ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione P. Mannucci, A. Sommariva, a.a. 2014-2015

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

23 giugno 2015

TEMA 1

Esercizio 1 (9 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = |x-1|e^{2x}.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f, calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

FACOLTATIVO: calcolare f'' e determinare gli intervalli di concavità e convessità con eventuali punti di flesso.

Svolgimento.

(a) Le funzioni $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$, $|x^2-1| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ sono continue e quindi lo è la loro composizione. Così $f : \mathbb{R} \to [1, \exp(\pi/2))$ è continua e quindi il suo dominio è tutto $\mathbb{R}$. Poichè

$$f(x) = e^{\arctan|x^2-1|} = e^{\arctan|(-x)^2-1|} = f(-x)$$

la funzione è pari. Non è periodica ed è sempre positiva, visto che lo è $\exp(x)$.

(b) Visto che il dominio è tutto $\mathbb{R}$ non ci sono limiti agli estremi del dominio da studiare. Inoltre

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{\arctan|x^2-1|} = e^{\pi/2},$$

e quindi la funzione ha asintoti orizzontali a $\pm\infty$. Essendo f continua, non ha senso prolungarla in qualche punto per continuità .

(c) Come già detto la funzione è continua. Da $D(\arctan(x)) = 1/(x^2+1)$, $D(|x^2-1|) = 2x \cdot \text{segno}(x^2-1)$, $De^x = e^x$, e dal teorema della composizione di funzioni derivabili, otteniamo

$$Df(x) = \frac{2x\exp(\arctan(|x^2-1|)) \cdot \text{segno}(x^2-1)}{(x^2-1)^2+1}$$

Da

$$\lim_{x\to1^+} Df(x) = 2, \lim_{x\to1^-} Df(x) = -2, \lim_{x\to-1^-} Df(x) = -2, \lim_{x\to-1^+} Df(x) = +2,$$

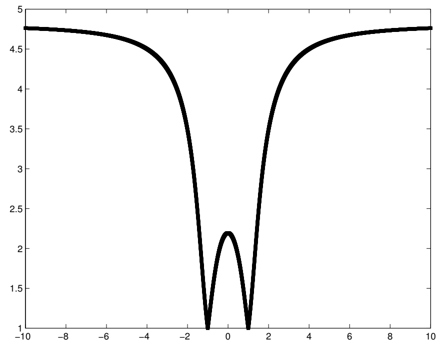

Figura 1: Grafico di f in $(-5, 5)$.

la funzione non è derivabile in -1, $+1$. Il segno di Df è quello di $g(x) = x \cdot \text{segno}(x^2 - 1)$. Così , $Df(x) < 0$ in $(-\infty, -1)$, $Df(x) > 0$ in $(-1, 0)$, $Df(x) < 0$ in $(0, 1)$, $Df(x) > 0$ in $(1, +\infty)$ e quindi monotona strettamente decrescente in $(-\infty, -1)$, $(0, 1)$, monotona strettamente crescente in $(1, +\infty)$, $(-1, 0)$. Vista la continuità di f, ± 1 sono minimi e 0 il massimo.

(d) Assemblando i vari punti, otteniamo il grafico in figura.

Esercizio 2 (8 punti)
Calcolare, al variare del parametro reale $a > 0$,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x + x^2 - x + x^5 \log x}{e^x - 1 - x^a}.$$

Svolgimento.

Ricordando che

$$\sin(x) = x - x^3/6 + o(x^5)$$
$$\exp(x) - 1 = x + x^2/2 + o(x^3)$$

abbiamo

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x + x^2 - x + x^5 \log x}{e^x - 1 - x^a} \\
&= \lim_{x \to 0^+} \frac{x - x^3/6 + o(x^5) + x^2 - x + x^5 \log x}{x + x^2/2 + o(x^3) - 1 - x^a} \\
&= \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{x + x^2/2 + o(x^3) - x^a}
\end{aligned}$$

Visto che se $a < 1$ abbiamo $x + x^2/2 + o(x^3) - x^a \sim x^a$, se $a = 1$ abbiamo $x + x^2/2 + o(x^3) - x^a \sim x^2/2$, se $a > 1$ abbiamo $x + x^2/2 + o(x^3) - x^a \sim x$, si ricava che $L = 0$ per $a \neq 1$, mentre $L = 2$ per $a = 1$.

Esercizio 3 (8 punti)
(a) Calcolare tutte le primitive di

$$f(x) = \frac{3 - \log x}{x\left(\log^2 x - 1\right)}.$$

(b) (**SOLO per IAM2 vecchio ordinamento 2009**) Calcolare

$$\int_{e^2}^{e^3} \frac{3 - \log x}{x\left(\log^2 x - 1\right)} dx.$$

Svolgimento.

(a) Posto $t = \log(x)$, da $dt = (1/x)dx$, abbiamo

$$\begin{aligned}
I(f) &= \int \frac{3 - \log x}{x\left(\log^2 x - 1\right)} dx = \int \frac{3 - t}{t^2 - 1} dt \\
&= \int \frac{2 + (1 - t)}{t^2 - 1} dt = \int \frac{(-2)}{1 - t^2} dt + \int \frac{(-1)}{1 + t} dt \\
&= -\int \left(\frac{1}{1 + t} + \frac{1}{1 - t} \right) dt + \frac{(-1)}{1 + t} dt \\
&= \log(|1 - t|) - 2\log(|1 + t|) + C = \log\left(\frac{|1 - t|}{|1 + t|^2} \right) + C \\
&= \log\left(\frac{|1 - \log(x)|}{|1 + \log(x)|^2} \right) + C
\end{aligned} \tag{1}$$

(b) Dal teorema fondamentale del calcolo

$$\begin{aligned}
\int_{e^2}^{e^3} \frac{3 - \log x}{x\left(\log^2 x - 1\right)} dx &= \log\left(\frac{|1 - \log(e^3)|}{|1 + \log(e^3)|^2} \right) - \log\left(\frac{|1 - \log(e^2)|}{|1 + \log(e^2)|^2} \right) \\
&= \log\left(\frac{|1 - 3|}{|1 + 3|^2} \right) - \log\left(\frac{|1 - 2|}{|1 + 2|^2} \right) = \log(1/8) - \log(1/9) = \log(9/8).
\end{aligned}$$

Esercizio 4 (8 punti)
(a) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{1}^{+\infty} \left(\frac{\sin n + n^2}{e^n + \log n} \right)^n.$$

(b) (**SOLO per IAM2 vecchio ordinamento 2009**) Studiare, al variare di $a > 1$, la convergenza della serie

$$\sum_{1}^{+\infty} \left(\frac{\sin n + n^2 + a^n}{e^n + \log n} \right)^n.$$

Svolgimento.

(a) Osserviamo che

$$\gamma_n = \frac{\sin n + n^2}{e^n + \log n}$$

è definitivamente positiva e quindi posso applicare il criterio della radice. Poichè

$$\lim_n \frac{\sin n + n^2}{e^n + \log n} = \lim_n \frac{n^2}{e^n} = 0$$

deduciamo dal criterio della radice che la serie è convergente.

(b) Osserviamo che

$$\gamma_n = \frac{\sin n + n^2 + a^n}{e^n + \log n}$$

è definitivamente positiva e quindi posso applicare il criterio della radice.

Se $0 \leq a < 1$,

$$\lim_n \frac{\sin n + n^2 + a^n}{e^n + \log n} = \lim_n \frac{n^2}{e^n} = 0$$

e quindi dal criterio della radice deduciamo che la serie è convergente.

Se $a > 1$,

$$L_a := \lim_n \frac{\sin n + n^2 + a^n}{e^n + \log n} = \lim_n \frac{a^n}{e^n}.$$

Se $1 < a < e$, abbiamo

$$L_a = \lim_n (a/e)^n = 0$$

e quindi dal criterio della radice deduciamo che la serie è convergente.

Se $a > e$, abbiamo

$$L_a = \lim_n (a/e)^n = +\infty$$

e quindi dal criterio della radice deduciamo che la serie è divergente.

Se $a = e$ nulla si può dire col criterio della radice. Osserviamo però che per $n \geq 2$

$$\left(\frac{\sin n + n^2 + a^n}{e^n + \log n}\right)^n \geq \left(\frac{-1 + n^2 + a^n}{e^n + n^2 - 1}\right)^n = 1$$

e quindi il termine n-simo non è infinitesimo e quindi la serie diverge.

Tempo: IAM due ore, IAM1 e IAM2 v.o. 2009 un'ora. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.