Correzione dell'esempio di un compito scritto (Parte B)

Maurucci – Sommariva (2014/15)

Es. 1

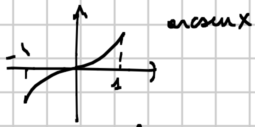
$$f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{|x+1|}\right)$$

1) Dominio : $\begin{cases} \dfrac{1}{|x+1|} \le 1 \\ x \ne -1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} |x+1| \ge 1 \\ x \ne -1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x+1 \ge 1 \\ x \ne -1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x+1 \le -1 \\ x \ne -1 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad x \ge 0 \quad$ e $\quad x \le -2$

$D = (-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$ (1 punto)

2) segno :



$f(x) > 0$ perché l'argomento dell'arcsin è strettamente positivo.

la funzione non ha simmetrie evidenti (0.5 punti)

3) $\lim_{x \to -\infty} \arcsin\left(\frac{1}{|x+1|}\right) = 0 = \lim_{x \to +\infty} \arcsin\left(\frac{1}{|x+1|}\right)$ asintoto orizzontale (1 punto)

$f(-2) = \frac{\pi}{2} \qquad f(0) = \pi/2$

4) f continua perché composizione di f. continue, continua a sinistra in $x=-2$ e a destra in $x=0$. (0.5 p.ti)

5) f è derivabile in $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{x+1}\right)^2}} \cdot \left(-\dfrac{1}{(x+1)^2}\right) & x+1 > 0 \; (x > -1) \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{(-x-1)^2}}} \cdot \left(\dfrac{1}{(-x-1)^2}\right) & x+1 < 0 \; (x < -1) \end{cases}$$

(2 punti)

Quindi in $(-\infty, -2)$ si ha $x < -1$

$\Rightarrow f'(x) > 0$. (0.5 p.ti)

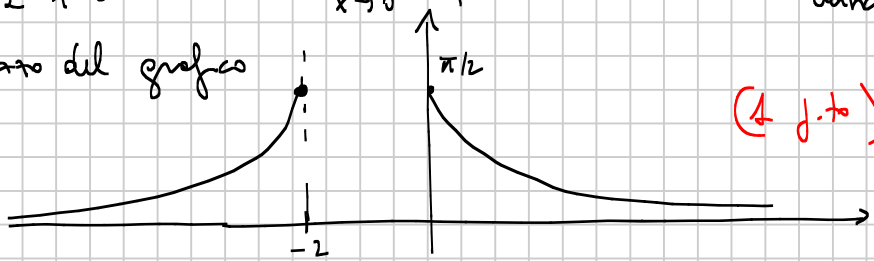
In $(0, +\infty)$ si ha $x > -1 \Rightarrow f'(x) < 0$ (0.5 p.ti)

Quindi f è strettamente crescente in $(-\infty, -2)$
f è " decrescente in $(0, +\infty)$.

Attacchi in $x = -2$ e $x = 0$ (1 p.to)

$\lim_{x \to -2^-} f'(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty$ (tangente verticale)

abbozzo del grafico (1 p.to)



2) $\sum (-1)^n \dfrac{e^{n(\alpha-1)}}{n}$ $\qquad \alpha \in \mathbb{R}$

a) conv. assoluta

$\sum \underbrace{\dfrac{e^{n(\alpha-1)}}{n}}_{a_n}$ si può usare il criterio della radice (o del rapporto)

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{e^{\alpha-1}}{\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\alpha-1}$$ (2 punti)

$\sum a_n$ converge se $e^{\alpha-1} < 1 \iff \alpha - 1 < 0 \iff \boxed{\alpha < 1}$

$\sum a_n$ diverge se $\alpha > 1$ (1 punto)

Se $\alpha = 1$ $\sum a_n = \sum \frac{1}{n}$ diverge (1 punto)

La serie converge assolutamente sse $\boxed{\alpha < 1}$

b) convergenza. Se $\alpha < 1$ conv. assolutamente e quindi converge. (0.5 punti)

$\sum (-1)^n \dfrac{e^{n(\alpha-1)}}{n}$ Se $\alpha > 1$ $\dfrac{e^{n(\alpha-1)}}{n} \not\to 0$ (0.5 punti)

quindi non è soddisfatta la condizione necessaria di convergenza $\Rightarrow$ la serie non converge.

Se $\alpha = 1$ $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ converge per il criterio di Leibniz. (2 punti)

Quindi la serie converge (semplicemente) $\forall\ \alpha \leq 1$. (1 punto)

3) $$\int_1^e \frac{1}{(1 + 2\log x + \log^2 x)x}\,dx =$$ $\log x = t$, $\frac{1}{x}dx = dt$ (2 p.ti)

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+2t+t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{(t+1)^2}\,dt = -\frac{1}{(t+1)}\Big|_0^1 =$$ (1 p.to) (1 p.to) (2 p.ti)

$$= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$ (1 p.to)

Facoltativo:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{(1+2\log x + \log^2 x)x}\,dx \qquad f(x) \sim \frac{1}{x \log^2 x}$$

$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\log^2 x}\,dx$ è integrabile quindi $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ è integrabile.

4) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x - e^{x^2/2}}{2x} & x > 0 \\[2ex] 2ae^x - 3bx & x \leq 0 \end{cases}$$

a) a e b t.c. f è continua in $\mathbb{R}$.

f è continua in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. (1 p.ti)

in $x=0$ bisogna dimostrare che (1 p.ti)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x + \cos x - e^{x^2/2}}{2x} = f(0) = 2a \quad (0.5 \text{ p.ti})$$

Il limite si può fare con gli sviluppi di Taylor o con l'Hôpital. Facciamo con Taylor

$$\frac{\operatorname{sen} x + \cos x - e^{x^2/2}}{2x} \underset{(2 \text{ p.ti})}{=} \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) + \cancel{1} - \frac{x^2}{2} - \cancel{1} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{2x}$$

$$= \frac{x + o(x)}{2x} \to \frac{1}{2} \quad (2 \text{ p.ti})$$

f è continua in $x=0$ sse $\frac{1}{2} = 2a \iff a = \frac{1}{4}$ (0.5 p.ti)

b) f è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Per studiare la derivabilità in $x=0$, poiché l'espressione di f' per $x>0$ è lunga, si può fare con la definizione di $f'(0)$. Innanzitutto deve essere $a = \frac{1}{4}$.

$$f'_-(0) = \left(2ae^x - 3b\right)\Big|_{x=0} = 2a - 3b = \frac{1}{2} - 3b$$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\operatorname{sen} x + \cos x - e^{x^2/2}}{2x} - \frac{1}{2}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x + \cos x - e^{x^2/2} - x}{2x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) + \cancel{1} - \frac{x^2}{2} - \cancel{1} - \frac{x^2}{2} - \cancel{x}}{2x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2 + o(x^2)}{2x^2} = -\frac{1}{2}$$

$\exists\, f'(0)$ sse $\frac{1}{2} - 3b = -\frac{1}{2} \iff 3b = 1 \iff \begin{pmatrix} b = 1/3 \\ a = 1/4 \end{pmatrix}$.