3 = (-\sqrt{2}, 0)$, $P_4 = (\sqrt{2}, 0)$ sono punti candidati a essere di massimo o minimo assoluto.

Essendo

$$\begin{aligned} f(-2,2) &= 0 \\ f(2,-2) &= 0 \\ f(-\sqrt{2},0) &= -2^{3/2}/3 \\ f(\sqrt{2},0) &= 2^{3/2}/3 \end{aligned} \tag{10}$$

deduciamo che $P_3 = (-\sqrt{2}, 0)$ è un minimo globale vincolato a $g(x, y) = 0$ e $P_4 = (-\sqrt{2}, 0)$ è un massimo globale vincolato a $g(x, y) = 0$.