Lezione del 7 Gennaio 2015

Buon anno!

OGGI

fino 10.15 pausa 10.30 – 11.00

FUNZIONI IN PIÙ VARIABILI

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

due variabili $D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(x,y)$

tre variabili $D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(x,y,z)$

Due variabili $\quad D \subseteq \mathbb{R}^2$

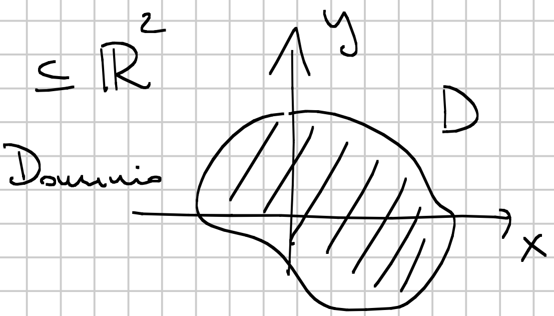
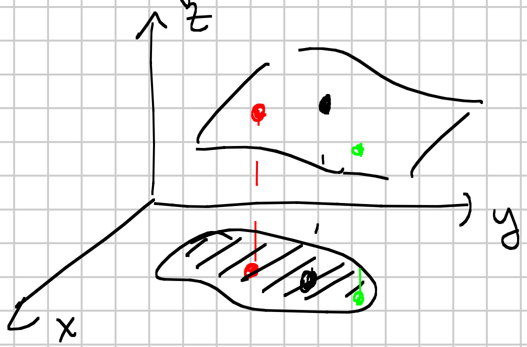


grafico di $f(x,y)$

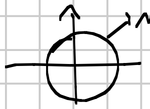


$$(x, y, \underbrace{f(x,y)}_{z})$$

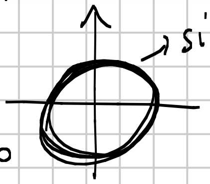
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l \iff \text{con gli intorni}$$

U intorno di (x_0,y_0) $\qquad U = B_\delta((x_0,y_0))$

- Def. di f. continua
- $D \subseteq \mathbb{R}^2$ è aperto, chiuso, limitato.

$$D = \{(x,y) : \quad x^2+y^2 < 1\}$$ 

aperto

$\leq$ 

chiuso

$\geq$

$=$

$f(x,y)$ continua in D chiuso e limitato

$\max f(x,y)$

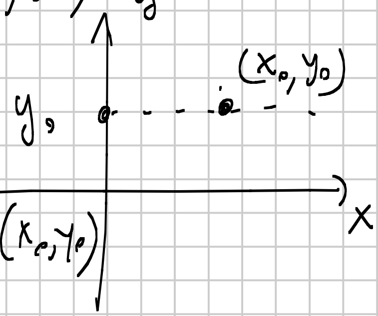
$\min f(x,y)$

$\Rightarrow \exists \max f$ e $\min f$ assunto in punti di D.

<u>Derivate parziali</u>

$f(x,y)$

(x_0,y_0)



$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$

analog. per $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$

es:

$$f(x,y) = e^{x-y} + 3x^2y + \operatorname{sen}(xy).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{xy}\cdot y + 3y\cdot 2x + \cos(xy)\cdot y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{xy}\cdot x + 3x^2 + \cos(xy)\,x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = e^{0}\cdot 1 + 0 + (\cos 0)\cdot 1 =$$
$$= 1+1=2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = e^0 \cdot 0 + 0 + \cos 0 \cdot 0 = 0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) = \nabla f(x,y) = \text{grad} f(x,y)$$

$$\text{grad} f(0,1) = (2, 0)$$

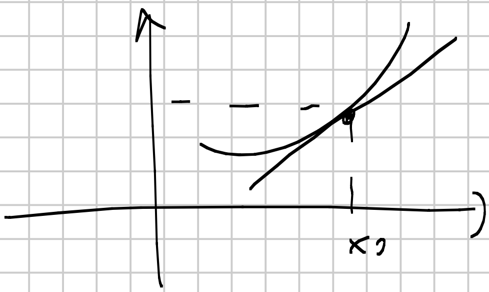
Def. Se una funzione ha derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ in (x_0, y_0) dico che è derivabile in (x_0, y_0).

Per le funzioni in 1 variabile

f derivabile in x_0 $\Rightarrow$ f continua in x_0

$f(x)$

$\Rightarrow$ $\exists$ retta tg al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$



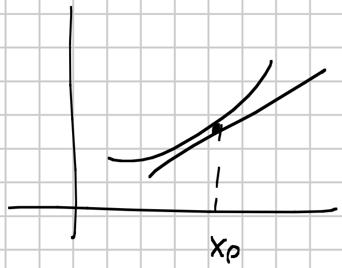
per funzioni di due (o più) variabili

f è derivabile in (x_0, y_0) $\not\Rightarrow$ f è continua in (x_0, y_0).

FUNZIONI DIFFERENZIABILI

$n = 1$ in una variabile — Def. di f derivabile

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)} + o(|x - x_0|) \quad x \to x_0$$



eq. retta tg al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$.

$n=2$ $\quad (x,y) \quad (x_0,y_0)$

$$\boxed{f(x,y) = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,\, y-y_0) + o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)}$$

prodotto scalare

$$\nabla f(x_0,y_0) \cdot (x-x_0,\, y-y_0) =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right) \cdot (x-x_0,\, y-y_0) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

Def. $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\quad (x_0,y_0) \in D$.
f si dice differenziabile in (x_0,y_0) se

1) f è derivabile in (x_0,y_0) $\quad \left(\exists\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$

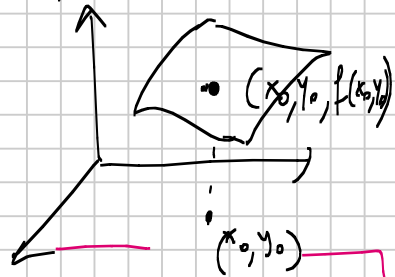
2) vale la relazione

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}_{\left(\nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,\, y-y_0)\right)} + o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)$$

$(x,y) \to (x_0,y_0)$.

$$Ax + By + C$$

Piano tangente al grafico di $f(x,y)$
nel punto $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$
ha equazione



$$\boxed{z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}$$

funzione lineare in (x,y)

$$z = C + Ax + By$$

Se f è differenziabile in (x_0,y_0)

$$f(x,y) = \text{piano tangente al grafico in } (x_0,y_0,f(x_0,y_0)) + o(\dots)$$

Teo. Se f è differenziabile in (x_0,y_0) allora f è continua in (x_0,y_0).

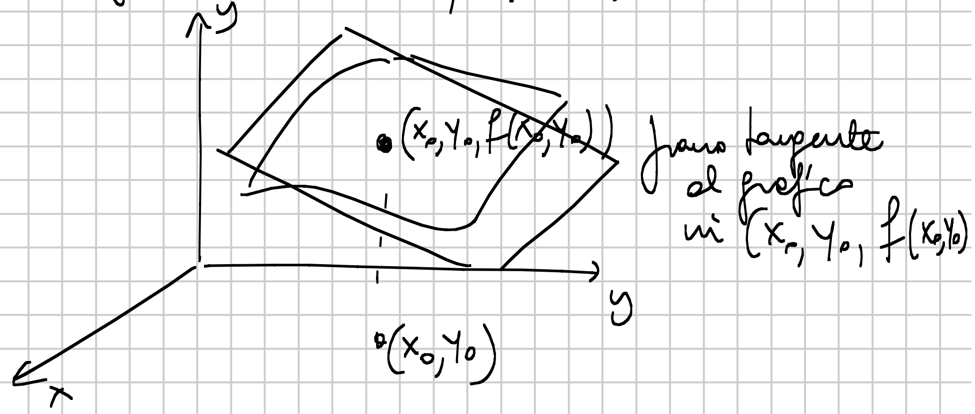
Dim. Def. di f differenziabile

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0, y-y_0) + o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)$$

devo dim. che f è continua in (x_0,y_0) cioè se $(x,y)\to(x_0,y_0)$ $f(x,y)\to f(x_0,y_0)$. Questo è vero perché $\nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0, y-y_0) \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,y_0)]{} 0$ e $o(\sqrt{\quad}) \to 0$

#

OSS. Se f è differenziabile in (x_0, y_0) esiste il piano tangente al grafico di f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

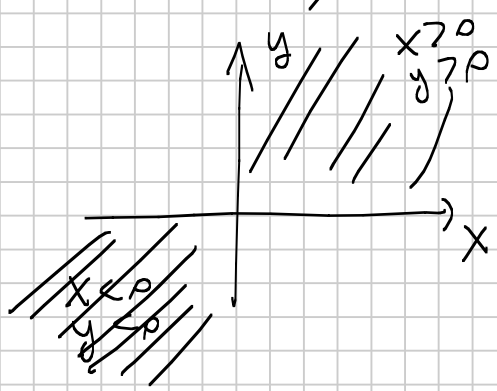


Es. Trovare il piano tg. al grafico della funzione

$$f(x,y) = \operatorname{sen}(xy) + \log\left(\frac{x}{y}\right)$$

in $(1, \pi)$

D $\quad \frac{x}{y} > 0$



$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(xy)\cdot y + \frac{\cancel{y}}{x}\cdot\frac{1}{\cancel{y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos(xy)\cdot x + \frac{\cancel{y}}{\cancel{x}}\cdot\cancel{x}\left(-\frac{1}{y^{\cancel{2}}}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, \pi) = (\cos\pi)\cdot\pi + \frac{1}{1} = 1 - \pi$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, \pi) = \cos\pi\cdot 1 - \frac{1}{\pi} = -1 - \frac{1}{\pi}$$

piano tangente

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$z = f(1,\pi) + f_x(1,\pi)(x-1) + f_y(1,\pi)(y-\pi)$$

$$z =$$

$$f(1,\pi) = \operatorname{sen}\pi + \log\left(\frac{1}{\pi}\right) = \log\left(\pi^{-1}\right) = -\log\pi$$

$$z = -\log\pi + (1-\pi)(x-1) + \left(-1-\frac{1}{\pi}\right)(y-\pi)$$

$$z = -\log\pi + x - \cancel{1} - \pi x + \pi - y + \pi - \frac{y}{\pi} \cancel{+1}$$

$$\boxed{z = x(1-\pi) - y\left(1+\frac{1}{\pi}\right) - \log\pi + 2\pi}$$

eq. piano tangente al grafico di f in $(1,\pi,-\log\pi)$

Es.

- $f(x,y) = x\cos(x+y^2) - 3y^2$
  trovare piano tangente in $(\pi,0)$
- $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ piano tangente in $(1,1)$.
- $f(x,y) = \log(x\log y)$
  piano tangente in $(1,e)$

Come si fa a capire se una funzione è differenziabile in (x_0,y_0).

Teorema del differenziale totale

$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derivabile in D.

Se $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sono continue in D $\Rightarrow$ f è differenziabile in tutti i punti di D.

Es. $f(x,y) = x^2 y$ def. su tutto $\mathbb{R}^2$

$f_x(x,y) = 2xy$

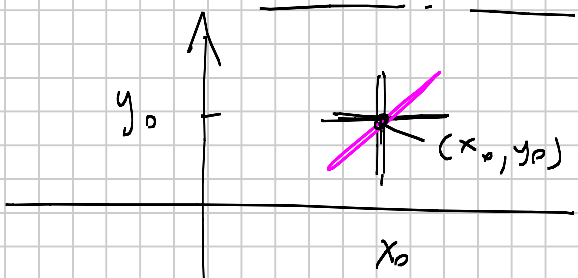
$f_y(x,y) = x^2$

$\Rightarrow$ sono continue in $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ dal teo. del diff. totale

$\Downarrow$

f è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$.

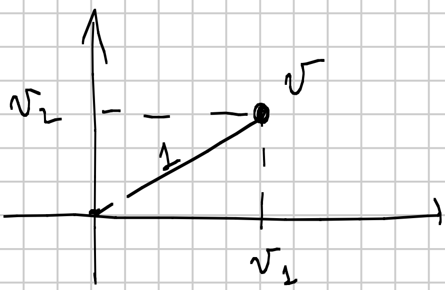
Es. Anche per tutti gli esempi che abbiamo fatto prima abbiamo funzioni differenziabili.



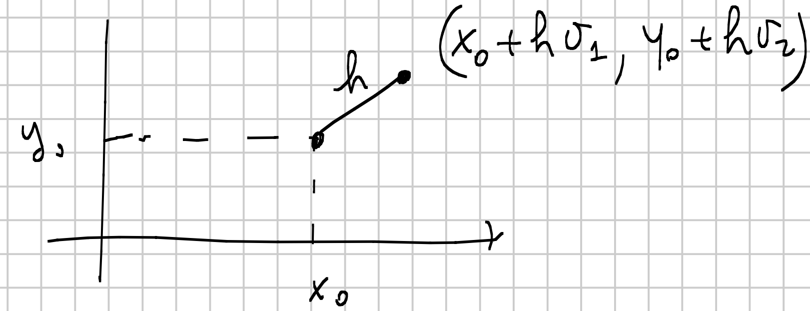
Derivate direzionali

Prendo una direzione $v = (v_1, v_2)$

$\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1$ vettore di lunghezza 1



v individua una direzione

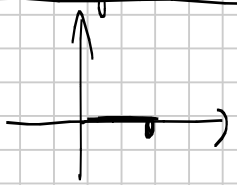


Incremento nella direzione v

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+hv_1,\, y_0+hv_2)-f(x_0,y_0)}{h} =: f_v(x_0,y_0)$$

derivata di f nella direzione v in (x_0,y_0).

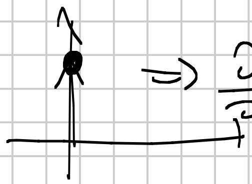
<u>Casi particolari</u>



$v=(1,0)$ $\quad v_1=1$, $v_2=0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,\, y_0)-f(x_0,y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$

analog. se $v=(0,1)$



$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}$

le derivate parziali sono particolari derivate direzionali, fatte lungo le direzioni degli assi.

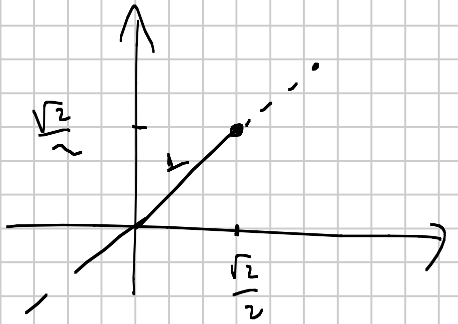
<u>Formula del gradiente</u> (per calcolare le derivate direzionali per f differenziabili)

f differenziabile in (x_0,y_0), $v=(v_1,v_2)$ direzione $\left(\sqrt{v_1^2+v_2^2}=1\right)$

$$\boxed{f_v(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0)=\nabla f(x_0,y_0)\cdot v}$$

Es. $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$

Calcolare la derivata direzionale di f in $(1,1)$ nella direzione $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$



$(1,1)$

$$f_x = \cos(xy)\cdot y$$
$$f_y = \cos(xy)\cdot x$$

f_x e f_y sono continue in $\mathbb{R}^2$

→ dal teorema del diff. totale $\Rightarrow f$ è differenziabile in $\mathbb{R}^2$.

Formula del gradiente

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\nabla f(1,1) = \left(f_x(1,1),\ f_y(1,1)\right) = (\cos 1, \cos 1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,1) = (\cos 1, \cos 1)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= \cos 1 \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos 1 \frac{\sqrt{2}}{2} = (\cos 1)\sqrt{2}.$$

Per casa: Negli esercizi di prima dove si doveva calcolare il piano tangente calcolate anche

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\cdot,\cdot) \quad \text{dove } v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Derivate successive

$f(x,y)$

$f_x(x,y)$ $\qquad\qquad$ $f_y(x,y)$

derivate parziali

$f_{xx} \qquad f_{xy} \qquad\qquad f_{yx} \qquad f_{yy}$

es. $f(x,y) = 3x^2y + 5xy^3$

$f_x = 6xy + 5y^3$

$f_y = 3x^2 + 15xy^2$

$$\begin{cases} f_{xx} = 6y \\ f_{xy} = 6x + 15y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{yx} = 6x + 15y^2 \\ f_{yy} = 30xy \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

Matrice 2 x 2
Matrice Hessiana di $f(x,y)$.

Matrice Hessiana per l'esempio

$$\begin{pmatrix} 6y & 6x+15y^2 \\ 6x+15y^2 & 30xy \end{pmatrix}$$

uguali!

Teorema di Schwarz

$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, f derivabile due volte in D, se f_{xy} e f_{yx} sono continue allora $\boxed{f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)}$

es. $f(x,y) = \text{sen}(xy^2)$

$$f_x = \cos(xy^2) \cdot y^2$$

$$f_y = \cos(xy^2) \cdot 2xy$$

$$f_{xx} = -\text{sen}(xy^2)\, y^2 \cdot y^2$$

$$f_{xy} = -\text{sen}(xy^2) \cdot 2xy \cdot y^2 + \cos(xy^2)\, 2y =$$

$= f_{yx}$

per Schwartz

$$f_{yy} = -\text{sen}(xy^2) \cdot 2xy \cdot 2xy + \cos(xy^2) \cdot 2x$$

$(0,1)$

$f_{xx}(0,1) =$

$f_{xy}(0,1) =$ $\quad f_{yy}(0,1) =$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} =$$ Hessiana di f in $(0,1)$.