

Soluzioni esercizi sulle serie numeriche

Paola Maurice e Alice Sommariva

IAM 2014

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{1+d}}{|1-d|} \right)^n$ è serie geometrica $\sum q^n$

di ragione $q = \frac{\sqrt{1+d}}{|1-d|}$. Quindi converge $\Leftrightarrow |q| < 1$

cioè per gli d b.c. $-1 < \frac{\sqrt{1+d}}{|1-d|} < 1$

sempre verificata giacché $\frac{\sqrt{1+d}}{|1-d|} \geq 0$ (per gli d b.c. quindi è definita)

Risolve

$$\frac{\sqrt{1+d}}{|1-d|} < 1 \quad \text{con} \quad d \geq -1 \quad \text{e} \quad d \neq 1$$

$$\sqrt{1+d} < |1-d| \quad \text{elevo al quadrato (entrambi sono positivi)}$$

$$1+d < (1-d)^2 \quad (\text{n.b. } |x|^2 = x^2)$$

$$1+d < 1+d^2-2d \Rightarrow d^2-3d > 0$$

$$d(d-3) > 0$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ d > 3 \end{array} \quad \text{e} \quad d < 0$$

e poiché deve anche essere $d \geq -1$, $d \neq 1$

la serie converge $\forall d > 3$ o $\forall d \in [-1, 0)$. $\neq$

2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n}}$

$$a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n}(\sqrt{n^2+1}+n)} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n^2})}+n)} = \frac{1}{\sqrt{n}(n(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1))} =$$

$$= \frac{1}{n^{3/2}(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1)} \sim \frac{1}{2n^{3/2}}$$

per il criterio del confronto asintotico, poiché $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (serie armonica generalizzata con $\alpha = 3/2 > 1$)
 $\Rightarrow \sum a_n$ converge. $\neq$

3) $\sum 3^n \left(1 - \frac{1}{n^{3/2}}\right)^{5/2}$ criterio della radice

$$\sqrt[n]{a_n} = 3 \left[1 - \frac{1}{n^{3/2}} \right]^{\frac{1}{n}} = 3 \left(1 - \frac{1}{n^{3/2}} \right)^{\frac{1}{n}} =$$

$$= 3 \left(1 - \frac{1}{n^{3/2}} \right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 3 \cdot \frac{1}{e} > 1 \Rightarrow \text{la serie diverge.} \quad \#$$

ponendo $n = m$
 $n \rightarrow +\infty \Rightarrow m \rightarrow +\infty$
 $\left(1 - \frac{1}{m} \right)^m \rightarrow \frac{1}{e}$

4) $\sum \frac{n 2^n + 5^n}{2^n + 3^n}, \quad d \geq 0$

numeratore $5^n \left(n \left(\frac{2}{5} \right)^n + 1 \right)$

$$\lim_n n \left(\frac{2}{5} \right)^n = \lim_n \frac{n}{\left(\frac{5}{2} \right)^n} = 0 \quad (\text{scala infinita})$$

denominatore

$$\begin{aligned} & 2^n \left(1 + \left(\frac{3}{2} \right)^n \right) \\ & 3^n \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n + 1 \right) \\ & 2 \cdot 3^n \end{aligned}$$

se $d > 3$

se $d < 3$

se $d = 3$

Quindi

$$a_n \sim \frac{5^n}{2^n} \quad \text{se } d > 3$$

$$a_n \sim \frac{5^n}{3^n} \quad \text{se } d < 3$$

$$a_n \sim \frac{5^n}{2 \cdot 3^n} \quad \text{se } d = 3$$

perché $\sum \left(\frac{5}{3} \right)^n$ diverge (serie geometrica con ragione $q > 1$)

$\sum a_n$ diverge (per il criterio del confronto asintotico)

se $d \leq 3$

se $d > 3$ $\sum \left(\frac{5}{2} \right)^n$ converge se $d > 5$ (serie geometrica con ragione $\frac{5}{2} < 1 \Rightarrow d > 5$)

quindi $\boxed{\sum a_n \text{ converge se } d > 5}$

5) $\sum \frac{\cosh \frac{1}{n^3} - 1}{\frac{1}{n^{4/3}} - \frac{1}{n^{4/3}}}$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\sinh x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\cosh \frac{1}{n^3} = 1 + \frac{1}{2n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

$$\sinh \frac{1}{n^{4/3}} = \frac{1}{n^{4/3}} - \frac{1}{6n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$a_n \sim \frac{\frac{1}{2n^6}}{-\frac{1}{n^4}} = -\frac{1}{2n^2}$$

poiché $\sum \frac{1}{n^2}$ converge $\Rightarrow -\frac{1}{2} \sum \frac{1}{n^2}$ converge $\Rightarrow \underline{\underline{\sum a_n \text{ converge}}}$.

6) a) $\sum \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{5n}$

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2n \cdot \frac{5}{2}} \rightarrow \left(\frac{1}{e}\right)^{5/2} \quad \text{quindi } a_n \not\rightarrow 0$$

non è soddisfatta la condizione necessaria di convergenza

(si può fare anche con il criterio della radice)

$\Rightarrow$ la serie diverge

b) $\sum \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{5n^2}$

criterio della radice

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{5n} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2n \cdot \frac{5}{2}} \rightarrow \left(\frac{1}{e}\right)^{5/2} < 1$$

la serie converge

c) $\sum \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{5n^3}$

criterio della radice

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{5n^2} = \left[\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{5n}\right]^n \rightarrow 0 < 1$$

la serie converge.

$\left(\frac{1}{e}\right)^{5/2} < 1$
 $\left[\left(\frac{1}{e}\right)^{5/2}\right]^n \rightarrow 0$

7) $\sum \left[9n^3 \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}\right)\right]^n$

criterio della radice

$$\sqrt[n]{a_n} = 9n^3 \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}\right) = 9n^3 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

$$= 9n^3 \left(\frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \frac{9}{6} + o(1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{9}{6} = \frac{3}{2} > 1$$

la serie diverge.

8) $\sum (-1)^n \frac{1}{n^\alpha} \operatorname{arctg} \frac{3}{\sqrt{n}}$

a) $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c. la serie converge assolutamente

and $x \sim x$ as $x \rightarrow 0$

$$|a_n| = \frac{1}{n^\alpha} \operatorname{arctg} \frac{3}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n^\alpha} \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} = \frac{3}{n^{\alpha+1/2}}$$

$$\sum |a_n| \text{ converge} \Leftrightarrow \sum \frac{1}{n^{\alpha+1/2}} \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha + \frac{1}{2} > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}$$

$$b) \alpha = \frac{1}{2} \quad \sum (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} \frac{3}{\sqrt{n}} \right) \quad \text{bm}$$

Criterio di Leibniz

- $b_n \rightarrow 0$
- b_n è decrescente perché $\frac{1}{\sqrt{n}}$ decrescente, $\operatorname{arctg} \frac{3}{\sqrt{n}}$ è decrescente (composizione di arctg che è crescente con $\frac{3}{\sqrt{n}}$ che è decrescente) quindi il prodotto di due decrescenti positive è decrescente.

quindi per il criterio di Leibniz c'è convergenza.
(ma non conv. assoluta, vedi a).

$$g) \quad a_n = \frac{n! + 5 \cdot 3^n}{n + n^n}$$

$$a) \quad \lim_n a_n = \lim_n \frac{n! \left(1 + 5 \frac{3^n}{n!} \right)}{n^n \left(\frac{1}{n^{n-1}} + 1 \right)} = \lim_n \frac{n!}{n^n} = 0$$

per le scale di infiniti

per le scale di infiniti

$$b) \quad \sum a_n \quad \text{dal punto a)}$$

$$a_n \sim \frac{n!}{n^n}$$

$\sum a_n$ converge se $\sum \frac{n!}{n^n}$ converge
(criterio del confronto asintotico)

$$\sum \frac{n!}{n^n} \quad \text{criterio del rapporto} \quad (\text{fatto a lezione})$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n! (n+1)}{(n+1)^{n+1} n!} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n =$$

$$= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ converge}$$

$$10) \quad \sum \frac{\frac{a}{n^{3/2}} - 6 \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right) - \frac{2}{n^2}}{e^{1/\sqrt{n}} - 1}$$

$$a_n = \frac{\frac{a}{n^{3/2}} - 6 \left(\frac{1}{6n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \right) - \frac{2}{n^2}}{\frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$$

$e^{1/\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
 $\sin \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{6n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$

$$= \frac{(a-1) \frac{1}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

se $a \neq 1$

$$a_n \sim (a-1) \frac{n^{1/2}}{n^{3/2}} = \frac{(a-1)}{n}$$

poiché $\sum \frac{1}{n}$ diverge $\Rightarrow \sum a_n$ diverge se $a \neq 1$

se $a=1$, ci serve uno sviluppo più preciso del $\sin \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\sin \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{6n^{3/2}} + \frac{1}{5! n^{5/2}} + o\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right)$$

$$a_n = \frac{-6 \left(\frac{1}{5! n^{5/2}} + o\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right) \right) - \frac{2}{n^2}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} =$$

$$= -\frac{6}{5!} \frac{n^{1/2}}{n^{5/2}} - \frac{2n^{1/2}}{n^2} + o\left(\frac{n^{1/2}}{n^{5/2}}\right) =$$

$$= -\frac{6}{5!} \frac{1}{n^2} - 2 \frac{1}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{2}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

questo è il "controllo"
 $\frac{1}{n} = x$ $x \rightarrow 0$
 $x^{3/2}$

$$\sum \frac{1}{n^{3/2}} \text{ converge} \Rightarrow \sum a_n \text{ converge per } a=1.$$

Quindi $\sum a_n$ converge $\Leftrightarrow a=1$

