

Esercizio 1 Dire dove esistono le derivate parziali rispetto ad x ed y , calcolarle e studiare la differenziabilità delle seguenti funzioni (dicendo eventualmente se sono di classe C^1):

- $f(x, y) = \sin(\cos(x - y^2))$;
- $f(x, y) = \arctan(x + y) - \frac{1}{x-y}$;
- $f(x, y) = \log(4 - xy)$;
- $f(x, y) = |x + y|$;
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$;
- $f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}$ (suggerimento: dopo aver calcolato le derivate parziali in $(0, 0)$, si dimostri che f è differenziabile in tale punto usando le coordinate polari);
- $f(x, y) = \frac{x^3 y^3}{2x^2 + 3y^4}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$ (suggerimento: si operi come per la funzione precedente);
- $f(x, y) = \frac{x^2 y^6}{x^8 + y^8}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$ (suggerimento: si verifichi che f non è continua nell'origine, ad esempio considerando la successione $(x_n, y_n) = (1/n, 1/n)$. Dunque f non è differenziabile in $(0, 0)$; ciononostante le derivate parziali rispetto ad x ed y esistono...).

Esercizio 2 Per ciascuna delle seguenti funzioni si determini il dominio e si dica dove sono differenziabili (una e/o due volte), si determinino i punti critici e se nel dominio (che risulterà aperto - verificare!) esistono massimi/minimi relativi e assoluti.

- $2x^3 + y^3 - 2x^2 - 3y$; $[f(x, 0) = \dots]$;
- $2x^2 + y^2 - 4y - x$; (m); (potrebbe essere utile completare i quadrati...);
- $(x^2 - 2y^2)e^x$; $[f(x, 0) = \dots; f(0, y) = \dots]$;
- $3y^4 - 9x^2y + x$; $[f(x, 0) = \dots]$;
- $x^2y + xy^2 - xy$; $[f(x, 1) = \dots; f(x, -1) = \dots]$;
- $x^2y - ye^y$; $[f(x, 1) = \dots; f(0, y) = \dots]$;
- $(x - 1)^{42} + y^{998}$; (m);
- $e^x - x + y^2 + y^3$; $[f(0, y) = \dots]$;

- $4x^4 - 16xy + x; \quad [f(1, y) = \dots];$
- $(x - y^2 + 1)(x + y^2 - 1); \quad [f(0, y) = \dots; f(x, 0) = \dots];$
- $x^2y^2 + x^4 - 1; \quad (\text{m});$
- $\sin(x + y) \cos(x - y); \quad (\text{m})(\text{M});$
- $x + \frac{1}{x} + y^2 + \frac{1}{y^2}; \quad [f(x, 1) = \dots];$
- $|x| + \frac{1}{|x|} + y^2 + \frac{1}{y^2}; \quad (\text{m}) \text{ (verificare che } t + \frac{1}{t} \geq 2 \forall t > 0);$
- $\sqrt{x^2 + y^2}; \quad (\text{m});$
- $|(e^x - 1)y^3|; \quad (\text{m});$
- $|x + \frac{1}{x}|(4y - y^4); \quad [f(x, 1) = \dots; f(1, y) = \dots];$
- $|x + \frac{1}{x}|(4y - y^4 - 4); \quad (\text{M: si verifichi che } 4y - y^4 - 4 \leq -1) \quad [f(1, y) = \dots];$
- $x^2 + xy + y^2 + \frac{3}{8}y^4; \quad (\text{m}); \quad (\text{suggerimento: } x^2 + xy + y^2 = (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2).$

Sono fornite le risposte relative ai quesiti sull'esistenza dei massimi/minimi assoluti.

Legenda: il simbolo “(m)” indica che la funzione ammette uno o più minimi assoluti, il simbolo “(M)” che la funzione ammette uno o più massimi assoluti. L'assenza di simboli indica che la funzione non ha né massimi né minimi assoluti.

Tra parentesi quadre si trovano piccoli suggerimenti per capire se possano verificarsi $\sup\{f(x, y) : (x, y) \in \text{dom } f\} = +\infty$ e/o $\inf\{f(x, y) : (x, y) \in \text{dom } f\} = -\infty$.