

Esercizio 1 Stabilire il carattere delle seguenti serie:

- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$;
- $\sum_{k=1}^{\infty} \sin(1/k)$;
- $\sum_{k=1}^{\infty} \sin^2(1/\sqrt{k})$;
- $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{1}{\sqrt{k}})$;
- $\sum_{k=1}^{\infty} \log(1 + \frac{1}{k})$;
- $\sum_{k=1}^{\infty} \log(1 + \frac{1}{k^2})$;
- $\sum_{k=1}^{\infty} \log(1 + \sin(1/k^{3/2}))$;
- $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\cosh k}{e^k}$;
- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k - k}$;
- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{99^k}{100^k + k}$;
- $\sum_{k=1}^{\infty} (e^{1/k} - 1)^2$;
- $\sum_{k=1}^{\infty} (e^{1/\sqrt{k}} - 1)^2$;
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^k - 1}$;
- $\sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{k}{k^{2013} + 1}}$;
- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 - 5}{k^3 + k^2 + 1}$;
- $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k^2 - 5}{k^3 + k^2 + 1} \right)^{3/2}$;
- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3 - 5}{k^5 + 1}$;
- $\sum_{k=1}^{\infty} k^3 \sin(1/\sqrt{k^3}) \log(1 + \frac{k+1}{k^3 + k^4})$;
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tan^{\alpha}(1/k)}{\arctan(1/k)}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
- $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{k})^k$; (sugg.: testare la condizione necessaria per la convergenza)
- $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k^2 + 1}{2(k+3)^2} \right)^k$ (sugg.: confronto asintotico con $\sum_{k=0}^{\infty} (1/2)^k$).

Esercizio 2 Dire per quali valori del parametro $x \in \mathbb{R}$ le seguenti serie risultano convergenti:

- $\sum_{k=0}^{+\infty} (2 \sin x)^k$;
- $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{x^2+1}{6x} \right)^k$;
- $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{x+1}{x^2-4} \right)^k$;
- $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^x+k}{e^{2x+k}}$;
- $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sinh[\arctan(\log(1+x^2))] + k}{|x|+k^3}$.

Esercizio 3 Si determini, al variare dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, il carattere della serie $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha (\log k)^\beta}$. Suggerimento: usare il criterio del confronto integrale e ricordare un esercizio “simile” sugli integrali impropri visto a lezione.

Esercizio 4 Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ i seguenti integrali impropri/serie risultano convergenti (tra parentesi le soluzioni):

- $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{\sqrt{|x-3|}} \left(\frac{\sqrt{x}+x+1}{x^2\sqrt{x+2}} \right)^{\alpha^2} dx \quad (-1 < \alpha < -\frac{1}{3} \text{ oppure } \alpha > 1)$;
- $\int_1^{+\infty} (e^{1-\cos(\frac{1}{x+\sqrt{x}})} - 1)^\alpha dx \quad (\alpha > 1/2)$;
- $\int_1^{+\infty} x^{2\alpha} \left[\sin \left(\frac{2+x\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x^2+7)} \right) \right]^{\alpha^2} (1 - \cos \frac{1}{x}) dx \quad (\alpha \neq 1)$;
- $\int_1^{+\infty} \frac{(e^{\sin(1/x)} - 1)^{\alpha^3}}{\log \left(\frac{x^8+x+1}{x^8} \right)} dx \quad (\alpha > 2)$

(Suggerimento: si scriva l'argomento del logaritmo nella forma $1 + \dots$);

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+\sqrt{k}}{k^2} \left[\log \left(1 + \frac{k^{13}}{k^{2013}+3} \right) \right]^\alpha (1 - \cos(e^{1/k} - 1))^{-1000} \quad (\alpha > 1)$;
- $\sum_{k=4}^{\infty} \sqrt[4]{\frac{k^{3\alpha}}{k^3-3}} \left[k \sin \left(\frac{1}{k^2+\sqrt{k}} \right) \right]^{\alpha^2} \quad (\alpha > 1 \text{ oppure } \alpha < -1/4)$;
- $\sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha \sin \log \left(1 + \frac{k^2+7}{k^3\sqrt{k}} \right) \quad (\alpha < 1/2)$;
- $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{k+\log k} \right)^{\alpha^3} \left(e^{\frac{k}{k^2+2}} - 1 \right)^{-\alpha} \sqrt{1 - \cos \frac{1}{k}} \quad (\alpha > 1 \text{ oppure } -1 < \alpha < 0)$.