

Esercizio 1 *Attenzione: in un modo o nell'altro, il contenuto di questo esercizio risulta fondamentale nella risoluzione del 99% degli esercizi sugli integrali impropri. Pertanto E' NECESSARIO CONOSCERE A MEMORIA i seguenti risultati.*

Provare che per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $c < 0$, $d > 0$ si ha

- $\int_a^b \frac{1}{|x-a|^\alpha} dx = \int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx$ è convergente per $\alpha < 1$ e divergente ($= +\infty$) per $\alpha \geq 1$;
- $\int_a^b \frac{1}{|x-b|^\alpha} dx = \int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx$ è convergente per $\alpha < 1$ e divergente ($= +\infty$) per $\alpha \geq 1$ (osservare che $|x-b| = b-x$: perché?);
- $\int_{-\infty}^c \frac{1}{|x|^\alpha} dx = \int_{-\infty}^c \frac{1}{(-x)^\alpha} dx$ è convergente per $\alpha > 1$ e divergente ($= +\infty$) per $\alpha \leq 1$;
- $\int_d^{+\infty} \frac{1}{|x|^\alpha} dx = \int_d^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ è convergente per $\alpha > 1$ e divergente ($= +\infty$) per $\alpha \leq 1$.

Come si comportano $\int_{-\infty}^c \frac{1}{|x|^\alpha} dx$ e $\int_d^{+\infty} \frac{1}{|x|^\alpha} dx$ quando $c \geq 0$ e $d \leq 0$?

Esercizio 2 Dire se i seguenti integrali impropri sono convergenti o no, e in caso affermativo calcolarli:

- $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$;
- $\int_0^1 \log x dx$;
- $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2} + xe^{-x} \right) dx$;
- $\int_0^2 \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$;
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+9} dx$;
- $\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^{3/2}} dx$;
- $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x+1)^3} dx$;
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx$;
- $\int_0^{+\infty} \frac{x^{1/4}+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2} dx$;
- $\int_2^{+\infty} \frac{x}{x^3-3x^2+2x-6} dx$;
- $\int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2x}\right)}{x} dx$.

Esercizio 3 Nelle prossime settimane utilizzeremo sovente i seguenti limiti notevoli:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2}, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan t}{t}, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{t}, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t}.$$

Ripassarli.

Esercizio 4 Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ i seguenti integrali impropri sono convergenti:

- $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha} dx;$
- $\int_0^1 \frac{1 - \cos^2 x}{x^\alpha} dx;$
- $\int_0^1 \frac{\log x}{x^\alpha} dx;$
- $\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x^\alpha} dx;$
- $\int_0^1 \frac{\tan x}{x^\alpha} dx;$
- $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(1/x)}{x^\alpha} dx;$
- $\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos^2(1/x)}{x^\alpha} dx;$
- $\int_1^{+\infty} \frac{\log(1/x)}{x^\alpha} dx;$
- $\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{x^\alpha} dx;$
- $\int_1^{+\infty} \frac{\tan(1/x)}{x^\alpha} dx;$

Esercizio 5 Dimostrare che i seguenti integrali impropri sono convergenti

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(1/x)}{x^{\frac{2013}{2012}}} \sin(-15x) dx;$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(1/x)}{x} \sin(x^{2012}) dx;$$

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{\sin x} dx.$$

Esercizio 6 a) Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e tale che $f(x) > 0 \forall x \in (a, b]$, $f(a) = 0$ e $f'(a) > 0$. Dimostrare che l'integrale improprio $\int_a^b \frac{1}{f(x)^\alpha} dx$ è convergente se $\alpha < 1$, divergente ($= +\infty$) se $\alpha \geq 1$. Suggerimento: considerare

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{\frac{1}{f(x)^\alpha}}{\frac{1}{(x-a)^\alpha}} = \lim_{x \rightarrow a^-} \left(\frac{x-a}{f(x)-f(a)} \right)^\alpha = \dots$$

b) Utilizzare il risultato precedente per dimostrare che, dato $k > 0$, l'integrale improprio $\int_{k^{1/\beta}}^{1+k^{1/\beta}} \frac{1}{x^\beta - k} dx$ è divergente per ogni $\beta \neq 0$.

c) Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e tale che $f(x) > 0 \forall x \in (a, b]$ e $f(a) = 0$; supponiamo inoltre che esista un certo $n \geq 1$ tale che

$$f', f'', \dots, f^{(n-1)} \text{ sono continue su } [a, b], \quad f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$$

e che invece $f^{(n)}(a) > 0$. Dimostrare che l'integrale improprio $\int_a^b \frac{1}{f(x)^\alpha} dx$ è convergente se $\alpha < 1/n$, divergente ($= +\infty$) se $\alpha \geq 1/n$. Suggerimento: considerare

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{\frac{1}{f(x)^\alpha}}{\frac{1}{(x-a)^{n\alpha}}} = \left(\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{(x-a)^n}{f(x)} \right)^\alpha = \dots$$

ed utilizzare ($n-1$ volte) il teorema di De l'Hôpital.

d) Utilizzare il punto c) per stabilire per quali α gli integrali impropri

$$\int_0^1 \frac{1}{(1 - \cos x)^\alpha} dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{(\sin x - x)^\alpha} dx, \quad \int_0^1 (e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6})^\alpha dx$$

risultano convergenti.

Esercizio 7 Tenendo conto che $\pi^2 \simeq 9,8696\dots$, dimostrare che

- $\int_0^3 \frac{1-\cos x}{x^2 \sin x} dx$ è divergente ($+\infty$);
- $\int_0^9 \frac{1-\cos x}{x^2 \sin \sqrt{x}} dx$ è convergente;
- $\int_0^{\pi^2} \frac{1-\cos x}{x^2 \sin \sqrt{x}} dx$ è divergente ($+\infty$). Suggerimento: considerare

$$\lim_{x \rightarrow \pi^2^-} \frac{\sin \sqrt{x}}{\pi^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \pi^2^-} \left(\frac{\sin(\pi - \sqrt{x})}{\pi - \sqrt{x}} \cdot \frac{\pi - \sqrt{x}}{\pi^2 - x} \right) = \dots$$

Esercizio 8 Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ i seguenti integrali impropri sono convergenti:

- $\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x^\alpha)}{x^{\alpha^2}} dx;$
- $\int_0^2 \frac{(e^x-1)^\alpha}{\sin(\sqrt{|x-1|})} dx;$
- $\int_0^2 \frac{(\tan|x-1|)^{-\alpha^2}}{|\sqrt[3]{x^3-1}|^\alpha} dx;$
- $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{|x^3+x^2+x+1|^\alpha} dx;$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\alpha x^4+x^2+4} dx;$
- $\int_1^{+\infty} \frac{\sinh x \cosh x}{e^{2x}} \sin^\alpha\left(\frac{1}{x}\right) \log\left(1+\frac{1}{x}\right) dx;$
- $\int_0^{+\infty} \left[\frac{3x^2-5x+3}{x+2} \sqrt[3]{x^4-x^3+3x-3} \right]^{14\alpha^2-3} dx;$
- $\int_0^{+\infty} \left(\sin \frac{1}{x+\frac{1}{x}} \right)^\alpha dx;$
- $\int_0^{+\infty} \frac{|x^2-4x-5|-x^2-4x-5}{x^\alpha} dx;$
- $\int_2^3 \frac{x \sin^\alpha(x-2)}{\sqrt{x^2-4}} dx;$
- $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x^7}{x^\alpha \log(1+x^3)} dx;$
- $\int_0^{+\infty} \frac{\sinh x^2}{e^{\alpha(x^2+x)} x^{\alpha/2}} dx;$
- $\int_0^3 \frac{\sin^\alpha(x-1) \log(1+x^2+x^5)}{|x-2|^\alpha (1-\cos x)^{2\alpha}} dx.$

Esercizio 9 a) Stabilire per quali valori del parametro $\alpha > 0$ risulta convergente l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{1}{(\sin \sqrt{x})^\alpha |x^\alpha - 1|^{1/3}} dx.$$

(Suggerimento: ricordando l'esercizio 3 di questo foglio, utilizzare il fatto che $|x^\alpha - 1| \sim \alpha(1-x)$ per $x \rightarrow 1^-$).

b) Idem per quanto riguarda il caso $\alpha < 0$. (Attenzione: in questo caso si ha $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = +\infty$. Suggerimento: usare $x^\alpha - 1 \sim x^\alpha$ per $x \rightarrow 0^+$).

Esercizio 10 Dire se i seguenti integrali impropri sono convergenti, e in caso affermativo calcolarli:

- $\int_{-1}^0 \frac{\arccos \sqrt{x+1}}{\sqrt{-4x}} dx;$

- $\int_1^{10} \frac{1}{\sqrt{x-1}(x+2)} dx;$

- $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sin x - \cos x} dx;$

- $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}} dx;$

- $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}} dx;$

- $\int_{1/2}^1 \frac{1}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx.$