

Istituzioni di Analisi 2

(programma, domande ed esercizi)

settimana settimana

Argomenti trattati

Dal libro di testo: Capitoli 10.1, Sezioni 10.2.1, 10.2.2, 10.2.3, 10.3 fino a 10.3.2 escluso (non abbiamo per ora parlato di massimo locale ed abbiamo trattato solo il caso di funzioni a valori in \mathbb{R} ; non abbiamo discusso a fondo il concetto di successioni in \mathbb{R}^2 e la loro utilità nel calcolo dei limiti), 10.4 (senza connessione per archi, e senza sezione 10.4.2)

Domande di teoria

- Cosa sono le funzioni di più variabili?
- Cosa è il *dominio* (o *dominio naturale*) di una funzione?
- Cosa sono l'interno, la chiusura, la frontiera, i punti interni, i punti di frontiera, i punti di accumulazione di un sottoinsieme di \mathbb{R}^2 ?
- Cosa è il prodotto scalare? E la norma? Ed una palla di raggio r centrata in un punto x_0 ?
- Cosa dice la disuguaglianza triangolare?
- Che identità vale per $|\langle x, y \rangle|$?
- Cosa sono i sottoinsiemi limitati di \mathbb{R}^2 . Hanno qualche proprietà utile relativa all'esistenza di punti di accumulazione?
- Cosa rappresenta il simbolo ∞ ? Come si caratterizzano i punti del piano *vicini* ad ∞ ?
- Cosa dice la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz?
- Dare la definizione di limite di una funzione $f(x)$ per x che tende ad x_0 . Saper scrivere in formula cosa questo vuol dire quando x_0 è un punto del piano od il simbolo ∞ e quando il limite ℓ è un numero reale od il simbolo $\pm\infty$.
- Quando una funzione f è continua in un punto $x_0 \in D_f$? (Con D_f si intende il dominio di f .)
- Esistono dei punti in cui una funzione f si può dire continua con una indagine superficiale? In quali punti bisogna approfondire l'indagine?
- Enunciare il *teorema ponte* (10.16 di pag. 323 del libro).

- In che modo si può usare il teorema ponte?
- Cosa sono le coordinate polari? In che modo si usano per studiare i limiti di funzioni (Teorema 10.17, pag 325 del libro)?
- (difficile) Il Teorema 10.16 di pag. 323 del libro è efficace per calcolare i limiti variando l'enunciato nel seguente modo: Se esiste un insieme *finito* A_1, \dots, A_n tale che $A_1 \cup \dots \cup A_n = D_f$ e tale che $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in A_i} f(x) = \ell$ per ogni i allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$. Riuscite ad immaginare il passo fondamentale della dimostrazione con gli ε, δ ?
- (difficile) Il *Teorema del limite di funzione composta* (Teorema 3.22 di pag. 93 del libro) vale anche quando lo spazio non è 1-dimensionale. Generalizzate il teorema stando attenti a come si compongono le funzioni e, se volete, trasponete la dimostrazione al caso più generale.
- Capire come si applica quanto detto nei due punti sopra all'esercizio 10.16.g di pagina 329 del libro.

Esercizi

Fare gli esercizi del libro nelle sezioni svolte. Segue una selezione di alcuni esercizi con svolgimento.

Esercizio 1 Si calcoli

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy} - \cos(2xy)}{x^2 - x^4 + |y|}$$

Il dominio della funzione è il complemento dell'insieme $|y| = x^2(x^2 - 1)$, che consiste nel punto $(0, 0)$ e nelle due curve con punto angoloso in figura. All'interno del rettangolo $(-1, 1) \times (-1, 1)$ la funzione è quindi definita ovunque fuorché nell'origine. Inoltre in tale rettangolo, essendo $|x| < 1$ si ha che $x^4 \leq x^2$ ovvero $x^2 - x^4 \geq 0$ ovvero $x^2 - x^4 + |y| \geq |y|$. Si può quindi ottenere la maggiorazione

$$\left| \frac{e^{xy} - \cos(2xy)}{x^2 - x^4 + |y|} \right| \leq \left| \frac{e^{xy} - \cos(2xy)}{y} \right|.$$

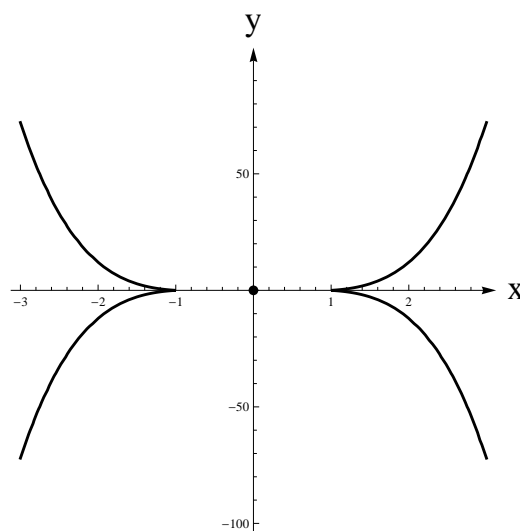
Studiamo quest'ultima funzione (all'interno del valore assoluto). Si ha che

$$\frac{e^{xy} - \cos(2xy)}{y} = \frac{e^{xy} - 1}{xy}x + \frac{1 - \cos(2xy)}{xy}x.$$

Quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ il primo termine tende a $1 * 0 = 0$ (per il teorema del limite delle funzione composte e ricordando che $(e^t - 1)/t \rightarrow 1$) mentre il secondo tende a $0 * 0 = 0$. Segue che entrambe i termini tendono a zero, e quindi che il limite della funzione è 0.

Esercizio 2 Si calcoli

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sin(15x^2 + 2y)(x^2 + y^2)$$



Questo limite si dimostra essere zero semplicemente osservando che, siccome $|\sin(7xy)| \leq 1$, allora

$$|\sin(15x^2 + 2y)(x^2 + y^2)| \leq x^2 + y^2.$$

Al tendere di (x, y) a zero la norma di (x, y) tende a zero, e quindi il limite è zero.

Esercizio 3 *Si calcoli*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2y)}{x^2 + y^2}$$

Quando x od y sono zero la funzione è costantemente nulla. Restringiamoci quindi all'interno dei quattro quadranti (il complemento degli assi) ed osserviamo che

$$\frac{\sin(x^2y)}{x^2 + y^2} = \frac{\sin(x^2y)}{x^2y} \frac{x^2y}{x^2 + y^2}$$

Al tendere di (x, y) a $(0, 0)$ si ha che la prima funzione tende ad 1 mentre, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, la seconda funzione tende a zero. Infatti

$$\left| \frac{x^2y}{x^2 + y^2} \right| \leq |x| \frac{x^2 + y^2}{2(x^2 + y^2)}$$

Al tendere di (x, y) a zero la norma di (x, y) tende a zero, e quindi il limite è zero.

Esercizio 4 *Si calcoli*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(xy)}{x^2 + y^2}$$

Quando x od y sono zero la funzione è costantemente nulla. Restringiamoci quindi all'interno dei quattro quadranti (il complemento degli assi) ed osserviamo che

$$\frac{1 - \cos(xy)}{x^2 + y^2} = \frac{1 - \cos(xy)}{xy} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Al tendere di (x, y) a $(0, 0)$ si ha che la prima funzione tende a 0 mentre, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, la seconda funzione è limitata da $1/2$. Infatti

$$\left| \frac{xy}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{x^2 + y^2}{2(x^2 + y^2)} = \frac{1}{2}$$

Si ha quindi che al tendere di (x, y) a zero la funzione tende a 0.

Esercizio 5 *Si calcoli*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(7xy)}{x^2 + y^2}$$

In questo caso mettendo assieme l'informazione che $\sin(7xy)/(7xy)$ tende ad 1 con quella che $(7xy)/(x^2 + y^2)$ non ammette limite, si riesce a concludere che la funzione non ammette limite. In modo più esplicito si può osservare che avvicinare l'origine lungo rette $y = mx$ produce il valore limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(7mx^2)}{(1 + m^2)x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(7mx^2)}{7mx^2} \frac{7mx^2}{(1 + m^2)x^2} = \frac{7m}{1 + m^2}.$$

Essendo questi valori dipendenti da m si conclude che il limite non esiste.

Esercizio 6 *Si calcoli*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin^2(xy)}{3x^2 + 2y^2}$$

In questo caso $\sin^2(xy) \approx x^2 y^2 \leq (x^2 + y^2)^2/4$ (abbiamo usato la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). Inoltre il denominatore $3x^2 + 2y^2 \geq 2x^2 + 2y^2$ e quindi

$$\frac{\sin^2(xy)}{3x^2 + 2y^2} \leq \frac{(x^2 + y^2)^2}{8(x^2 + y^2)},$$

funzione che tende chiaramente a zero.

Esercizio 7 *Si calcoli*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^4 - y^4}$$

Innanzitutto è indispensabile osservare che la funzione non è definita sulle due bisettrici, ovvero quando $y = \pm x$, mentre quando $x = 0$ la funzione vale costantemente -1 , e quando $y = 0$ la funzione vale costantemente 1 . Segue immediatamente che la funzione non può ammettere limite.

Esercizio 8 *Si calcoli*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$$

In questo caso la funzione è definita ovunque fuorché nell'origine. Separando la somma al numeratore ed usando le ovvie disequazioni $x^2 + y^2 \geq x^2$, $x^2 + y^2 \geq y^2$ si ha che

$$\frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} = \frac{x^4}{x^2 + y^2} + \frac{y^4}{x^2 + y^2} \leq \frac{x^4}{x^2} + \frac{y^4}{y^2} \leq x^2 + y^2.$$

Segue quindi che il limite di questa funzione è zero.

Esercizio 9 *Si calcoli*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x + 5y}{x^2 - y^2}$$

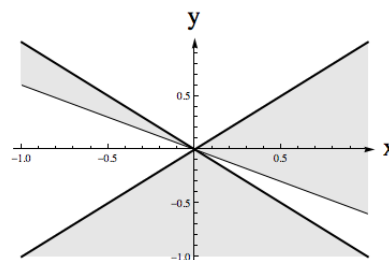
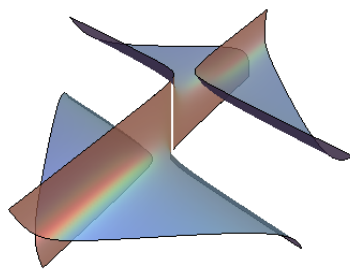
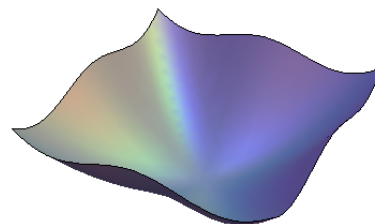
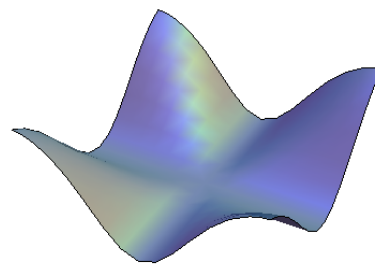
Anche in questo caso è indispensabile osservare che la funzione non è definita sulle due bisettrici. Avvicinando l'origine lungo rette $y = mx$ (con $m \neq \pm 1$) si ha che la funzione diventa

$$\frac{(3 + 5m)x}{(1 - m^2)x^2} = \frac{(3 + 5m)}{(1 - m^2)} \frac{1}{x}.$$

Si osserva quindi che la funzione

è costantemente nulla lungo la retta $y = -3/5x$, mentre diverge sempre avvicinandosi lungo altre rette, ma diverge a $+\infty$ quando $(3 + 5m)(1 - m^2) > 0$ mentre diverge a $-\infty$ quando $(3 + 5m)(1 - m^2) < 0$.

Se avessimo deciso di restringere la funzione ai settori colorati in grigio rispettivamente lasciati in bianco (ad esempio aggiungendo al testo dell'esercizio una descrizione esplicita del dominio in cui vogliamo studiare la funzione) avremmo potuto dire che la funzione diverge a $+\infty$ rispettivamente a $-\infty$.



Esercizio 10 *Si calcoli*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}$$

La funzione non è definita per $x = y$. Restringendosi a rette $y = mx$ si ottiene la funzione costante $(1+m)/(1-m)$. Quindi il limite non è definito.

Esercizio 11 *Si dica per quali α esiste il limite della funzione*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 - 2x + 1)y}{((x-1)^2 + y^2)^\alpha}$$

Passando in coordinate polari centrate in $(1, 0)$, ovvero $x = 1 + \rho \cos \vartheta$, $y = \rho \sin \vartheta$ si ha che la funzione diventa $\rho^{3-2\alpha} \sin(\vartheta) \cos^2(\vartheta)$. Lo studio della funzione data vicino all'origine corrisponde allo studio della funzione appena scritta attorno all'asse $\rho = 0$.

È evidente che quando $\alpha < 3/2$ allora la funzione tende a zero quando ρ tende a zero, quando $\alpha = 3/2$ allora la funzione assume una varietà di valori diversi quando ρ tende a zero, quando infine $\alpha > 3/2$ la funzione tende a $\pm\infty$ con l'eccezione di particolari valori di ϑ . Quindi il limite esiste solo quando $\alpha < 3/2$ e non esiste per $\alpha \geq 3/2$.

Sotto sono disegnati i grafici della funzione nelle coordinate x, y (centrate in $(1, 0)$) e nelle coordinate ρ, ϑ (con $\rho = 0$ nel lato sinistro dei grafici)

