Istituzioni di Analisi Matematica 1- 2014-2015- Tutti i canali

P. Mannucci, A. Sommariva

Cenni di soluzione degli esercizi primi due capitoli

- Determinare estremo superiore e inferiore, e dire se sono massimo e minimo rispettivamente, dei seguenti insiemi:

1.
$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid x = (-1)^n + 4, \quad n \in \mathbb{N}\}.$$
Si ha $E = \{3, 5\}$, quindi min$E$=inf$E$=3 e max$E$=sup$E$=5.

2.
$$E = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = 2 + (-1)^n \left(\frac{1}{n+1}\right), \quad n \in \mathbb{N}\right\}.$$
Per n pari si ha $x_n = 2 + \frac{1}{1+n}$ è decrescente e $2 < x_n \leq 3 = x_0$.
Per n dispari si ha $x_n = 2 - \frac{1}{1+n}$ è crescente e $x_1 = \frac{3}{2} \leq x_n < 2$.
Per cui avremo min$E$=inf$E$=3/2 e max$E$=sup$E$=3.

3.
$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid x = n^2(\cos(n\pi) - 1), \quad n \in \mathbb{N}\}.$$
Si noti che $\cos(n\pi) = (-1)^n$, quindi
$$n^2((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0 & \text{se n è pari} \\ -2n^2 & \text{se n è dispari} \end{cases}$$
Quindi max$E$=sup$E$=0, E non ha minimo e inf$E = -\infty$.

- Risolvere le seguenti disequazioni:

1. $3\sin^2 x + \cos^2 x < 2 + \cos x$

   Soluzione: poichè $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, si ha:

   $(1 - \cos^2 x) + + \cos^2 x < 2 + \cos x$

   $2\cos^2 x + \cos x - 1 > 0$

   Si ponga $t = \cos x$, si ha:

   $2t^2 + t - 1 > 0$, che implica $t < -1$ oppure $t > 1/2$.

   Quindi avremo $\cos x < -1$, mai verificato, oppure $\cos x > 1/2$ che implica
$$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

2. $\arcsin\left(\frac{x}{x^2-1}\right) > \frac{\pi}{6}$

   Poiché la funzione arcsin è strettamente crescente, si ha che la disequazione è verificata se e solo se $\frac{x}{x^2-1} > \sin(\frac{\pi}{6})$ e se $\frac{x}{x^2-1} \leq 1$ (poiché il dominio della funzione arcsin è l'intervallo $[-1, 1]$). Visto che $\sin(\frac{\pi}{6}) = 1/2$ la disequazione diventa:
$$\frac{1}{2} < \frac{x}{x^2-1} \leq 1, \quad x \neq \pm 1.$$

3. $\sqrt{2-x}+\sqrt{x+4}\leq 6$

Soluzione:
$$\begin{cases} 2-x\geq 0 \\ x+4\geq 0 \\ (\sqrt{2-x}+\sqrt{x+4})^2\leq 36 \end{cases}$$
Si noti che si può elevare al quadrato poiché tutto è maggiore o uguale a zero.
$$\begin{cases} x\leq 2 \\ x\geq -4 \\ \sqrt{(2-x)(x+4)}\leq 15. \end{cases}$$
Si noti che il dominio della radice rimane lo stesso, che di nuovo si può elevare al quadrato, ottenendo:
$$\begin{cases} -4\leq x\leq 2 \\ x^2+2x+217\geq 0 \end{cases}$$
Si verifica che la seconda disequazione è sempre verificata (il discriminante è negativo), quindi si ha solo
$$-4\leq x\leq 2.$$

4. $\sqrt{\frac{9-x}{x+1}}>x-3$

Soluzione:
$$\begin{cases} \frac{9-x}{x+1}\geq 0 \\ x\neq -1 \\ x-3<0 \end{cases} \quad \text{unito} \quad \begin{cases} \frac{9-x}{x+1}\geq 0 \\ x\neq -1 \\ x-3\geq 0 \\ \frac{9-x}{x+1}\geq (x-3)^2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} -1<x\leq 9 \\ x<3 \end{cases} \quad \text{unito} \quad \begin{cases} -1<x\leq 9 \\ x\geq 3 \\ 3\leq x<4 \end{cases}$$
Quindi si ha $-1<x<4$.

5. $|x+3|\leq\alpha$, con $\alpha\in\mathbb{R}$
   - Se $\alpha<0$ non ci sono soluzioni.
   - Se $\alpha=0$ si ha $|x+3|=0$ se e solo se $x=-3$.
   - Se $\alpha>0$ si ha $-\alpha\leq x+3\leq\alpha$, cioè $-(\alpha+3)\leq x\leq\alpha-3$.

6. NUOVA Trovare il dominio di $f(x)=\log_x(x+2)$.

Soluzione: Affinché la funzione logaritmo sia definita la base deve essere positiva e diversa da 1, e inoltre $x+2>0$ quindi si deve avere $x>0$, e $x\neq 1$.

7. NUOVA $\sqrt{|x+1|-1}\geq x$

Soluzione: Affinché la radice sia definita dobbiamo avere:
$$|x+1|-1\geq 0 \;\Rightarrow\; |x+1|\geq 1 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x+1\geq 1 \;\Rightarrow x\geq 0 \\ x+1\leq -1 \;\Rightarrow x\leq -2 \end{cases}$$
Se $x\leq -2$, la disequazione è verificata poiché la radice è maggiore o uguale a zero.

Se $x \geq 0$, possiamo elevare al quadrato e togliere il modulo, e si ha:

$$x + 1 - 1 \geq x^2 \ \Rightarrow \ x \geq x^2 \ \Rightarrow \ 0 \leq x \leq 1.$$

Quindi la soluzione è $(-\infty, -2] \cup [0, 1]$.

- Determinare dominio, segno, eventuali simmetrie e periodicità delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

1.
$$f(x) = \arccos(|x^3 - 1/2|)$$

Domino: $|x^3 - 1/2| \leq 1$ che implica $-1/2 \leq x^3 \leq 3/2$ che implica $\frac{-1}{\sqrt[3]{2}} \leq x \leq \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$.

Segno: la funzione è sempre positiva poichè la funzione arccos è sempre positiva, inoltre visto che l'argomento è positivo, possiamo dire:

$$0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2}.$$

2.
$$f(x) = \log|\sin(2e^x)|$$

Dominio: Dobbiamo imporre $|\sin(2e^x)| > 0$ che equivale a $\sin(2e^x) \neq 0$, cioè $2e^x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Poichè $e^x > 0$, prendiamo solo $k \geq 1$, e si ha: $x \neq \log\left(\frac{k\pi}{2}\right)$, con $k \geq 1$.

Segno: Siccome $|\sin(2e^x)| \leq 1$, la funzione sarà sempre minore o uguale a zero. In particolare vale zero quando $\sin(2e^x) = \pm 1$, e questi punti saranno i punti di massimo.

La funzione non è periodica, ne' simmetrica.

3.
$$f(x) = \log\left(e^{2x} - 4e^x + 4\right)$$

Dominio: Dobbiamo imporre $(e^{2x} - 4e^x + 4) = (e^x - 2)^2 > 0$ che equivale a $e^x \neq 2$, cioè $x \neq \log 2$.

Segno: Il logaritmo, in base e, è positivo quando l'argomento è > 1, quindi si ha $f(x) > 0$ se e solo se:

$$e^{2x} - 4e^x + 3 > 0.$$

Ponendo $t = e^x$, la precedente diventa $t^2 - 4t + 3 = (t - 3)(t - 1) > 0$. Quindi si ha $t < 1$ unito $t > 3$, che equivale a $x < 0$ unito $x > \log 3$.

4.
$$f(x) = \arcsin\left(\frac{|x+2|}{x}\right)$$

Dominio:

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{|x+2|}{|x|} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ |x+2| \leq |x| \end{cases}$$

La disequazione $|x + 2| \leq |x|$ si può risolvere facilmente per via grafica, oppure per via analitica osservando che:

se $x \geq 0$ la disequazione è chiaramente falsa,

se $x < 0$, equivale a $x \leq x + 2 \leq -x$, in cui la prima disequazione è sempre vera, mentre la seconda implica $x \leq -1$,

quindi il dominio è $x \leq -1$.

Segno: La funzione arcsin è positiva (negativa) per valori positivi (negativi) dell'argomento. Se x sta nel dominio di f, $x < -1$, quindi negativo, il modulo è maggiore o uguale a zero, quindi l'argomento della funzione è minore o uguale a zero, perciò f è sempre minore o uguale a zero.

5.
$$f(x) = \frac{1}{|x+1| - 2}$$

Dominio: $|x + 1| \neq 2$ cioè $x + 1 \neq \pm 2$, quindi $x \neq 1$ e $x \neq -3$.

Segno: $f(x) > 0$, se e solo se $|x + 1| > 2$, quindi se e solo se $x + 1 > 2$ oppure $x + 1 < -2$. Quindi $f(x) > 0$ se e solo se $x < -3$ oppure $x > 1$.

6.
$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+2}{\tan x}}$$

Dominio: Dobbiamo considerare i punti nei quali è definita la $\tan x$ e i punti nei quali $\tan x \neq 0$. Quindi otteniamo tutti gli $x \neq \pi + k\pi$, k numero intero e $x \neq \pi/2 + k\pi$, k numero intero.
Segno: poiché $x = -2$ è compreso tra $-\pi$ e $-\pi/2$, f è positiva se $x \in (-2, -\pi/2)$, se $x \in (k\pi, \pi/2 + k\pi)$ con k numero naturale, e se $x \leq -2$ se $x \in (-\frac{3}{2}\pi - k\pi, -\pi - k\pi)$, k numero naturale.

7.
$$f(x) = \arccos\left(|x + 1| - 6\right) - \pi/3$$

Dominio: $-1 \leq |x + 1| - 6 \leq 1$, se e solo se

$$\begin{cases} |x+1| \geq 5 \\ |x+1| \leq 7 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \leq -6 \cup x \geq 4 \\ -8 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

Quindi il dominio è $[-8, -6] \cup [4, 6]$.

Segno: $f(x) \geq 0$ se e solo se $\arccos\left(|x + 1| - 6\right) \geq \pi/3$ se e solo se $|x + 1| - 6 \leq \frac{1}{2}$. Quindi $f(x) \geq 0$ se e solo se $-1 \leq |x + 1| \leq 13/2$.

8.
$$f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{\cosh(\sin x)}\right)$$

Dominio: Si noti che $\cosh(y) \geq 1$ per ogni $y \in \mathbb{R}$, quindi $0 < \frac{1}{\cosh(\sin x)} \leq 1$. Per cui il dominio di f è tutto $\mathbb{R}$.

Segno: Poiché l'argomento della funzione arcsin è positivo la funzione f è sempre positiva.

Periodicità: la funzione risulta periodica di periodo 2π.

9.
$$f(x) = \arctan\left(\sqrt{4e^{2x} - 9e^x + 2} - 2e^x\right)$$

Dominio: Si deve porre $4e^{2x} - 9e^x + 2 \geq 0$. Ponendo $t = e^x$, si ha $4t^2 - 9t + 2 \geq 0$ che ha come soluzioni $t \leq 1/4$ oppure $t \geq 2$. Quindi avremo che il dominio di f risulta

$$\{x \mid x \leq -\log(4) \text{ oppure } x \geq \log(2)\}.$$

Segno: $f(x)$ è maggiore di zero quando l'argomento dell'arcotangente è maggiore di zero, quindi avremo:

$$f(x) > 0 \text{ se e solo se } \sqrt{4e^{2x} - 9e^x + 2} > 2e^x.$$

Essendo quantità positive si può elevare al quadrato e si ottiene:

$$4e^{2x} - 9e^x + 2 > 4e^{2x},$$

che equivale a $9e^x < 2$, cioè $x < \log \frac{2}{9}$.

10.
$$f(x) = \log\left(4\sinh^2 x - 5\sinh x + 1\right)$$

Domino: Dobbiamo imporre $4\sinh^2 x - 5\sinh x + 1 > 0$. Ponendo $t = \sinh(x)$ si ottiene:

$$4t^2 - 5t + 1 > 0 \iff t < 1/4 \cup t > 1.$$

Quindi abbiamo $\sinh(x) < 1/4$ unito $\sinh(x) > 1$. Siano $\alpha =$settsinh$(1/4)$ e $\beta =$settsinh(1) si ha dominio di f è dato da $]-\infty, \alpha[\cup]\beta, +\infty[$.

Segno: $f(x) > 0$ se e solo se $4\sinh^2 x - 5\sinh x + 1 > 1$, che equivale a $4\sinh^2 x - 5\sinh x > 0$, quindi per $\sinh(x) < 0$ oppure $\sinh(x) > 5/4$. Sia $\gamma =$settsinh$(5/4)$ (si noti che $\gamma > \beta$), avremo che f è positiva su $(-\infty, 0)$ unito $(\gamma, +\infty)$.

11.
$$f(x) = \frac{\log(\sin(x))}{\sin(x) - 1}$$

Dominio: Si deve imporre $\sin(x) > 0$, per l'esistenza del logaritmo, e $\sin(x) \neq 1$ perchè non si deve annullare il denominatore. Quindi avremo dominio di f

$$2k\pi < x < \frac{\pi}{2} \quad \cup \quad \frac{\pi}{2} < x < (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Segno: $\sin(x) - 1 < 0$ poichè la funzione seno è minore di 1 (strettamente nel dominio di f). Inoltre $\log(\sin(x)) < 0$ sempre perchè il seno è minore di 1. Quindi $f(x) > 0$ per ogni x nel suo dominio.

Periodicità: la funzione risulta periodica di periodo 2π.

12. NUOVA
$$f(x) = 2x - \sqrt{|x^2 - 4x + 3|}$$

Domino: $\mathbb{R}$.

Segno: $f(x) > 0$ se e solo se $2x > \sqrt{|x^2 - 4x + 3|}$. Se $x \leq 0$ la disequazione è falsa, se $x > 0$, possiamo elevare al quadrato e si ottiene

$$4x^2 > |x^2 - 4x + 3| \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4x^2 > x^2 - 4x + 3 & 0 < x \leq 1, \text{ e } x \geq 3 \\ 4x^2 > -(x^2 - 4x + 3) & 1 < x < 3. \end{cases}$$

Risolvendo e ponendo $\alpha = \frac{-2+\sqrt{15}}{3}$, si ottiene $f(x) > 0$ se e solo se $x > \alpha$.