

A) Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

1. $\int \frac{1}{2x^2 + 4x + 3} dx$
2. $\int \frac{1}{31 + 36x^2 - 60x} dx$
3. $\int x^3 \log(2x^2) dx$
4. $\int x^2 7^x dx$
5. $\int (x^3 + x)e^{-2x} dx$
6. $\int x^3 \sinh x dx$
7. $\int \frac{\log x}{\sqrt[4]{x}} dx$
8. $\int (x^{2013} + 4x^7 + x + \sqrt{x} + 1) \log(3x) dx$
9. $\int \log^2 x dx$
10. $\int x \sin^2 x dx$
11. $\int x^2 \sin(5x) dx$
12. $\int x^3 \cos x dx$
13. $\int \log(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) dx$
14. $\int \frac{x^5}{\sqrt{x^3 - 1}} dx$
15. $\int \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} dx$
16. $\int \frac{\tan^3 x + \tan x}{\tan x + 4} dx$
17. $\int e^{4x} \sin(x/3) dx$
18. $\int e^{2x} \cos(3x) dx$
19. $\int (\sin x)(\sinh x) dx$
20. $\int \arccos x dx$
21. $\int \arccos^2 x dx$ (sugg.: per parti + guardare esercizio 1 dell'appello 13/1/2012)

22. $\int (x^{2013} + 3x + 1) \log^2 x \, dx$
23. $\int \frac{x^2}{(\cos(x^3))^2 \cos^2(\tan(x^3))} \, dx$
24. $\int x e^{2x^2} \sin(x^2) \, dx$
25. $\int \frac{e^{\frac{2}{2+x}}}{(x+2)^3} \, dx$
26. $\int x^5 e^{-x^3} \, dx$ (sugg.: $x^5 = x^2 x^3$)
27. $\int \sqrt{5 - 9x^2 - 12x} \, dx$
28. $\int \sqrt{5 + 25x^2 + 10x} \, dx$
29. $\int \sqrt{40 + 14x + x^2} \, dx$
30. $\int \sqrt{x^2 + 2x + 5} \, dx$
31. $\int \sqrt{5x^2 - 30x + 29} \, dx$
32. $\int \frac{1}{\sqrt{5 - 9x^2 - 12x}} \, dx$
33. $\int \frac{1}{\sqrt{5 + 25x^2 + 10x}} \, dx$
34. $\int \frac{1}{\sqrt{40 + 14x + x^2}} \, dx$
35. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{x^2 - 3}} \, dx$
36. $\int \frac{1}{\sqrt{5x^2 + 30x + 61} + \sqrt{5x^2 + 30x + 29}} \, dx$

B) Calcolare i seguenti integrali definiti:

1. $\int_1^e \frac{1}{x(2 + \log^2 x)} \, dx$
2. $\int_0^1 \arctan(\sqrt{x}) \, dx$
3. $\int_1^2 \frac{e^{1/x^2}}{x^3} \, dx$
4. $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{1 - \sin x} \, dx$
5. $\int_0^{\log 2} e^{3x} \sin(4e^x) \, dx$

6. $\int_0^\pi x^2 \sin(3x) dx$
7. $\int_0^1 \frac{e^x}{\cosh^2(e^x)} dx$
(sugg.: posto $\tanh t := \frac{\sinh t}{\cosh t}$, verificare che $\tanh' = \frac{1}{\cosh^2}$)
8. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{12-4x^2}} dx$
9. $\int_0^1 \left(\frac{\arctan x}{\sqrt[4]{1+x^2}} \right)^4 dx$
10. $\int_0^{\pi/2} e^x \left| \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| dx$
11. $\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \sqrt{\left| \frac{\arcsin x}{1-x^2} \right|} dx$

C) Dimostrare che, se $\Delta = p^2 - 4q < 0$, allora

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q} dx = \frac{a}{2} \log(x^2+px+q) + \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \left(b - \frac{ap}{2} \right) \arctan \left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} \right) + c.$$

D) Si consideri la funzione $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$h(x) := \int_0^{x^3-9x} \frac{\arctan(t^2)}{e^t} dt.$$

Calcolare $h'(3)$. Studiare la monotonia di h e trovare tutti i punti di massimo e minimo relativo (sugg.: $\arctan y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 0$). Scrivere il polinomio di Taylor di grado 2 di $h(x)$ centrato in $x=3$, cioè il polinomio

$$h(3) + h'(3)(x-3) + \frac{h''(3)}{2}(x-3)^2.$$

Determinare l'intervallo massimale I contenente il punto $x=3$ nel quale h risulta invertibile; detta h^{-1} l'inversa di $h|_I$, si calcoli $(h^{-1})'(0)$.

E) Si consideri la funzione $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$h(x) := \int_1^{-x} \frac{e^t(t^2-4)}{t^2+1} dt.$$

Calcolare $h'(-1)$. Studiare la monotonia di h e trovare tutti i punti di massimo e minimo relativo. Scrivere il polinomio di Taylor di grado 2 di $h(x)$ centrato in $x=-1$. Determinare l'intervallo massimale I contenente il punto $x=-1$ nel quale h risulta invertibile; detta h^{-1} l'inversa di $h|_I$, si calcoli $(h^{-1})'(0)$.