Derivate.

Paola Mannucci e Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica

1 novembre 2014

Approssimazione

Problema.

Data una funzione f definita in un intorno di x_0, ci poniamo il problema di approssimarla localmente, cioè in un intorno sufficentemente piccolo di x_0, con una retta di equazione $y = ax + b$, passante per $(x_0, f(x_0))$ e quindi tale che $f(x_0) = ax_0 + b$.

Notazione.

Dicendo che una funzione f è uguale a $o(x - c)$ intenderemo che

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{x - c} = 0.$$

Approssimazione

Esempio

La funzione $\sin(x) - x$ *è* $o(x)$ *(cioè* $o(x-0)$*).*

Svolgimento.

Da $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ *abbiamo che*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1 - 1 = 0$$

e quindi $\sin(x) - x$ *è* $o(x)$*.*

Di conseguenza, $\sin(x) - x = o(x)$ e quindi, con un abuso di notazione, $\sin(x) = x + o(x)$.

Retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$

Definizione

Sia I un intervallo (anche illimitato), e x_0 sia interno ad I (cioè non sia un estremo di I). Si dice che la retta passante per $(x_0, f(x_0))$

$$y = f(x_0) + m(x - x_0)$$

è ***tangente*** *al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ se*

$$f(x) - [f(x_0) + m(x - x_0)] = o(x - x_0).$$

Usando l'abuso di notazione precedente, che tornerà utile, ciò si scrive pure

$$f(x) = [f(x_0) + m(x - x_0)] + o(x - x_0).$$

Retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$

Nota.

Ricordando la definizione di $o(x - x_0)$

$$f(x) - [f(x_0) + m(x - x_0)] = o(x - x_0)$$

significa

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + m(x - x_0)]}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m = 0$$

cioè facilmente

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m \in \mathbb{R}.$$

Definizione

La quantità

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

si chiama rapporto incrementale di f in x relativamente a x_0.

Definizione

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con x_0 interno ad I. Diremo che f è derivabile in x_0 se esiste finito il limite

$$L = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Tale limite L viene chiamato derivata (prima) di f in x_0 e viene usualmente indicato con $f'(x_0)$ o a volte $\frac{df}{dx}\Big|_{x_0}$

Derivata, esempio

Esercizio

Mostrare che la derivata prima di $\sin(x)$ *in* 0 *vale* 1.

Svolgimento.

Per quanto detto basta sia, per $f(x) = \sin(x)$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

cosa nota per il limite notevole

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Derivata, derivate sinistre e destre

Definizione

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ *un intervallo e sia* $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, derivabile per ogni* x^* *interno ad* I*. Diremo che* f *è derivabile in* I *e con* f' *o a volte* $\frac{df}{dx}$ *intenderemo la funzione che ad* x *associa il valore della derivata.*

Definizione

Sia $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ *un intervallo e sia* $a \leq x_0 < b$*. Diremo che* f *è derivabile a destra in* x_0 *se esiste finito il limite destro*

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} := f_+{}'(x_0)$$

Definizione

Sia $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ *un intervallo e sia* $a \leq x_0 < b$*. Diremo che* f *è derivabile a sinistra in* x_0 *se esiste finito il limite sinistro*

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} := f_-{}'(x_0)$$

Derivata, teorema sulla derivazione, dalle derivate sinistre e destre

Teorema

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto contenente x_0. La funzione f è derivabile in x_0 se e solo se

- *esistono $f_-'(x_0)$, $f_+'(x_0)$,*
- $f_-'(x_0) = f_+'(x_0) = f'(x_0)$.

Derivabilità e continuità

Teorema

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto contenente x_0. Sia la funzione f derivabile in x_0. Allora la funzione è continua in x_0.

Dimostrazione.

Dalla definizione,

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0 \\
&\Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)
\end{aligned}
$$

ed essendo $f'(x_0)(x - x_0) \to 0$, $o(x - x_0) \to 0$ *ricaviamo*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

cioè f continua in x_0.

Derivabilità : definizione alternativa

Nota.

Osserviamo che posto $x = x_0 + h$, *abbiamo*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Per questo motivo spesso si definisce

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Derivabilite delle funzioni elementari: monomi

Teorema

La derivata di $f(x) = x^{\alpha}$ *è, internamente al dominio di* f*,*

$$f'(x) = \begin{cases} 0, \; se \; \alpha = 0 \\ \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \; se \; \alpha \neq 0 \end{cases}$$

Dimostrazione.

- *se* $\alpha = 0$, *abbiamo*

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^0 - (x_0)^0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Derivabilite delle funzioni elementari: monomi

- *se* $\alpha \neq 0$ *abbiamo dal limite notevole*

$$\lim_{t \to 0} \frac{(1+t)^{\alpha} - 1}{t} = \alpha$$

che da $(x_0 + h)^{\alpha} = (x_0(1 + (h/x_0)))^{\alpha} = x_0^{\alpha}(1 + (h/x_0))^{\alpha}$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^{\alpha} - (x_0)^{\alpha}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x_0^{\alpha}\left((1 + \frac{h}{x_0})^{\alpha} - 1\right)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x_0^{\alpha}}{x_0}\left((1 + \frac{h}{x_0})^{\alpha} - 1\right)}{\frac{h}{x_0}} = \alpha x_0^{\alpha - 1}. \end{aligned}$$