Polinomio di Taylor.

Paola Mannucci e Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica

9 novembre 2014

Polinomio di Taylor

Dalla teoria della derivazione, sappiamo che se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in (a, b)$ allora

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

cioè

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) \\ &= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \right) \end{aligned}$$

ovvero, $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0)$ e quindi,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Polinomio di Taylor

La scrittura

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

dice che in un intorno di x_0 la funzione f si può approssimare con il polinomio di primo grado

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Problema.

Se più in generale la funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è differenziabile n volte, esiste un polinomio di grado n che approssima f in un intorno di x_0, ovviamente meglio del polinomio di primo grado sopra indicato $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$?

Formula di Mc Laurin

La scrittura

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

nel caso particolare $x_0 = 0$ *diventa*

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x) + o(x).$$

e si chiama formula di Mc Laurin di grado 1.

Per la formula di Mc Laurin di grado n *cercheremo* T_n, *polinomio di grado* n, *tale che più in generale*

$$f(x) = f(0) + T_n(x) + o(x^n)$$

per $x \to 0$.

Formula di Mc Laurin

Definizione

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *derivabile* n *volte in* 0. *Allora la scrittura*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

è nota come formula di Mc Laurin.

Inoltre

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

si chiama polinomio di Mc Laurin.

Formula di Mc Laurin. Esempio 1.

Esempio

Calcolare il polinomio di Mc Laurin di

$$f(x) = e^x$$

di ordine n.

Svolgimento.

Essendo $f^{(n)}(x) = e^x$, *naturalmente* $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ *e quindi ricaviamo*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Formula di Mc Laurin. Esempio 1.

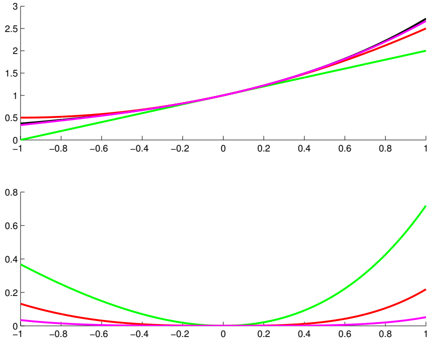

Figura : In alto. La funzione e^x in $[-1, 1]$ (in nero), la formula di Mc Laurin T_k di grado 1 (in verde), la formula di Mc Laurin di grado 2 (in rosso), la formula di Mc Laurin di grado 3 (in magenta). In basso. L'errore assoluto $|e^x - T_k(x)|$ in $[-1, 1]$, relativamente alla formula di Mc Laurin T_k di grado 1 (in verde), la formula di Mc Laurin di grado 2 (in rosso), la formula di Mc Laurin di grado 3 (in magenta).

Formula di Mc Laurin. Esempio 1.

Nota.

Notiamo dalla figura che

- *La qualità dell'approssimazione migliora al crescere del grado del polinomio di Mc Laurin.*
- *L'approssimazione è buona solo in un intorno di* 0. *L'errore assoluto vicino a* 0 *è piccolo, ma non è così in* $x = 1$.

Formula di Mc Laurin. Esempio 2.

Esempio

Calcolare il polinomio di Mc Laurin di

$$f(x) = \sin(x)$$

di ordine n.

Svolgimento.

Da

$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(0)$
$f^{(0)}(x) = \sin(x)$	$f^{(0)}(0) = 0$
$f^{(1)}(x) = \cos(x)$	$f^{(1)}(0) = 1$
$f^{(2)}(x) = -\sin(x)$	$f^{(2)}(0) = 0$
$f^{(3)}(x) = -\cos(x)$	$f^{(3)}(0) = -1$
$f^{(4)}(x) = \sin(x)$	$f^{(4)}(0) = 0$
$\ldots$	$\ldots$

Formula di Mc Laurin. Esempio 2.

abbiamo

$$T_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1!}$$

e quindi per $x \approx 0$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1!} + o(x^n).$$

Formula di Mc Laurin. Esempio 2.

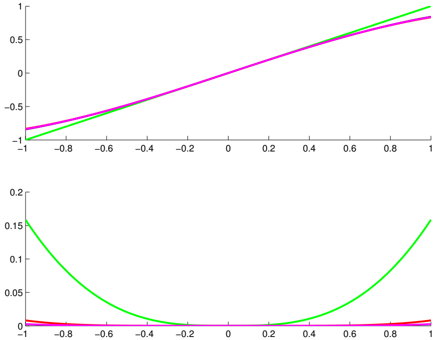

Figura : In alto. La funzione $\sin(x)$ in $[-1,1]$ (in nero), la formula di Mc Laurin T_k di grado 1 (in verde), la formula di Mc Laurin di grado 2 (in rosso), la formula di Mc Laurin di grado 3 (in magenta). In basso. L'errore assoluto $|\sin(x) - T_k(x)|$ in $[-1,1]$, relativamente alla formula di Mc Laurin T_k di grado 1 (in verde), la formula di Mc Laurin di grado 2 (in rosso), la formula di Mc Laurin di grado 3 (in magenta).

Formula di Mc Laurin. Esempio 2.

Nota.

Notiamo dalla figura che

- *La qualità dell'approssimazione migliora al crescere del grado del polinomio di Mc Laurin.*
- *L'approssimazione è buona solo in un intorno di* 0. *L'errore assoluto vicino a* 0 *è piccolo, ma non è così in* $x = 1$ *(evidente nel caso* T_1*).*

Esercizio

Mostrare che

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

Formula di Taylor.

Definizione

Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *derivabile* n *volte in* $x_0 \in (a,b)$. *Allora la scrittura*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

è nota come formula di Taylor di ordine n*, centrata in* x_0*, con resto di Peano.*

Inoltre

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

si chiama polinomio di Taylor.

Formula di Taylor.

Teorema

Siano $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *e* $x_0 \in [a,b]$. *Se*

- f *è* n *volte derivabile in* $[a,b]$;
- f *è* $n+1$ *volte derivabile in* $[a,b]\backslash 0$;
- $f^{(n)}$ *è continua in* $[a,b]$

allora per ogni $x \in [a,b]\backslash 0$ *esiste* $\xi(x)$ *tra* x *e* x_0 *tale che*

$$f(x) = T_n(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}\xi(x)(x-x_0)^{n+1}$$

dove T_n *è il polinomio di Taylor di ordine* n *e centro* x_0 *della funzione* f.

Su $o(f(x))$.

Ricordiamo le seguenti

Notazione.

$$f(x) = o(g(x)) \ per \ x \to x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Definizione

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ *e* $f = o(g)$ *allora* f *è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a* g *per* $x \to x_0$.

Esempio

Si mostra facilmente che

- $x^2 = o(x)$ *per* $x \to 0$;
- $x^5 = o(x)$ *per* $x \to 0$;

Algebra degli $o(f(x))$.

Teorema

Vale la seguente algebra degli o, per $x \to 0$:

- $o(x) \pm o(x) = o(x)$;
- $o(kx) = o(x)$ *per* $k \in \mathbb{R}$;
- $o(x) + 0(x^2) = o(x)$;
- $o(x) \cdot o(x) = o(x^2)$;

Algebra degli $o(f(x))$: calcolo di limite.

Esempio

Si calcoli

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + \sin(x) + \log(1+x)}{e^x - 1 + x^2}$$

Svolgimento.

Osserviamo che, per quanto noto dalla formula di Mc Laurin

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ *e quindi* $e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$;
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1!} + o(x^n)$.
- $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$.

Algebra degli $o(f(x))$: calcolo di limite.

Di conseguenza, visto che $o(x)/x \to 0$ per $x \to 0$,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x+\sin(x)+\log(1+x)}{e^x-1+x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{x+(x+o(x^2))+(x+o(x))}{(x+o(x))+o(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{3x+o(x^2)+o(x)}{x+o(x)+o(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x(3+o(x^2)/x+o(x)/x)}{x(1+o(x)/x+o(x)/x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{3x}{x} = 3
\end{aligned}$$

Ulteriori sviluppi. Esempi I.

Esempio

Per $x \to 0$, *si ha*

$$\sin(\sqrt{x}) = \sqrt{x} - \frac{x^{3/2}}{6} + \frac{x^{5/2}}{5!} + o(x^{5/2})$$

Traccia.

Scrivere lo sviluppo $\sin(y) = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + o(y^5)$. *e porre* $y = \sqrt{x}$.

Esempio

Per $x \to 0$, *si ha*

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + o(x^6)$$

Traccia.

Scrivere lo sviluppo $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3!} + o(y^3)$ *e porre* $y = x^2$.

Ulteriori sviluppi. Esempi II.

Esempio

Per $x \to 0$, *si ha*

$$e^{x^2+1} = e + e \cdot x^2 + \frac{e \cdot x^4}{2} + \frac{e \cdot x^6}{3!} + o(x^6)$$

Traccia.

Scrivere lo sviluppo $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + o(x^6)$ *e osservare che*

$$e^{x^2+1} = e \cdot e^{x^2} = e \cdot (1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + o(x^6)).$$

Nota.

I conti appena fatti richiedono di lavorare con funzioni infinitesime e quindi non si adattano ad oggetti quali $\cos(1+x^3)$ *in un intorno di* 0, *poichè* $\lim_{x\to 0} \cos(1+x^3) = \cos(1) \neq 0$.

Ulteriori sviluppi. Esempi III.

Esempio

Per $x \to 0$, *si ha*

$$(\sin(x))^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

Traccia.

Scrivere lo sviluppo $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ *e osservare che*

$$\begin{aligned}
(\sin(x))^2 &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^2 \\
&= x^2 + \left(\frac{x^3}{3!}\right)^2 + (o(y^3))^2 - 2x\frac{x^3}{3!} + 2xo(x^3) - 2\frac{x^3}{3!} \cdot o(x^3) \\
&= x^2 + \frac{x^6}{36} + o(x^6) - \frac{x^4}{3} + o(x^4) - o(x^6) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4).
\end{aligned}$$

Esercizio

Calcolare

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos(2\sqrt{x}) - e^{-2x}}{\sin(x) - x}$$

Traccia.

E' una forma $0/0$*. Si noti che* $x \to 0^+$*, ma la teoria vale lo stesso (perchè ?). Si vede subito che*

- $\sin(x) - x = -(x^3/6) + o(x^3)$;
- *dallo sviluppo di* $\cos(x) = 1 - (x^2/2) + o(x^2)$ *abbiamo per* $x > 0$

$$\cos(2\sqrt{x}) = 1 - ((2\sqrt{x})^2/2) + o((2\sqrt{x})^2) = 1 - 2x + o(x)$$

Ulteriori sviluppi. Esercizio svolto.

- *dallo sviluppo* $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3!} + o(y^3)$ *abbiamo*

$$e^{-2x} = 1 - 2x + \frac{(-2x)^2}{2} + \frac{(-2x)^3}{3!} + o(y^3) = 1 - 2x + o(x)$$

Quindi,

$$\cos(2\sqrt{x}) - e^{-2x} = (1 - 2x + o(x)) - (1 - 2x + o(x)) = o(x) - o(x) = o(x)$$

e non si capisce bene cosa sia a meno di infinitesimi $\cos(2\sqrt{x}) - e^{-2x}$.

Ulteriori sviluppi. Esercizio svolto.

Andiamo ad un ordine maggiore e ricaviamo dopo qualche conto

- $\cos(2\sqrt{x}) = 1 - 2x + (2/3)x^2 + o(x^2)$
- $e^{-2x} = 1 - 2x + 2x^2 + o(x^2)$

da cui

$$\begin{aligned}\cos(2\sqrt{x}) - e^{(-2x)} &= (1 - 2x + (2/3)x^2 + o(x^2)) - (1 - 2x + 2x^2 + o(x^2)) \\ &= (2/3)x^2 - 2x^2 + o(x^2) = -(4/3)x^2 + o(x^2)\end{aligned}$$

e facilmente,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(2\sqrt{x}) - e^{-2x}}{\sin(x) - x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{-(4/3)x^2 + o(x^2)}{-(x^3/6) + o(x^3)} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{-(4/3)x^2}{-(x^3/6)} = +\infty\end{aligned}$$

Esercizi

Esercizi.

Esercizio

Calcolare con gli infinitesimi e/o con la regola de l'Hopital

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - \sinh(x)}{e^x - x - cosh(x)}$$

Traccia.

Mostrare che

$$\sin(x) - \sinh(x) = -x^3/3 + o(x^3)$$

$$e^x - x - cosh(x) = x^3/6 + o(x^3)$$

e quindi il limite vale -2.

Esercizi.

Esercizio

Mostrare che, al variare di α,

$$L_\alpha = \lim_{x \to 0} \frac{27x^5 + log(1+x^7)}{\sqrt{1+x^8} - 1 + \alpha \sin^5(x)}$$

vale $27/\alpha$ *se* $\alpha \neq 0$, $+\infty$ *se* $\alpha = 0$.

Esercizio

Mostrare che,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin(x)} - 1 - x}{x \log(x)} = 0$$

Esercizio

Mostrare che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 \log(x) + x^3 \sin(1/x)}{2^x - 1} = 0.$$