ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione P. Mannucci, A. Sommariva, a.a. 2014-2015

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

20 febbraio 2015

TEMA 1

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = |x+2|e^{3x}.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f;
(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;
(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f, calcolare i limiti di f' se significativi;
(d) calcolare la derivata seconda di f e determinare gli intervalli di concavità e convessità con eventuali punti di flesso.
(e) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento

(a) La funzione f è il prodotto di due funzioni continue e non negative su $\mathbb{R}$ cioè $g_1(x) = |x+2|$, $g_2(x) = e^{3x}$ e quindi f è continua e non negativa. Siccome $g_1(-2) = 0$, $g_1(x) > 0$ in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $g_2(x) > 0$ deduciamo che l'unico punto in cui $f(x) = 0$ è $x = -2$. La funzione non presenta simmetrie o periodicità . Notiamo che

$$f(x) = \begin{cases} \left(x+2\right)e^{3x} & x \geq -2 \\ -\left(x+2\right)e^{3x} & x < -2 \end{cases}$$

(b) Gli estremi del dominio sono $\pm\infty$.

- Da

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} |x+2|e^{3x} &= \lim_{x\to-\infty} -\left(x+2\right)e^{3x} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{x+2}{e^{-3x}} \\ &= \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{-3e^{-3x}} = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

  deduciamo che $y = 0$ è un asintoto orizzontale a $-\infty$

- Da

$$\lim_{x\to+\infty} |x+2|e^{3x} = +\infty,$$

  deduciamo che non vi è un asintoto orizzontale a $+\infty$.

Osserviamo inoltre che

- essendoci un asintoto orizzontale a $-\infty$, non ha senso studiare la presenza di un asintoto obliquo;
- da

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+2)e^{3x}}{x} = +\infty$$

  deduciamo che f non possiede un asintoto obliquo o $+\infty$.

La funzione è continua in $\mathbb{R}$ e quindi non ha senso porsi il problema se è prolungabile per continuità in alcuni punti.

(c) La funzione f è derivabile ovunque eccetto in $x = -2$. Osserviamo che

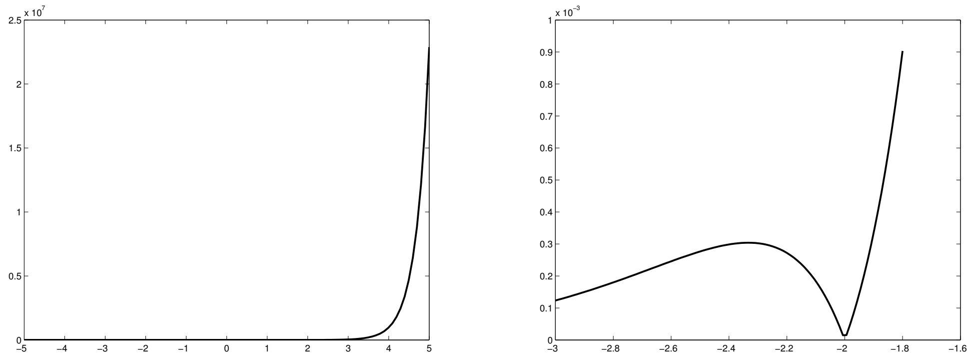

Figura 1: Grafico di f in $[-5,+5]$ e in $[-3,-1.8]$.

- se $x > -2$ allora $f(x) = (x+2)e^{3x}$ e quindi

$$f'(x) = e^{3x} + 3(x+2)e^{3x} = (3x+7)e^{3x};$$

di conseguenza, da $3x+7>0$ per $x \in (-2,+\infty)$ deduciamo che la funzione è monotona crescente in $(-2,+\infty)$;

- se $x < -2$ allora $f(x) = -(x+2)e^{3x}$ e quindi

$$f'(x) = -e^{3x} - 3(x+2)e^{3x} = -(3x+7)e^{3x};$$

di conseguenza essendo $-(3x+7) > 0$ in $(-\infty,-(7/3))$, $-(3x+7) \leq 0$ in $(-(7/3),-2)$, $e^{3x} > 0$ in $(-\infty,-2)$, la funzione è monotona crescente in $(-\infty,-(7/3))$, monotona decrescente in $(-(7/3),-2)$ e ha un minimo in $x_{\text{min}} = -7/3$.

Osserviamo che

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = -\lim_{x\to-\infty} \frac{(3x+7)}{e^{-3x}} = -\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{-3e^{-3x}} = \lim_{x\to-\infty} e^{3x} = 0$$

mentre

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$$

(d) La derivata seconda di f è facilmente

$$f^{(2)}(x) = \begin{cases} 3(3x+8)e^{3x}, & x > -2 \\ -3(3x+8)e^{3x}, & x < -2. \end{cases}$$

Da questo abbiamo facilmente che

- la funzione è convessa in $(-2,-\infty)$, in quanto $f^{(2)}(x) > 0$ per $x \in (-2,-\infty)$;
- la funzione è concava in $(-8/3,-2)$, in quanto $f^{(2)}(x) < 0$ per $x \in (-8/3,-2)$;
- la funzione è convessa in $(-\infty,-8/3)$, in quanto $f^{(2)}(x) \geq 0$ per $x \in (-\infty,-8/3)$;
- la funzione ha un flesso in $x_1 = -8/3$ e . $x_1 = -2$.

(e) La funzione ha il grafico in figura.

Esercizio 2 (8 punti)
Calcolare, al variare del parametro reale $a > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{10} - 3\sin x + 2e^{ax}}{5^x + e^{3x} - (\log x)^5}.$$

FACOLTATIVO: calcolare il limite anche per $a \leq 0$.

Svolgimento

- Analizziamo il numeratore. Sappiamo che, in virtù della maggior *crescita* dell'esponenziale rispetto alle altre funzioni, il numeratore va come $2e^{ax}$. Lo verifichiamo.
  - Da
  $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{10}}{2e^{ax}}=(1/2)\lim_{x\to+\infty}e^{10\log(x)-ax}$$
  e
  $$\lim_{x\to+\infty}10\log(x)-ax=\lim_{x\to+\infty}x(\frac{\log(x)}{x}-a)=-\infty \tag{2}$$
  deduciamo che
  $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{10}}{2e^{ax}}=0.$$
  - Essendo $\sin(x)$ limitata, poichè $1/(2e^{ax})\to 0$ per $x\to+\infty$, abbiamo che
  $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(x)}{2e^{ax}}=0.$$

  Quindi a numeratore, il termine dominante è , indipendentemente da a, $2e^{ax}$.
- Analizziamo il denominatore. A priori, vista la bassa crescita del logaritmo, pensiamo che il termine dominante possa essere uno tra 5^x e e^{3x}. Facciamo le necessarie verifiche.
  - Visto che $\log(5)\approx 1.6094<3$,
  $$\lim_{x\to+\infty}\frac{5^x}{e^{3x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{(\log(5))x-3x}=\lim_{x\to+\infty}e^{(\log(5)-3)x}=0,$$
  ricaviamo che il termine e^{3x} *domina* su 5^x;
  - Visto che, similmente a quanto visto prima in (2), $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5}{e^{3x}}=0$ e $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x}=0$ ricaviamo che
  $$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log x)^5}{e^{3x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log x)^5}{x^5}\frac{x^5}{e^{3x}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\log x}{x}\right)^5\frac{x^5}{e^{3x}}=0.$$

  Quindi a denumeratore, il termine dominante è e^{3x}.

Così
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{10}-3\sin x+2e^{ax}}{5^x+e^{3x}-(\log x)^5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{ax}}{e^{3x}}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{ax}}{e^{3x}}.$$
Quindi se $a<3$ l'integrale vale 0, se $a=3$ allora vale 2, altrimenti, per $a\in(3,+\infty)$, vale $+\infty$.

FACOLTATIVO. Per quanto riguarda la parte facoltativa, basta notare che in questo caso il numeratore va sempre come x^{10}. Quindi il limite è equivalente a
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{10}}{e^{3x}}$$
che con una tecnica simile a quella usata in (2) vale 0.

Esercizio 3 (8 punti)
a) Calcolare una primitiva di
$$f(x)=x^2\sin(x+1).$$
b) Studiare la convergenza dell'integrale
$$\int_1^{+\infty}\frac{x^2\sin(x+1)+x^3}{x^5+1}\,dx.$$

Svolgimento

(a) Integriamo per parti. Da $\int \sin(x+1)dx = -\cos(x+1)$, $Dx^2 = 2x$, ricaviamo

$$\begin{aligned}\int x^2\,\sin(x+1)dx &= -x^2\,\cos(x+1) - \int (2x)\,\cos(x+1)dx \\ &= -x^2\,\cos(x+1) - 2\int x\,(-\cos(x+1))dx = -x^2\,\cos(x+1) + 2\int x\,(\cos(x+1))dx\end{aligned}$$

Inoltre da $\int \cos(x+1)dx = \sin(x+1)$, $Dx = 1$, $\int \sin(x+1)dx = -\cos(x+1)$

$$\begin{aligned}\int x\,\cos(x+1)dx &= x\,\sin(x+1) - \int 1\,\sin(x+1)dx \\ &= x\,\sin(x+1) - \int \sin(x+1)dx = x\,\sin(x+1) + \cos(x+1).\end{aligned}$$

Si conclude così che

$$\int x^2\,\sin(x+1)dx = -x^2\,\cos(x+1) + 2\int x\,\cos(x+1)dx = -x^2\,\cos(x+1) + 2\Big(x\,\sin(x+1) + \cos(x+1)\Big)$$

(b) Osserviamo che $x^2\sin(x+1)+x^3 = x^2(\sin(x+1)+x)$ e che per $x \geq 1$ abbiamo che $0 < \sin(x+1)+x < 1+x$. Così

$$0 < \frac{x^2\sin(x+1)+x^3}{x^5+1} < \frac{x^2(x+1)}{x^5+1}.$$

e, per confronto, se converge

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2(x+1)}{x^5+1}\,dx.$$

allora converge

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2\sin(x+1)+x^3}{x^5+1}\,dx.$$

Ma

$$\frac{x^2(x+1)}{x^5+1} \sim \frac{x^3}{x^5} = \frac{1}{x^2}$$

e l'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{x^2\sin(x+1)+x^3}{x^5+1}\,dx$ ha lo stesso comportamento di

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$$

che converge.

Quindi converge l'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{x^2\sin(x+1)+x^3}{x^5+1}\,dx$.

Esercizio 4 (8 punti)
a) Trovare i punti critici della funzione $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - x$.
b) Trovare i massimi e minimi assoluti della funzione $f(x,y) = 2x^2+y^2-x$ sull'insieme $A = \{(x,y) : x^2+y^2 = 1\}$.

Svolgimento

- Osserviamo che

$$\nabla f(x,y) = \Big(4x-1, 2y\Big)$$

e quindi, per il teorema di Fermat, il punto critico è $(1/4, 0)$. Inoltre la matrice Hessiana è

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza il punto è un minimo, poichè $(Hf(1/4,0))_{1,1} = 4$ e $\det(Hf(1/4,0)) = 4\cdot 2 - 0\cdot 0 = 8$.

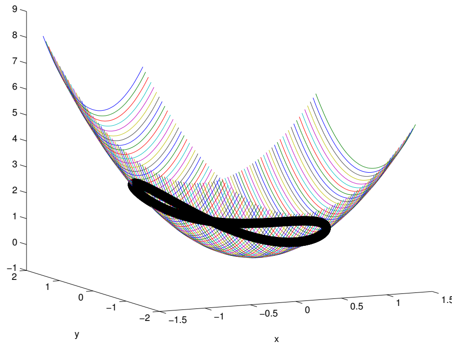

Figura 2: Grafico di f in $[-1.5, +1.5] \times [-1.5, +1.5]$. In nero i valori sul cerchio unitario.

- Osserviamo che se (x, y) verifica $x^2 + y^2 = 1$, necessariamente

  $$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - x = x^2 + (x^2 + y^2) - x = x^2 - x + 1.$$

  Posto $g(x) = x^2 - x + 1$, notiamo che nel dominio richiesto, il cerchio con centro l'origine e raggio 1, abbiamo che $x \in [-1, 1]$ e quindi studiamo i massimi e i minimi della funzione g in $[-1, 1]$. Poichè $g'(x) = 2x - 1$, la funzione g è monotona decrescente per $x \in [-1, 1/2]$ e crescente in $x = [1/2, 1]$. Quindi $x^* = 1/2$ è un minimo e $x = \pm 1$ sono massimi locali. Da $g(-1) = 3$, $g(1) = 1$ deduciamo che $x = 1$ è il massimo globale di g. Così, dovendo essere $x^2 + y^2 = 1$, deduciamo che $(-1, 0)$ è il massimo assoluto, mentre $(1/2, \sqrt{3/4})$ sono minimi assoluti.

La funzione ha il grafico in figura.

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. N.B. Il punteggio degli esercizi si intende <u>esclusi</u> i facoltativi. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver svolto tutte le altri parti e non servono per ottenere la sufficienza.

ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione P. Mannucci, A. Sommariva, a.a. 2014-2015

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

20 febbraio 2015

TEMA 2

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = |x-1|e^{2x}.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f;
(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;
(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f, calcolare i limiti di f' se significativi;
(d) calcolare la derivata seconda di f e determinare gli intervalli di concavità e convessità con eventuali punti di flesso.
(e) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 (8 punti)
Calcolare, al variare del parametro reale $b > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{6^x + e^{3x} - (\log x)^2}{x^7 - 3\cos x + 3e^{bx}}.$$

FACOLTATIVO: calcolare il limite anche per $b \leq 0$.

Esercizio 3 (8 punti)
a) Calcolare una primitiva di

$$f(x) = x^2 \cos(x+1).$$

b) Studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2\cos(x+1) + x^4}{x^5+1}\,dx.$$

Esercizio 4 (8 punti)
a) Trovare i punti critici della funzione $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - y$.
b) Trovare i massimi e minimi assoluti della funzione $f(x, y) = x^2+2y^2-y$ sull'insieme $A = \{(x, y) : x^2+y^2 = 1\}$.

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. N.B. Il punteggio degli esercizi si intende esclusi i facoltativi. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver svolto tutte le altri parti e non servono per ottenere la sufficienza.

ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione P. Mannucci, A. Sommariva, a.a. 2014-2015

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

20 febbraio 2015

TEMA 3

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = |x-2|e^{3x}.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f;
(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;
(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f, calcolare i limiti di f' se significativi;
(d) calcolare la derivata seconda di f e determinare gli intervalli di concavità e convessità con eventuali punti di flesso.
(e) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 (8 punti)
Calcolare, al variare del parametro reale $a > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5 - 2(\log x)^2 + 3e^{ax}}{3^x + e^{3x} - (\sin x)^5}.$$

FACOLTATIVO: calcolare il limite anche per $a \leq 0$.

Esercizio 3 (8 punti)
a) Calcolare una primitiva di

$$f(x) = x^2 \sin(x+3).$$

b) Studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2 \sin(x+3) + x^3}{x^6+1}\, dx.$$

Esercizio 4 (8 punti)
a) Trovare i punti critici della funzione $f(x, y) = 2x^2 - y^2 + x$.
b) Trovare i massimi e minimi assoluti della funzione $f(x, y) = 2x^2-y^2+x$ sull'insieme $A = \{(x, y) : x^2+y^2 = 1\}$.

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. N.B. Il punteggio degli esercizi si intende <u>esclusi</u> i facoltativi. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver svolto tutte le altri parti e non servono per ottenere la sufficienza.

ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione P. Mannucci, A. Sommariva, a.a. 2014-2015

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

20 febbraio 2015

TEMA 4

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = |x + 1|e^{3x}.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f;
(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;
(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f, calcolare i limiti di f' se significativi;
(d) calcolare la derivata seconda di f e determinare gli intervalli di concavità e convessità con eventuali punti di flesso.
(e) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 (8 punti)
Calcolare, al variare del parametro reale $b > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x + e^{3x} - (\log x)^3}{x^7 - 5\cos x + 2e^{bx}}.$$

FACOLTATIVO: calcolare il limite anche per $b \leq 0$.

Esercizio 3 (8 punti)
a) Calcolare una primitiva di

$$f(x) = x^2 \cos(x + 3).$$

b) Studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2 \cos(x + 3) + x^4}{x^5 + 1}\, dx.$$

Esercizio 4 (8 punti)
a) Trovare i punti critici della funzione $f(x, y) = 2y^2 - x^2 + y$.
b) Trovare i massimi e minimi assoluti della funzione $f(x, y) = 2y^2 - x^2 + y$ sull'insieme $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$.

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. N.B. Il punteggio degli esercizi si intende esclusi i facoltativi. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver svolto tutte le altri parti e non servono per ottenere la sufficienza.