

# Istituzioni di Analisi 2

## (programma, domande ed esercizi)

seconda settimana

### Argomenti trattati

Dal libro di testo: Capitolo 8, da pag 251 a pag 261

### Domande di teoria

- Enunciare il teorema di sostituzione sia per gli integrali definiti che per quelli indefiniti
- In quali modi si può usare il teorema di sostituzione per calcolare un integrale indefinito? Riuscite a mostrarlo con degli esempi?
- Ci sono situazioni in cui l'invertibilità della funzione  $\varphi(t)$  è indispensabile?
- Perché l'espressione  $f'(x)/f(x)$  si chiama derivata logaritmica?
- Cos'è una funzione razionale fratta?
- Prima di procedere con l'integrazione di una funzione del tipo  $P(x)/Q(x)$  con  $P, Q$  polinomi, in quali due possibili modi è opportuno riscriverla?
- Scrivere due famiglie di funzioni non razionali fratte che coinvolgono la funzione log e la funzione arctan le quali, integrate, conducono all'integrazione di funzioni razionali fratte.
- Dimostrare che gli integrali di funzioni del tipo

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{P(x)}{Q(x)} \right) \log \frac{R(x)}{S(x)}, \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{P(x)}{Q(x)} \right) \arctan \frac{R(x)}{S(x)}$$

si riducono all'integrazione di razionali fratte.

- Quale altra famiglia di funzioni abbiamo visto in classe, la cui integrazione si riconduce a quella di funzioni razionali fratte? (Descrivere la sostituzione necessaria in dettaglio.)

### Esercizi

- Svolgere tutti gli esercizi proposti nella pagine del libro trattate
- Calcolare  $\int \frac{dx}{x^2-x-6} dx$

- Calcolare  $\int (x^2 + 1) \log((x - 1)(x^2 + 1)) dx$  (conviene usare le proprietà del logaritmo)
- Calcolare  $\int \frac{dx}{9x^2 - 25}$  (soluzione  $\frac{1}{30} \log \left| \frac{3x-5}{3x+5} \right| + c$ )
- Calcolare  $\int \frac{dx}{x^2 - x - 6}$  (soluzione  $\frac{1}{5} \log |3 - x| - \frac{1}{5} \log |x + 2| + c$ )
- Calcolare  $\int \frac{dx}{2x^2 - 5x - 3}$  (soluzione  $\frac{1}{7} \ln \left| \frac{1-2x}{x+3} \right|$ )
- Calcolare  $\int \frac{dx}{x^2 + 8x + 16}$  (soluzione  $-\frac{1}{x+4} + c$ )
- Calcolare  $\int \frac{x^2}{4x^2 + 5} dx$  (soluzione  $\frac{x}{4} - \frac{1}{8} \sqrt{5} \arctan \left( \frac{2x}{\sqrt{5}} \right) + c$ )
- Calcolare  $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 3}$  (soluzione  $\frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \left( \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + c$ )
- Calcolare  $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$  (soluzione  $\arctan(x + 2) + c$ )
- Calcolare  $\int \frac{x}{x^2 + x + 2} dx$
- Calcolare  $\int \frac{x}{x^2 - 2x + 3} dx$
- Calcolare l'integrale della funzione  $\frac{2x+5}{x^2 - 4x + 5}$
- Calcolare l'integrale della funzione  $\frac{2x+5}{x^2 + 3x + 5}$
- Calcolare l'integrale della funzione  $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}(x^2+1)}$  (un passaggio intermedio è  $\frac{t}{\sqrt{2}(t^2 - \sqrt{2}t + 1)} - \frac{t}{\sqrt{2}(t^2 + \sqrt{2}t + 1)}$ )

**Esercizio 1** Calcolare l'integrale della funzione razionale fratta

$$\frac{2x^6 - x^5 - 5x^4 + 2x^3 + 4x^2 - x}{(x - 1)^3(x + 1)^2}$$

**Svolgimento.** Il numeratore ha grado (6) maggiore di quello del denominatore (5). Dividendo i polinomi si ottiene che il quoziente dei due polinomi si riscrive come

$$2x + 1 + \frac{1}{(x - 1)^3(x + 1)^2}.$$

L'integrale dei primi due termini è facile. Riscriviamo il terzo termine usando la scomposizione di Hermite

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x - 1)^3(x + 1)^2} &= \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{x + 1} + \frac{d}{dx} \left( \frac{Bx^2 + Cx + D}{(x - 1)^2(x + 1)} \right) = \\ &= \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{x + 1} + \frac{2Bx + C}{(x - 1)^2(x + 1)} - \left( \frac{Bx^2 + Cx + D}{(x - 1)^2(x + 1)} \right) \left( \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{x + 1} \right) = \\ &= \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{x + 1} + \frac{2Bx + C}{(x - 1)^2(x + 1)} - \left( \frac{Bx^2 + Cx + D}{(x - 1)^2(x + 1)} \right) \frac{3x + 1}{(x - 1)(x + 1)} = \\ &= \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{x + 1} + \frac{2Bx + C}{(x - 1)^2(x + 1)} - \frac{(Bx^2 + Cx + D)(3x + 1)}{(x - 1)^3(x + 1)^2} = \\ &= \frac{A_1(x - 1)^2(x + 1)^2 + A_2(x - 1)^3(x + 1) + (2Bx + C)(x - 1)(x + 1) - (Bx^2 + Cx + D)(3x + 1)}{(x - 1)^3(x + 1)^2} = \\ &= \frac{A_1(x^4 - 2x^2 + 1) + A_2(x^4 - 2x^3 + 2x - 1) + (2Bx + C)(x^2 - 1) - (Bx^2 + Cx + D)(3x + 1)}{(x - 1)^3(x + 1)^2}. \end{aligned}$$

Il coefficiente di  $x^4$  è  $A_1 + A_2$ , che quindi deve essere 0, ovvero  $A_2 = -A_1$ . Segue che l'espressione sopra diventa

$$\frac{A_1(2x^3 - 2x^2 - 2x + 2) + (2Bx + C)(x^2 - 1) - (Bx^2 + Cx + D)(3x + 1)}{(x - 1)^3(x + 1)^2} = \frac{x^3(2A_1 + 2B - 3B) + x^2(-2A_1 + C - B - 3C) + x(-2A_1 - 2B - C - 3D) + (2A_1 - C - D)}{(x - 1)^3(x + 1)^2},$$

da cui segue che  $B = 2A_1$ ,  $2C = -2A_1 - B = -4A_1$ , e quindi  $C = -2A_1$ ,  $3D = -2A_1 - 2B - C = -2A_1 - 4A_1 + 2A_1 = -4A_1$ , e finalmente che  $2A_1 + 2A_1 + \frac{4}{3}A_1 = 1$ .  
Ovvero  $A_1 = 3/16$ ,  $A_2 = -3/16$ ,  $B = 3/8$ ,  $C = -3/8$ ,  $D = -1/4$ .

In conclusione

$$\frac{1}{(x - 1)^3(x + 1)^2} = \frac{3}{16} \frac{1}{x - 1} - \frac{3}{16} \frac{1}{x + 1} + \frac{d}{dx} \left( \frac{\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}}{(x - 1)^2(x + 1)} \right),$$

e l'espressione di destra si può integrare facilmente così da ottenere che l'integrale cercato è

$$x^2 + x + \frac{3}{16} \log |x - 1| - \frac{3}{16} \log |x + 1| + \frac{1}{8} \frac{3x^2 - 3x - 2}{(x - 1)^2(x + 1)} + c.$$

□