

Esercizio 1 Stabilire se le seguenti serie sono convergenti e/o assolutamente convergenti (sono fornite alcune soluzioni):

- $\sum_{k=1}^{\infty} 1/\sqrt[k]{k}$;
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k7^k}{5^k+k^k}$;
- $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k+2}}$;
- $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin(1/k)$;
- $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (\sqrt[k]{3} - 1)$ (sugg.: $\sqrt[k]{3} - 1 = e^{\frac{\log 3}{k}} - 1 \sim \dots$) (C.) ;
- $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (1 - \cos(1/k))$ (A.C.) ;
- $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k+7}{k^2+1}$;
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2-7}{3+k^3}$;
- $\sum_{k=1}^{\infty} e^{1/k} - 1 - \frac{1}{k}$ (A.C.) ;
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{k})}{k}$;
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{k^2}$;
- $\sum_{k=1}^{\infty} k^2/3^k$;
- $\sum_{k=1}^{\infty} (2k)!/(k!)^2$ (N.C.) ;
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k}$ (A.C.) ;
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k k!}{k^k}$ (N.C.) ;
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{100}}{3^k \log k}$;
- $\sum_{k=1}^{\infty} 1/(\log k)^k$;
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cosh(2k)}{e^k}$ (N.C.);
- $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k \sin^2(1/k)$ (C.);
- $\sum_{k=2}^{\infty} \cos(k\pi) \arctan(\frac{k+3}{k^2-1})$ (C.);
- $\sum_{k=1}^{\infty} \cos(k\pi) \arctan(e^{-k})$ (A.C.);
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log(k^2)}{k}$ (N.C.) ;

- $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\log(k^2)}{k}$ (C.);
- $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k} - 1)$ (N.C.);
- $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{\sqrt[k]{k}} - 1)$ (A.C.);
- $\sum_{k=1}^{\infty} [\sin(\frac{k^7+2}{k^{10}+k^8})]^{5/3} / [\log(\frac{k(k^2+3k)}{k^3+k^2})]$ (A.C.) ;
- $\sum_{k=1}^{\infty} [1 - \cos(\frac{\sqrt{k}}{k+2})] / \sqrt[100]{k}$ (A.C.) ;
- $\sum_{k=1}^{\infty} k^{999999} (e^{(e^{-k})} - 1)$ (A.C.) ;
- $\sum_{k=1}^{\infty} \log(1 + \sin(\frac{k^{2013}}{1+e^k}))$ (A.C.) ;
- $\sum_{k=1}^{\infty} \log(1 + \sin(\frac{k^{2013}}{1+k^{2014}}))$ (N.C.) ;
- $\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{2 \sinh k}{e^k})^k$ (sugg.: dimostrare che $\lim_{k \rightarrow \infty} (\frac{2 \sinh k}{e^k})^k = 1$) (N.C.) ;
- $\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{2 \sinh k}{e^k})^{e^{2k}}$ (sugg.: dimostrare che $\lim_{k \rightarrow \infty} (\frac{2 \sinh k}{e^k})^{e^{2k}} = 1/e$) (N.C.);
- $\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{2 \sinh k}{e^k})^{ke^{2k}}$ (sugg.: usare il criterio della radice) (A.C.).

Legenda: A.C.= assolutamente convergente; C.= convergente, ma non assolutamente convergente; N.C.=non convergente.

Esercizio 2 Dire per quali valori del parametro $x \in \mathbb{R}$ le seguenti serie risultano convergenti:

- $\sum_{k=1}^{\infty} 5^k x^k$ (sol: $-\frac{1}{5} < x < \frac{1}{5}$) ;
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k} x^k$ (sol: $-\frac{1}{5} \leq x < \frac{1}{5}$) ;
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k^2} x^k$ (sol: $-\frac{1}{5} \leq x \leq \frac{1}{5}$) ;
- $\sum_{k=1}^{\infty} (e^{1/k} - x)$ (sol: nessun x) ;
- $\sum_{k=1}^{\infty} (e^{1/k} - x - \frac{1}{k})$ (sol: $x = 1$) ;
sugg.: per il caso $x = 1$ può tornare utile lo sviluppo di Mac Laurin di $e^t - 1 - t$;
- $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (e^{1/k} - x)$ (sol: $x = 1$) ;
- $\sum_{k=1}^{\infty} (\sin \frac{1}{k} - \frac{x}{k})$ (sol: $x = 1$)
sugg.: per il caso $x = 1$ può tornare utile lo sviluppo di Mac Laurin di $\sin t - t$;

- $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{x}{k})$ (sol: $\forall x$) ;
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k^2}} (x^2 + 2x)^k$ (sol: $-\sqrt{2} - 1 \leq x < -1$ oppure $-1 < x \leq \sqrt{2} - 1$) ;
- $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\cosh kx}{e^k} \right)^k$ (sol: $-1 \leq x \leq 1$) ;
- $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2 \cosh kx}{e^k} \right)^k$ (sol: $-1 < x < 1$) ;
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k \sqrt[3]{k}} (x^3 + 1)^k$ (sol: $-\sqrt[3]{3} \leq x < 1$) ;
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k^3} (x^3 + 1)^k$ (sol: $-\sqrt[3]{3} \leq x \leq 1$) ;
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k} \left(\frac{x+2}{x} \right)^k$ (sol: $-3 < x \leq -\frac{3}{2}$).

Si dica anche per quali x le serie proposte risultano assolutamente convergenti.

Esercizio 3 Si dica per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ le serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{1/k} - 1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{3!k^3} \right)^{\alpha}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\tan\left(\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k} \right)^{\alpha}$$

risultano convergenti. Suggerimento: si utilizzino gli sviluppi di Mac Laurin di $e^t - 1 - t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3!}$ e $\tan t - t$.

Soluzione: rispettivamente, $\alpha > 1/4$ e $\alpha > 1/3$.