

Istituzioni di Analisi 2

(programma, domande ed esercizi)

nona settimana

Argomenti trattati

Dal libro di testo: 13.2 (punti critici vincolati), 13.3.1 (estremi assoluti), 10.3.1 e 10.3.2 (solo la definizione di compatto e l'esistenza di massimi e di minimi).

Domande di teoria

- Cosa si intende per *vincolo*?
- Data una funzione $g(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, come si chiama l'insieme di livello $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$?
- Potete portare come esempi due famiglie di insiemi di livello ragionevolmente facili da disegnare? Che curva producono? (sugg. $y - \dots$ ed $y^2 - \dots$)
- Sia dato un vincolo $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$. In cosa consiste una parametrizzazione del vincolo?
- Data una funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e la parametrizzazione di un vincolo $\gamma(t)$, come si possono studiare i punti critici di $f|_E$ (f ristretta al vincolo)?
- In che modo si possono caratterizzare i punti critici di $f|_E$ in assenza di parametrizzazione?
- Quale sistema di equazioni viene chiamato *metodo dei moltiplicatori di Lagrange*?
- Cosa è la Lagrangiana di una funzione f vincolata alla curva $E = \{g = 0\}$, e come la Lagrangiana è legata al metodo dei moltiplicatori di Lagrange
- Cosa è un compatto?
- Che proprietà hanno le funzioni continue su di un compatto?
- Una volta noti i punti critici di una funzione vincolata o definita in un dominio con frontiera, come si determina il massimo e minimo assoluto (in classe chiamato *globale* per distinguerlo da massimo e minimo *locale*)

Esercizi

- Fate gli esercizi del libro nei capitoli trattati
- Sfruttiamo ancora una volta gli esercizi svolti proposti dal Prof. Fabio Nicola, del Politecnico di Torino: http://calvino.polito.it/~nicola/analisi-II/Esercizi%20svolti%20e%20Temi%20d%27esame/Esercizi/svol_max_min_assoluti.pdf
- ed <http://calvino.polito.it/~camporesi/max-minvincolati1.pdf>
- alcuni esercizi (gran parte svolti in classe)

Esercizio 1 *Si calcoli l'integrale indefinito*

$$\int \frac{x^5 - x^3}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$$

(la funzione integranda è definita quando $x > 1$ od $x < -1$). Si dica perché l'integrale converge quando $x \rightarrow 1^+$. Si calcoli infine l'integrale definito

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{x^5 - x^3}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$$

Esercizio 2 *Si calcoli l'integrale definito*

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x \cos x}{(1 - 2 \sin^2 x)^2} dx.$$

In che punto l'integrale diventa improprio? Converge se ci si avvicina a quel punto?

Una primitiva della funzione integranda è $\frac{1}{4 \cos^2(x) - 4 \sin^2(x)}$. Calcolata negli estremi proposti si ottiene $1/4$. In realtà non occorre calcolare la primitiva, ma semplicemente sostituire la variabile $y = \sin x$, $dy = \cos x dx$ e cambiare gli estremi di integrazione in $0, 1/2$.

L'integrale diventa improprio quando x si avvicina a $\pm\pi/4$. In tale punto uno sviluppo in serie di Taylor mostra che il denominatore è asintotico a $1/(2(\pi/4 - x))$. Quindi, scordandosi tutte le costanti, la funzione integranda si comporta come $1/x^2$ in zero, che diverge.

Esercizio 3 *(svolto in classe) Stabilire per quali valori del parametro reale α la serie*

$$\sum \frac{1}{n^{3\alpha}} \left(\log \left(1 + \frac{n+1}{n^5 + 2n^3} \right) \right)^{\alpha^2}$$

risulta convergente.

Si usa il fatto che $\log(1+x) \sim x$ quando x tende a zero. Quindi $\log \left(1 + \frac{n+1}{n^5 + 2n^3} \right) \sim \frac{1}{n^4}$.

Segue che la serie è asintotica a $\frac{1}{n^{3\alpha+4\alpha^2}}$, e converge se e solo se $3\alpha + 4\alpha^2 > 1$.

Risolvendo il polinomio di secondo grado si ottiene $\alpha > 1/4$ ed $\alpha < -1$.

Esercizio 4 *(svolto in classe) Stabilire per quali valori del parametro reale α la serie*

$$\sum \frac{1}{n^{3\alpha}} \left(\log \left(1 + \frac{n^5 + 2n^3}{n+1} \right) \right)^{\alpha^2}$$

risulta convergente.

Questo esercizio ha uno svolgimento completamente diverso dal precedente. Infatti quando n tende a $+\infty$ l'argomento del logaritmo non tende ad 1, ma a $+\infty$. L'argomento del logaritmo è infatti asintotico a n^4 , quindi il logaritmo è asintotico a $4 \log n$.

Si potrebbe ottenere questo fatto scrivendo esplicitamente

$$\log \left(1 + \frac{n^5 + 2n^3}{n+1} \right) = \log \left(\frac{n^5 + 2n^3 + n + 1}{n+1} \right) = \log \left(\frac{n^5}{n} \frac{1 + 2n^{-2} + n^{-4} + n^{-5}}{1 + n^{-1}} \right) = \log(n^4) + \log \left(\frac{1 + 2n^{-2} + n^{-4} + n^{-5}}{1 + n^{-1}} \right).$$

La prima funzione è asintotica a $4 \log x$, la seconda tende a zero. Siccome il logaritmo niente può contro le potenze, ed $\alpha^2 \geq 0$ la serie converge se e solo se $3\alpha > 1$ ed anche quando $\alpha = 1/3$ il logaritmo non può agevolare la convergenza (si ricordi l'argomento sulla convergenza dell'integrale $1/(x \log^\beta(x))$).

Esercizio 5 Si determinino gli α reali per i quali la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sin \left(\frac{2 + k^2}{k^6 + k^5 + 4} \right) \right)^{\alpha^2} \left(e^{\frac{k+1}{k^4+4}} - 1 \right)^\alpha$$

è convergente.

Esercizio 6 (svolto in classe) Si determinino gli α reali per i quali la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{3k + k^2}{k^4 + 1} \right) \left(\sin \frac{1}{k} \right)^\alpha$$

è convergente.

Il termine generico del coseno e quello del seno tendono entrambe a 0 quando k tende ad infinito. Quindi si può usare il fatto che $\sin y \sim y$ ed $1 - \cos y \sim y^2/2$. Si deduce che il termine generico della serie è asintotico a

$$\frac{1}{2} \left(\frac{3k + k^2}{k^4 + 1} \right)^2 \frac{1}{k^\alpha} = \frac{k^4}{k^8 k^\alpha} \left(\frac{\frac{3}{k} + 1}{1 + \frac{1}{k^4}} \right)^2 \sim \frac{1}{k^{4+\alpha}}$$

Segue che la serie converge se e solo se $4 + \alpha > 1$, ovvero se e solo se $\alpha > -3$.

Esercizio 7 (svolto in classe) Si determinino gli x reali per i quali la serie

$$\sum \frac{1}{4^k} (1 - \sin x)^{2k}$$

converge assolutamente, e quelli per i quali la convergenza è solo semplice.

Riscrivendo la serie come $\sum \frac{1}{4^k} ((1 - \sin x)^2)^k$ si riconosce che la serie è una serie di potenze del tipo $\sum a_k y^k$ con $a_k = 1/4^k$ e con $y = (1 - \sin x)^2$.

Il raggio di convergenza della serie è il reciproco del limite (se esiste) $\lim \sqrt[k]{1/4^k} = 1/4$. Quindi è 4.

La serie converge assolutamente quando $y = (1 - \sin x)^2$ appartiene all'intervallo $] -4, 4[$, ovvero quando $-2 < 1 - \sin x < 2$, ovvero quando $-3 < -\sin x < 1$, ovvero quando $-1 < \sin x < 3$. Segue che la serie converge assolutamente sempre a parte quando $x = \pi + 2k\pi$. In quel caso la serie diventa $\sum \frac{1}{4^k} (4)^{2k} = \sum 1$, che diverge a $+\infty$.

Esercizio 8 (svolto in classe) Si studino i massimi e minimi della funzione $f(x, y) = x^3 - 3x + 3y^2$ nella regione $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 3\}$

Si deve studiare la funzione separatamente in D° ed in ∂D . Nel primo caso si pone uguale a zero $\nabla f = (3x^2 - 3, 6y)$, e si ottiene che $y = 0$, $x = \pm 1$.

Da uno studio della Hessiana

$$\begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

si ha che $C_1 = (1, 0)$ è minimo locale mentre $C_2 = (-1, 0)$ è sella.

Consideriamo invece f ristretta a ∂D . Il gradiente dell'equazione che definisce tale insieme è proporzionale al vettore (x, y) , e si ottiene quindi il sistema

$$\begin{cases} 3x^2 - 3 = \lambda x \\ 6y = \lambda y \\ x^2 + y^2 = 3. \end{cases}$$

Dalla seconda si ottiene che $y = 0$ oppure che $\lambda = 6$. Nel primo caso si ha che $x = \pm\sqrt{3}$ e la prima equazione ha per soluzione $\lambda = 2$, quindi si hanno due punti critici

$$C_3 = (\sqrt{3}, 0), \quad C_4 = (-\sqrt{3}, 0).$$

Nel secondo caso si ha che $x^2 - 1 = 2x$, ovvero che $x = 1 \pm \sqrt{2}$, e quindi $y^2 = -1 - 2 \mp 2\sqrt{2} + 3 = \mp 2\sqrt{2}$. Segue che ci sono altri due punti critici

$$C_5 = (1 - \sqrt{2}, \sqrt{2}\sqrt[4]{2})$$

$$C_6 = (1 - \sqrt{2}, -\sqrt{2}\sqrt[4]{2}).$$

I valori della funzione in tali punti critici è rispettivamente

$$f(C_1) = -2, \quad f(C_3) = f(C_4) = 0,$$

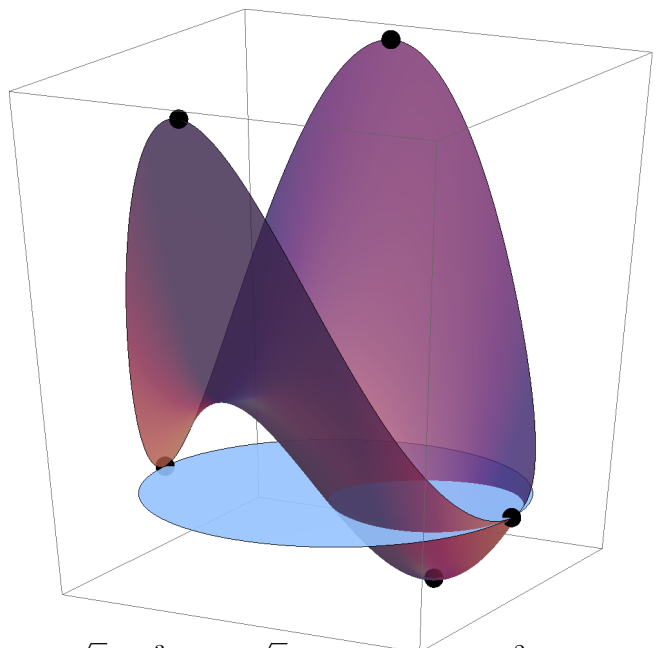
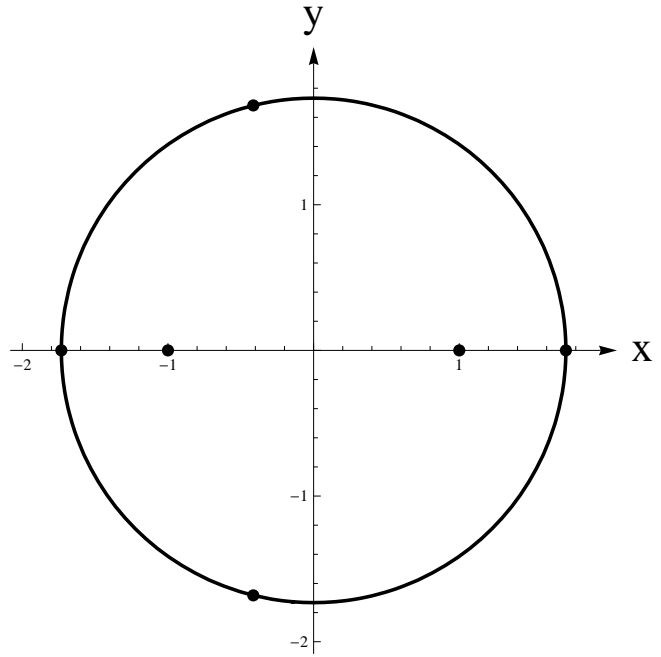
$$f(C_5) = f(C_6) = 4(1 + \sqrt{2})$$

Segue che C_1 è minimo globale, C_5 e C_6 sono massimi locali, C_2 è sella, mentre C_3 e C_4 necessiterebbero di ulteriori investigazioni.

Osservate che la matrice Hessiana è stata usata **solo** per i punti interni, e non per i punti di frontiera. Per analizzare localmente i punti critici di frontiera avremmo dovuto trattare la sezione 13.3.2 del libro.

Volendo si può parametrizzare la circonferenza con $\vartheta \rightarrow (\sqrt{3} \cos \vartheta, \sqrt{3} \sin \vartheta)$ e scoprire che

$$f(\vartheta) = 3\sqrt{3} \cos^3 \vartheta - 3\sqrt{3} \cos \vartheta + 9 \sin^2 \vartheta = 3\sqrt{3} \cos^3 \vartheta - 3\sqrt{3} \cos \vartheta + 9 - 9 \cos^2 \vartheta.$$



Possiamo quindi studiare i punti critici del polinomio cubico

$$y^3 - \sqrt{3}y^2 - y + \sqrt{3} = (y - \sqrt{3})(y^2 - 1)$$

e quindi scoprire che la funzione ristretta alla circonferenza ha nei punti critici C_3, C_4 dei minimi locali, ma come si desume dalla figura uno dei due non è minimo locale per la funzione f .

Esercizio 9 Sia $f(x, y) = \sin x + \sin y$. Calcolare gli estremi assoluti di f sotto la condizione $\cos y = 1 + \cos x$ ($\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$, $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta$)

Il gradiente della funzione f è $(\cos x, \cos y)$.

Il gradiente della funzione che definisce il vincolo è il vettore

$$(2 \cos(x/2) \sin(x/2), -\sin y).$$

Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange porta alle tre equazioni

$$\begin{cases} \cos x = \lambda \sin x \\ \cos y = -\lambda \sin y \\ \cos y = 2 \cos^2(x/2) \end{cases}$$

I due vettori sono paralleli solo quando, usando la prima equazione, $x \neq k\pi$ e $\lambda = \cot x$. Sostituendo nella seconda equazione si ha che $\cos y = -\cot x \sin y$, ovvero $\tan x = -\tan y$, che vuol dire $y = -x$ oppure $y = -x + \pi$.

Usando quindi il vincolo si ha che $\cos x = 1 + \cos x$, oppure $-\cos x = 1 + \cos x$. Nel primo caso non ci sono soluzioni, nel secondo ci sono i punti $\cos x = -1/2$, ovvero $x = \pm 2\pi/3$. Questo porta ai 2 punti critici

$$C_1 = (\frac{2}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi), \quad C_2 = (-\frac{2}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi) = (\frac{4}{3}\pi, -\frac{1}{3}\pi)$$

Il valore della funzione nei punti critici è $\sqrt{3}$ nel primo e $-\sqrt{3}$ nel secondo. Si sono quindi determinati i punti di massimo e minimo assoluti.

