

Funzioni trigonometriche.

Si supponga

- ▶ Ω sia il disco di raggio 1 centrato nell'origine (disco unitario);
- ▶ siano $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$;
- ▶ sia P un punto sulla circonferenza, e si supponga che l'angolo $\hat{AOP}$ misuri x radianti (orientato antiorario!);
- ▶ sia Q la proiezione di P sull'asse delle ascisse;
- ▶ sia T il punto sulla retta r contenente O e P la cui proiezione sull'asse dell'ascisse sia A .

Allora

- ▶ l'ascissa di Q si denota $\cos(x)$ (coseno di x);
- ▶ l'ordinata P si denota $\sin(x)$ (seno di x);
- ▶ l'ascissa di T si denota $\cotg(x)$ (cotangente di x);
- ▶ l'ordinata di T si denota $\tg(x)$ (tangente di x);

Si noti che talvolta si usa $\sin(x)$ e $\tan(x)$ invece di $\sin x$ e $\tg(x)$.

Funzioni trigonometriche.

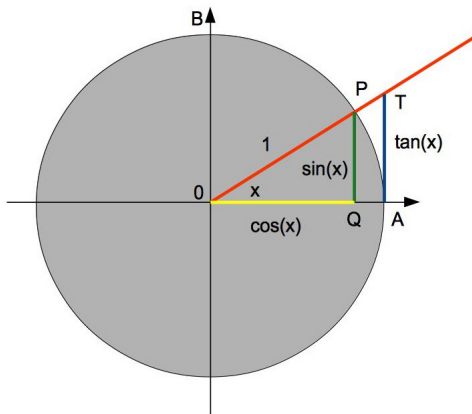


Figura : Funzioni trigonometriche sul cerchio unitario

Funzioni trigonometriche.

Poichè i triangoli OPQ e OAT sono simili, sia ha che

$$tg(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)},$$

$$ctg(x) = \frac{cos(x)}{sen(x)}.$$

Inoltre è facile osservare che

- ▶ $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$;
- ▶ $\cos(2\pi) = 1$, $\sin(2\pi) = 0$;
- ▶ dal teorema di Pitagora, essendo il disco unitario,

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1, \quad \forall x \in [0, 2\pi) \quad (1)$$

Funzioni trigonometriche.

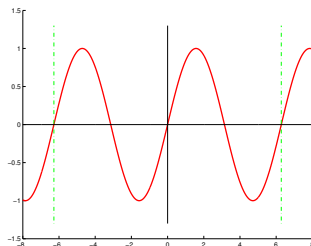


Figura : La funzione $\sin(x)$

La funzione $\sin(x)$

- ▶ è periodica con periodo 2π ;
- ▶ è dispari: $\sin(-x) = -\sin(x)$
- ▶ ha dominio $\mathbb{R}$ ma immagine $Im(\sin(x)) = [-1, 1]$, (quindi $|\cos(x)| \leq 1$);

Funzioni trigonometriche.

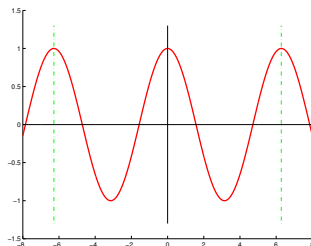


Figura : La funzione $\cos(x)$

La funzione $\cos(x)$

- ▶ è periodica con periodo 2π ;
- ▶ è pari: $\cos(-x) = \cos(x)$;
- ▶ ha dominio $\mathbb{R}$ ma immagine $Im(\cos(x)) = [-1, 1]$ (quindi $|\cos(x)| \leq 1$);

Funzioni trigonometriche.

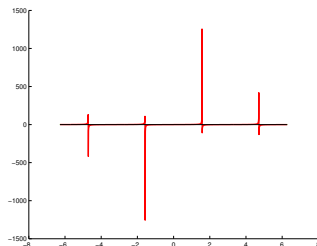


Figura : La funzione $\tan(x)$

La funzione $\tan(x)$

- ▶ è periodica con periodo π ;
- ▶ è dispari: $\tan(-x) = -\tan(x)$;
- ▶ non è definita nei punti $x_k = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$;
- ▶ ha dominio $\mathbb{R} \setminus \{x : x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ e immagine

Funzioni trigonometriche: esercizio.

Esercizio

Qual'è il periodo di $f(x) = \sin(3x)$?

Da $f(x + T) = f(x)$ abbiamo per $y = 3t$

$$f(x+T) = \sin(3(t+T)) = \sin(3t+3T) = \sin(y+3T) = \sin(y) = \sin(3t)$$

se e solo se $3T = 2\pi$ da cui

$$T = 2\pi/3.$$

Con una dimostrazione simile si mostra che

$$f(x) = \sin(\omega x)$$

è periodica con periodo $T = 2\pi/\omega$.

Definizione

Si definisce *seno iperbolico* la quantità

$$Sh(x) = \sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Definizione

Si definisce *coseno iperbolico* la quantità

$$Ch(x) = \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Definizione

Si definisce *tangente iperbolica* la quantità

$$Th(x) = \tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

- ▶ A volte $\sinh(x)$ si denota $senh(x)$;
- ▶ A volte $\tanh(x)$ si denota $tgh(x)$;

Funzioni iperboliche: $\sinh$.

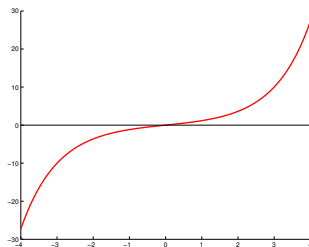


Figura : La funzione $\sinh(x)$ in $[-4, 4]$

La funzione $\sinh(x)$

- ▶ è dispari: $\sinh(-x) = -\sinh(x)$ (verificarlo) ;
- ▶ ha dominio $\mathbb{R}$ e immagine $Im(\sinh(x)) = \mathbb{R}$;
- ▶ è strettamente crescente.

Funzioni iperboliche: cosh.

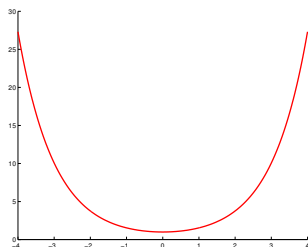


Figura : La funzione $\cosh(x)$ in $[-4, 4]$

La funzione $\cosh(x)$

- ▶ è pari: $\cosh(-x) = \cosh(x)$ (verificarlo) ;
- ▶ ha dominio $\mathbb{R}$ e immagine $Im(\cosh(x)) = [1, +\infty)$ (cioè $\cosh(x) \geq 1$);
- ▶ è strettamente decrescente per $x \leq 0$ e strettamente crescente per $x \geq 0$;
- ▶ similmente alla (??) vale $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

Funzioni iperboliche: $\tanh$.

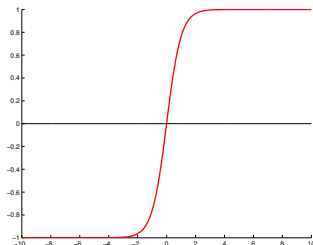


Figura : La funzione $\tanh(x)$ in $[-10, 10]$

La funzione $\tanh(x)$

- ▶ è pari: $\tanh(-x) = -\tanh(x)$ (verificarlo) ;
- ▶ ha dominio $\mathbb{R}$ e immagine $Im(\tanh(x)) = (-1, 1)$ (cioè $\tanh(x)$ è limitata);
- ▶ è strettamente crescente.

Operazioni sui grafici.

Domanda: Si conosce il grafico di $f(x)$. Qual'è il grafico di $y = f(x) + a$?

Risposta: Si trasla verticalmente di a il grafico di $f(x)$.

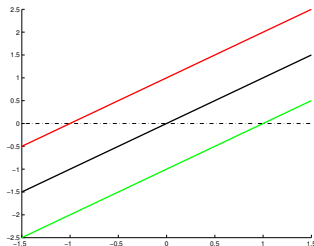


Figura : Grafico di $y = x + 1$ (rosso), $y = x$ (nero) e $y = x - 1$ (verde)

Operazioni sui grafici.

Domanda: Si conosce il grafico di $f(x)$. Qual'è il grafico di $y = f(x + a)$?

Risposta: Si trasla orizzontalmente di $-a$ il grafico di $f(x)$.

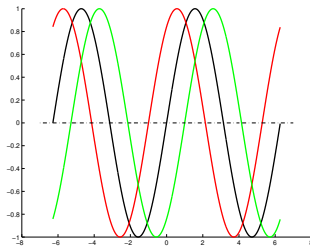


Figura : Grafico di $y = \sin(x + 1)$ (rosso), $y = \sin(x)$ (nero) e $y = \sin(x - 1)$ (verde)

Domanda: Si conosce il grafico di $f(x)$. Qual'è il grafico di $y = -f(x)$?

Risposta: Si simmetrizza il grafico di $f(x)$ rispetto l'asse x .

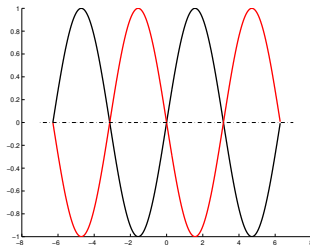


Figura : Grafico di $y = \sin(x)$ (nero), $y = -\sin(x)$ (rosso)

..

Domanda: Si conosce il grafico di $f(x)$. Qual'è il grafico di $y = k \cdot f(x)$?

Risposta: Si stira o si contrae di un fattore k il grafico di $f(x)$ (rispetto l'asse x).

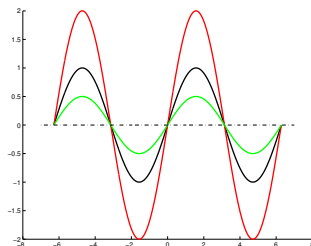


Figura : Grafico di $y = \sin(x)$ (nero), $y = 2 \sin(x)$ (rosso) e $y = 0.5 \cdot \sin(x)$ (verde)

Operazioni sui grafici.

Domanda: Si conosce il grafico di $f(x)$. Qual'è il grafico di $y = \cdot f(kx)$?

Risposta: Si stira o si contrae di un fattore $1/k$ il grafico di $f(x)$ (rispetto l'asse y).

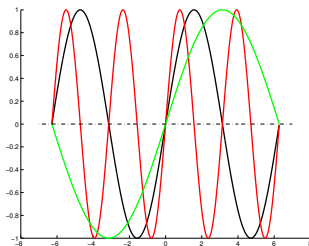


Figura : Grafico di $y = \sin(x)$ (nero), $y = \sin(2x)$ (rosso) e $y = \sin(0.5x)$ (verde)

Domanda: Si conosce il grafico di $f(x)$. Qual'è il grafico di $y = |f(x)|$?

Risposta: Se $f(x) \geq 0$ non si fa niente, altrimenti lo si riflette sull'asse x .

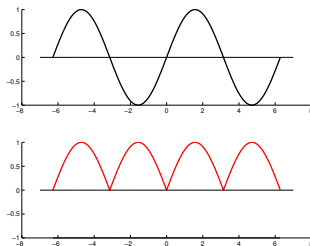


Figura : Grafico di $y = \sin(x)$ (nero), $y = |\sin(x)|$ (rosso)

Domanda: Si conosce il grafico di $f(x)$. Qual'è il grafico di $y = f(|x|)$?

Risposta: Si riflette il grafico della parte in cui $x \geq 0$ rispetto l'asse y .

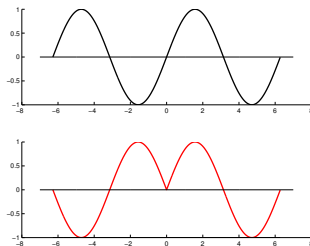


Figura : Grafico di $y = \sin(x)$ (nero), $y = \sin(|x|)$ (rosso)

Funzioni composte.

Definizione

Sia $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $g : F \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\text{Im}(f) \subseteq F$. La funzione $h = g \circ f$ tale che

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

si chiama **funzione composta**.

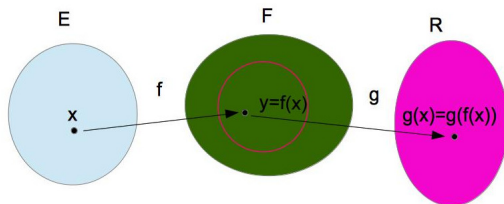


Figura : Esempio di funzione composta

Nota.

Si noti che:

- ▶ *E' fondamentale che $\text{Im}(f) \subseteq F$;*
- ▶ *In generale $f \circ g \neq g \circ f$;*
- ▶ *Si possono comporre più funzioni*

$$((f \circ g) \circ \tau)(x) = f(g(\tau(x))) = f \circ (g \circ \tau)$$

(verificarlo!).

Funzioni composte: esempio 1.

Esempio

Siano

$$f(x) = x^2 + 1, \quad g(x) = \sqrt{x}$$

► *Si vede che*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Si osservi che da $\text{Im}(f) = [1, +\infty)$, $\text{Dom}(g) = [0, +\infty)$, la composta è ben definita e da $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $(g \circ f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

► *Si vede che*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 + 1 = |x| + 1.$$

Osserviamo che $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ e in $\mathbb{R}^+$ si ha che $|x| + 1 = x + 1$. Inoltre essendo $\text{Im}(g) = [0, +\infty)$ e $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, la composta è ben definita. Quindi $(f \circ g) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ e $f \circ g \neq g \circ f$.

Funzioni composte: esempio 2.

Esempio

Siano

$$f(x) = -x^2, \quad g(x) = \sqrt[4]{x}$$

- ▶ *Si vede che*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt[4]{-x^2}$$

*Si osservi che da $\text{Im}(f) = (-\infty, 0]$, $\text{Dom}(g) = [0, +\infty)$, la composta **non** è ben definita. L'unico punto in cui la funzione è ben definita è $x = 0$ e la composta vale 0.*

- ▶ *Si vede che*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = -(\sqrt[4]{x})^2.$$

Osserviamo che $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, $\text{Im}(g) = [0, \infty) = \mathbb{R}^+$, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^+$ e quindi da $\text{Im}(g) \subseteq \text{Dom}(f)$ la composta è ben definita. Da

Funzioni composte: esempio 3.

Esempio

Siano

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 3, & x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x > 1 \\ -x, & x \leq 1 \end{cases}$$

- ▶ *Calcoliamo $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.*
 - ▶ *Supponiamo $x \leq 1$. Allora $g(x) = -x$ ed è $g(x) \geq 0$ per $x \leq 0$ altrimenti, per $x \in (0, 1]$, si ha che $g(x) < 0$. Se $x \leq 0$ abbiamo $f(g(x)) = 1$ mentre per $x \in (0, 1]$ si ha $f(g(x)) = 3$.*
 - ▶ *Supponiamo $x > 1$. Allora $g(x) = x^2 > 1 > 0$ e quindi $f(g(x)) = 1$.*
- ▶ *Studiare per casa $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

Teorema

Sia $Im(f) \subseteq Dom(g)$.

- ▶ *Se f crescente, g crescente allora $g \circ f$ è crescente.*
- ▶ *Se f crescente, g decrescente allora $g \circ f$ è decrescente.*
- ▶ *Se f decrescente, g decrescente allora $g \circ f$ è crescente.*

Dimostrazione.

Dimostriamo il primo asserto. Se $x_1 > x_2$, essendo f crescente, $f(x_1) > f(x_2)$. Siano $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$. Allora essendo g crescente

$$g \circ f(x_1) = g(f(x_1)) = g(y_1) > g(y_2) = g(f(x_2)) = g \circ f(x_2).$$

Funzioni composte: monotonia, esempio 1.

Esempio

Si consideri $F(x) = \log(\sinh(x^3))$. Posto $h(x) = \log(x)$, $g(x) = \sinh(x)$, $f(x) = x^3$, si vede subito che f, g, h sono funzioni crescenti e che $F(x) = (h \circ (g \circ f)) = h(g(f(x)))$. Inoltre

- ▶ *$G := g \circ f$ è crescente perchè composizione di funzioni crescenti;*
- ▶ *$F = h \circ (g \circ f) = h \circ G$ è crescente perchè composizione di funzioni crescenti.*

Quindi F è una funzione crescente.

Funzioni composte: monotonia, esempio 2.

Esempio

Si consideri $F(x) = \frac{1}{\log(x)}$. Posto $g(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \log(x)$, si vede subito che g è una funzione decrescente in $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$ ed f crescente in $(0, +\infty)$, e che $F(x) = (g \circ f) = g(f(x))$. Quindi F è una funzione decrescente in $(0, 1)$ e $(1, +\infty)$. Possiamo dire che F è decrescente in $\mathbb{R}^+ \setminus \{0, 1\}$? Qualche problema tra immagini e domini?

Funzioni composte: monotonia, esempio 2.

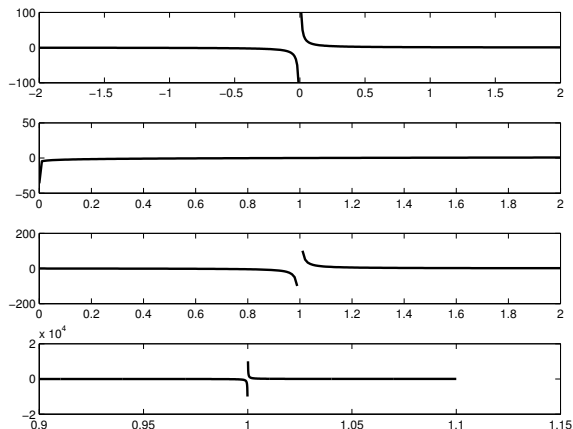


Figura : Dall'alto in basso: $1/x$, $\log(x)$, $1/\log(x)$ e zoom di $1/\log(x)$.

Definizione

Una funzione $f : D \rightarrow f(D)$ è *invertibile in D* se e solo se per ogni $y \in f(D)$ esiste uno e uno solo $x \in D$ tale che $f(x) = y$. La funzione $f^{-1} : f(D) \rightarrow D$ che associa a y tale x si chiama *funzione inversa di f* .

Definizione

Sia la funzione $f : D \rightarrow f(D)$ *invertibile in D* . La funzione $f^{-1} : f(D) \rightarrow D$ che associa ad ogni $y \in f(D)$ l'elemento $x \in D$ tale che $f(x) = y$ si chiama *funzione inversa di f* .

Funzioni invertibili e inverse.

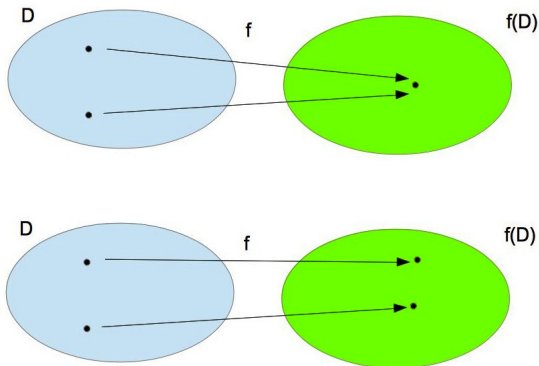


Figura : Dall'alto in basso: una funzione non invertibile e una invertibile.

Definizione

La funzione $Id : D \rightarrow D$ tale che $Id(x) = x$ si chiama *funzione identica*.

Nota.

- ▶ Se la funzione $f : D \rightarrow f(D)$ è invertibile allora

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall x \in D$$

e quindi $f^{-1} \circ f = Id$.

- ▶ Se la funzione $f : D \rightarrow f(D)$ è invertibile allora

$$f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = y, \quad \forall y \in f(D).$$

- ▶ Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ un dominio simmetrico e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione pari. Allora f non è invertibile. Se è pari infatti $f(x) = f(-x)$ ed essendo il dominio simmetrico $x, -x \in D$.

Definizione

*Una funzione $f : D \rightarrow E$ è **iniettiva in D** se e solo se per ogni $x_1, x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2$ si ha che $f(x_1) \neq f(x_2)$*

Nota.

- ▶ *La definizione di funzione iniettiva è equivalente a dire che se $x_1, x_2 \in D$, $f(x_1) = f(x_2)$ allora $x_1 = x_2$.*
- ▶ *La definizione di funzione iniettiva è equivalente a dire che per ogni $y \in f(D)$ esiste un unico $x \in D$ tale che $f(x) = y$.*
- ▶ *Una funzione invertibile deve essere iniettiva.*

Funzioni iniettive: esempi.

Esempio

La funzione $f(x) = x^2$ non è iniettiva in $\mathbb{R}$. Infatti $f(-1) = f(1) = 1$.

Esempio

La funzione $f(x) = x^3$ è iniettiva in $\mathbb{R}$. Infatti se $f(x_1) = f(x_2)$ allora $x_1^3 = x_2^3$ e i cubi di due numeri sono uguali se e solo se i numeri coincidono.

Funzioni invertibili: le funzioni monotone.

Teorema

Sia $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ strettamente monotona. Allora f è invertibile in D .

Dimostrazione.

Sia $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ strettamente crescente e quindi

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Dimostriamo che è iniettiva, cioè

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Visto che x_1, x_2 sono arbitrari e distinti, possiamo supporre $x_1 < x_2$. Ma allora essendo crescente $f(x_1) < f(x_2)$ e di conseguenza $f(x_1) \neq f(x_2)$.

La dimostrazione del caso in cui f è strettamente decrescente è

Funzioni invertibili: le funzioni monotone.

Nota.

Se $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è invertibile, allora non è detto che f sia strettamente monotona.

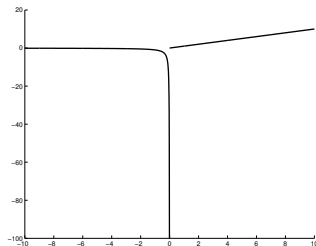


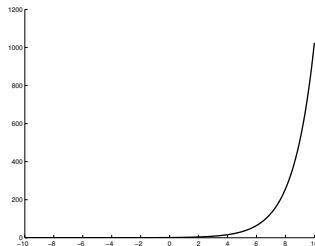
Figura : Una funzione invertibile e non monotona.

Funzioni invertibili: le funzioni monotone. Esempio 1.

Esempio

Sia $a > 1$. La funzione $f(x) = a^x$ è tale che $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$. E' strettamente monotona e invertibile perchè se $a^{x_1} = a^{x_2}$ allora $x_1 = x_2$. L'inversa $f^{-1} : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è per definizione

$$f^{-1}(y) = \log_a(y).$$

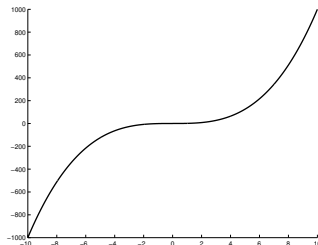


Funzioni invertibili: le funzioni monotone. Esempio 2.

Esempio

La funzione $f(x) = x^3$ è tale che $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. E' strettamente crescente e invertibile perchè se $x_1^3 = x_2^3$ allora $x_1 = x_2$. L'inversa $f^{-1} : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è per definizione

$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}.$$



Funzioni invertibili: le funzioni monotone. Esempio 3.

Esempio

La funzione $f(x) = x^2$ è

- ▶ non è invertibile se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (funzione pari!);
- ▶ è invertibile se $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ed è $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

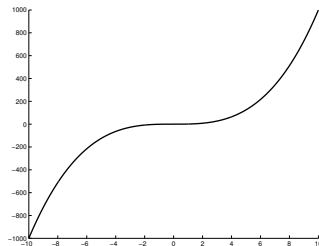


Figura : La funzione $f(x) = x^3$ in $[-10, 10]$.

Funzioni invertibili: il suo grafico.

Nota.

Osserviamo che

$$(x_0, y_0) \in \text{graf}(f) \Leftrightarrow f(x_0) = y_0.$$

Di conseguenza

$$(y_0, x_0) \in \text{graf}(f^{-1}) \Leftrightarrow f^{-1}(y_0) = x_0.$$

Questo comporta che i grafici delle due funzioni sono simmetrici rispetto alle bisettrici del primo e terzo quadrante.

Funzioni invertibili: il suo grafico.

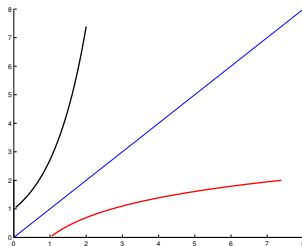


Figura : La funzione $f(x) = e^x$ in $[0.05, 2]$ (nero), $f^{-1}(y) = \log_e(y)$ (rosso). In blue la bisettrice del primo e del terzo quadrante.

Funzioni invertibili: il suo grafico.

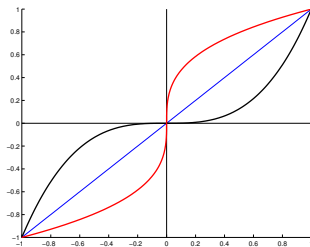


Figura : La funzione $f(x) = x^3$ in $[-1, 1]$ (nero), $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ (rosso).
In blue la bisettrice del primo e del terzo quadrante.

Funzioni invertibili: il suo grafico.

La funzione $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ con $f(x) = x^2$ è invertibile e la sua inversa è $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

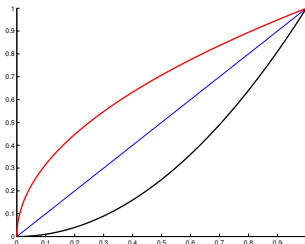


Figura : La funzione $f(x) = x^2$ in $[0, 1]$ (nero), $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ (rosso). In blue la bisettrice del primo e del terzo quadrante.

Funzioni trigonometriche e le loro inverse.

La funzione $f(x) = \sin(x)$, se considerata come $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non è invertibile (in quanto periodica).

Se invece la si restringe all'intervallo (di periodicità) $[-\pi/2, \pi/2]$, cioè come $f : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$, essendo strettamente crescente e $Im(f) = [-1, 1]$, risulta invertibile e la sua inversa si chiama **arcoseno** ed è denotata con $\arcsin(x)$ (talvolta $arcsen(x)$). Per definizione di inversa, si ha che $f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$. Si mostra che

$$\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$$

, cioè che $\arcsin$ è una funzione dispari.

