

Cenni di soluzione dei "primi esercizi limiti" (30 Ottobre 2014)

Paolo Mancini

Alise e Sommerie

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^4 + x^3 + 1}{3^{2x} + 5^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 \left(5 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4}\right)}{9^x \left(1 + \left(\frac{5}{3}\right)^x\right)} = 0$$

scale in
dip. infiniti

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^4 + x^3 + 1}{3^{2x} + 5^x}$$

se $x \rightarrow -\infty$ $(3^2)^x$ e $5^x \rightarrow 0$, quindi il
limite non è una forma indeterminata
perché numeratore $\rightarrow +\infty$, denominatore $\rightarrow 0^+$
 $\frac{+\infty}{0^+} = +\infty$. Quindi $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\quad)}{(\quad)} = +\infty$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x}$$

se $x \rightarrow 0$ $\sin x \rightarrow 0$ Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{\sin x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1 + y)}{y} = 1$$

$$\text{Quindi } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{x} = 1$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0^+} 4x^4 \log(x^5 + x^2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 4x^4 \log(x^2(x^3 + 1))$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} 4x^4 (\log(x^2) + \log(1 + x^3)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (8x^4 \log x + 4x^4 \log(1 + x^3)) = 0$$

(limite notevole)

Attenzione: se $x \rightarrow 0$ (come in questo caso)

tra x^5 e x^2 bisogna mettere in evidenza
il termine con la potenza minore cioè x^2 .
(al contrario del caso $x \rightarrow \pm\infty$).

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1 - \cos x} - 1}{\log(1 + 3x)} \quad \text{f.v. } \frac{0}{0}$$

se $x \rightarrow 0$ $1 - \cos x \rightarrow 0$ quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1 - \cos x} - 1}{1 - \cos x} = 1$$

(sostituzione $1 - \cos x = y$
 $x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0$
e limite notevole $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$)

$$\text{Inoltre } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + 3x)}{3x} = 1 \quad \left(\begin{array}{l} \text{sostituzione } 3x = y \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0 \\ \text{e limite notevole} \end{array} \right)$$

Quindi

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1 + y)}{y} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1-\cos x} - 1}{\log(1+3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1-\cos x} - 1}{(1-\cos x)} \cdot \frac{(1-\cos x)}{3x} \cdot \frac{3x}{\log(1+3x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{x^2}{3x} = 0$$

Quindi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1-\cos x} - 1}{\log(1+3x)} = 1 \cdot 0 \cdot 1 = 0$

6) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{x \log x} = (f.i. 0^0)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x(\log x) \log x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x(\log x)^2} = e^0 = 1$$

(limite notevole)

7) $\lim_{x \rightarrow 0^+} |\log x|^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x} \log(|\log x|)} = +\infty$

facciamo anche

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log x)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x} \log(\log x)}$$

(f.i. $\frac{\infty}{\infty}$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \log(\log x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\log y}{e^y} = 0$$

scala degli infiniti

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log x)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x} \log(\log x)} = e^0 = 1$$

8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x^5 + \sqrt{x} + 2x}{x + \arctan x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\frac{5 \log x}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 2 \right)}{x \left(1 + \frac{\arctan x}{x} + \frac{\sin x}{x} \right)}$

per scala infiniti

(infinitesimo $\times$ limite)

= 2

9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x}) \sin\left(\frac{5}{x}\right) = (f.i. \infty \cdot 0)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \sin\left(\frac{5}{x}\right) + \sqrt{x} \sin\left(\frac{5}{x}\right) \right] = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left[\frac{5}{y} \sin y + \sqrt{\frac{5}{y}} \sin y \right]$$

$y = \frac{5}{x}$
 $x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow 0^+$
 $x = \frac{5}{y}$

limite notevole

Inoltre $\sqrt{5} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} = \sqrt{5} \frac{\sin y}{\sqrt{y} \sqrt{y}} \rightarrow 0$ se $y \rightarrow 0$

(limite notevole)

Quindi $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x}) \sin \frac{5}{x} = 5$

Dato a lezione

$$\begin{aligned}
 10) \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctg x \right) = \quad (\text{f.v. } \infty \cdot 0) \\
 & = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} y \left(\frac{\pi}{2} - y \right) \quad \begin{array}{l} \arctg x = y \\ x = \operatorname{tg} y \end{array} \quad \begin{array}{l} x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{array} \\
 & = \lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - z \right) \cdot z = \quad \begin{array}{l} \text{sempre} \\ \text{forma indeterminata} \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} - y = z \\ y = \frac{\pi}{2} - z \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{se } y \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ z \rightarrow 0 \end{array} \\
 & = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\operatorname{tg} z} = \quad \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - z \right) = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - z \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{2} - z \right)} = \frac{\cos z}{\sin z} = \\
 & = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\sin z} \cdot \cos z = 1 \quad \begin{array}{l} \rightarrow 1 \\ \rightarrow 1 \end{array} \quad = \frac{1}{\operatorname{tg} z}
 \end{aligned}$$