

Esercizio 1 Stabilire il carattere della serie $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}(\log k)^{\beta}}$ al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Suggerimento: ricordare cosa succede per $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}(\log x)^{\beta}} dx$.

Esercizio 2 Stabilire se le seguenti serie numeriche sono convergenti e/o assolutamente convergenti:

- $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k^2+10000} \quad (\text{C.});$
- $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k^2+1}{k^3+8} \quad (\text{C.}) ;$
- $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^3+8} \sin \frac{1}{\log k} \quad (+\infty);$
- $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^3+8} \left(\sin \frac{1}{\log k} \right)^2 \quad (\text{A.C.});$
- $\sum_{k=0}^{\infty} \sin(e^k) \frac{k^2+1}{k^4+8} \quad (\text{A.C.});$
- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2^{-k}} - 1}{\sin(3^{-k})} \quad (+\infty);$
- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 4^k}{2^k + 5^k} \quad (\text{A.C.});$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{6k^3} - \sin \frac{1}{k} \right]^{1/3} \quad (\text{A.C.});$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{6k^3} - \sin \frac{1}{k} \right]^{1/5} \quad (+\infty).$

Legenda: A.C.= assolutamente convergente; C.= convergente, ma non assolutamente convergente; N.C.=non convergente; $+\infty$ =divergente a $+\infty$.

Esercizio 3 Dire per quali valori del parametro $x \in \mathbb{R}$ le seguenti serie risultano convergenti:

- $\sum_{k=0}^{\infty} \cos(k\pi) \log(1 + \frac{1}{k^x}) \quad (x > 0) ;$
- $\sum_{k=1}^{\infty} [\sin(e^{1/k} - 1)]^x \quad (x > 1);$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k+|x|^k} \quad (-1 < x < 1) ;$
- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{3^k} \left(\frac{1+e^x}{e^x} \right)^k \quad (x > \log \frac{1}{2} = -\log 2);$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (\tan x)^k \quad (\{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } -\frac{\pi}{4} + n\pi \leq x < \frac{\pi}{4} + n\pi\});$
- $\sum_{k=0}^{\infty} (\sin 2^{-k})(x^2+4x+1)^k \quad (-1 < x < \sqrt{5}-2 \text{ oppure } -2-\sqrt{5} < x < -3);$

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} (e^x - 2)^k \quad (0 \leq x \leq \log 3) ;$
- $\sum_{k=0}^{\infty} \arctan \frac{1}{x 2^k} \quad (x \neq 0) ;$
- $\sum_{k=1}^{\infty} (2 \sin x - \cos(\frac{x}{k})) \quad (\{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi \text{ o } x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi\});$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k^{2x} + 1} - k^x \quad (x > 1) ;$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (x^2 - 2)^k \quad (1 \leq x < \sqrt{3} \text{ oppure } -\sqrt{3} < x \leq -1) ;$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} (x^2 - 2)^k \quad (1 \leq x \leq \sqrt{3} \text{ oppure } -\sqrt{3} \leq x \leq -1) ;$
- $\sum_{k=1}^{\infty} [\arctan x - \frac{\pi}{3} + \frac{1}{k} - \sin \frac{1}{k}]^{1/3} \quad (\text{nessun } x) ;$
- $\sum_{k=1}^{\infty} [\frac{4}{\pi} \arctan x - \cos(\frac{1}{k})]^{1/2} \quad (\text{nessun } x);$
- $\sum_{k=1}^{\infty} [\frac{4}{\pi} \arctan x - \frac{x}{2k^2} - \cos(\frac{1}{k})]^{1/2} \quad (x = 1);$
- $\sum_{k=1}^{\infty} (e^{x/k^2} - |x^2 - 3|) \quad (x \in \{2, -2, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}) .$

Si dica anche per quali x le serie proposte risultano assolutamente convergenti.

Esercizio 4 Sia $F(x) := \int_0^x \frac{1}{1+t^3} dt$; dimostrare che la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} [F(2k) - F(k)]$$

è convergente. (Suggerimento: usare il criterio del confronto e la disuguaglianza $\frac{1}{1+t^3} \leq \frac{1}{t^3}$).

Esercizio 5 Disegnare i seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R}^2 e individuarne parte interna, frontiera, chiusura e punti di accumulazione:

- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, x + y \geq 0\};$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 2y \geq 1, x^2 + y^2 = 2\};$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -2, \frac{x}{y} < 1\};$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x^2 + y^2 \leq 3, x > 1\};$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 1\};$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq xy < 1\};$

- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 \geq 1\}$.

Esercizio 6 Per ciascuna delle seguenti funzioni si determini il dominio D e lo si disegni. Individuare poi parte interna, frontiera e punti di accumulazione di D :

$$\frac{1}{\sin(x+y)}, \quad \frac{1}{x - \sin y}, \quad \sqrt{\arctan(x^2 + y)}, \quad \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^y - 1}}, \quad \log\left(2 + \frac{x - y}{x + y}\right).$$

Esercizio 7 Per ciascuna delle seguenti funzioni $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, individuare il dominio D e dire se sono continue in D . Si determinino poi i punti di accumulazione di D ; per ciascun punto di accumulazione (x_0, y_0) , calcolare (se esiste) $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$.

- $\frac{e^{x+y}-1}{x^2+y^2}$;
- $e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$;
- $\frac{e^{x^4+y^6}-1}{x^2+y^2}$;
- $\frac{\log(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}$;
- $\frac{\sin(x^2-2x+1)}{x-1}$;
- $\frac{x+y+1}{x+y-1}$;
- $\frac{\sin(x+y+1)}{(x+y-1)^2}$;
- $\frac{\sin(x^2-2x+1)}{x^2-4x+3}$;
- $\frac{1}{x^2+2xy+2y^2}$.

Stessa cosa per quanto riguarda le funzioni dell'esercizio 6.

Esercizio 8

a) Dimostrare che se $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^2$ sono insiemi aperti, allora anche $D_1 \cup D_2$ e $D_1 \cap D_2$ sono insiemi aperti.

b) Dimostrare che se $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^2$ sono insiemi chiusi, allora anche $D_1 \cup D_2$ e $D_1 \cap D_2$ sono insiemi chiusi.

c) Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (i) $D \subset \mathbb{R}^2$ è un insieme aperto;
- (ii) per ogni successione $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0)$ con $(x_0, y_0) \in D$, si ha che esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $(x_n, y_n) \in D$ per ogni $n \geq N$.

d) Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (i) $D \subset \mathbb{R}^2$ è un insieme chiuso;
- (ii) per ogni successione $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $(x_n, y_n) \in D \forall n$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0)$, si ha che $(x_0, y_0) \in D$.