Integrali.

Paola Mannucci e Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica

10 dicembre 2014

Suddivisioni

Definizione

Sia $[a, b]$ *limitato. Si dice* *suddivisione* *di* $[a, b]$, *e si indica con* $\mathcal{D}$, *un insieme finito* $\{x_i\}_{i=0,\ldots,n}$ *tale che*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Nota.

Se $\mathcal{D} = \{x_i\}_{i=0,\ldots,n}$ *è una suddivisione di* $[a, b]$ *allora*

$$[a, b] = \cup_{i=1}^{n}[x_{i-1}, x_i].$$

Definizione

Sia $[a, b]$ *limitato. Siano* $\mathcal{D}_1$ *e* $\mathcal{D}_2$ *due suddivisioni. Si dice che* $\mathcal{D}_1$ *è più fine di* $\mathcal{D}_2$, *se* $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2$.

Definizione

Sia $[a, b]$ *limitato e sia* $\mathcal{D} = \{x_i\}_{i=0,\ldots,n}$ *una sua suddivisione. Si definisce* *ampiezza di* $\mathcal{D}$ *il numero* $|\mathcal{D}| = \max_{i=1,\ldots,n}\{x_i - x_{i-1}\}$.

Somma inferiore/superiore

Definizione

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione limitata, con* $[a, b]$ *limitato. Siano* $\mathcal{D} = \{x_k\}_{k=0,\ldots,n}$ *una suddivisione di* $[a, b]$*. Si dice*

- *somma inferiore* $s(\mathcal{D}, f)$ *di* f *relativa alla suddivisione* $\mathcal{D}$*, il numero*

$$s(\mathcal{D}, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}), \quad m_i = \inf_{x \in (x_{i-1}, x_i)} (f(x));$$

- *somma superiore* $S(\mathcal{D}, f)$ *di* f *relativa alla suddivisione* $\mathcal{D}$*, il numero*

$$S(\mathcal{D}, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}), \quad M_i = \sup_{x \in (x_{i-1}, x_i)} (f(x));$$

Lemma

Lemma

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione limitata, con* $[a, b]$ *limitato. Siano* $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ *due suddivisione di* $[a, b]$, *con* $\mathcal{D}_1$ *più fine di* $\mathcal{D}_2$. *Allora*

$$s(\mathcal{D}_2, f) \leq s(\mathcal{D}_1, f) \leq S(\mathcal{D}_2, f) \leq S(\mathcal{D}_1, f).$$

Corollario

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione limitata, con* $[a, b]$ *limitato. Allora*

$$\begin{aligned}
\sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) &:= \sup\{s(\mathcal{D}, f) : \mathcal{D} \text{ suddivisione di } [a, b]\} \\
&\leq \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f) = \inf\{S(\mathcal{D}, f) : \mathcal{D} \text{ suddivisione di } [a, b]\}
\end{aligned}$$

Somme inferiori e superiori

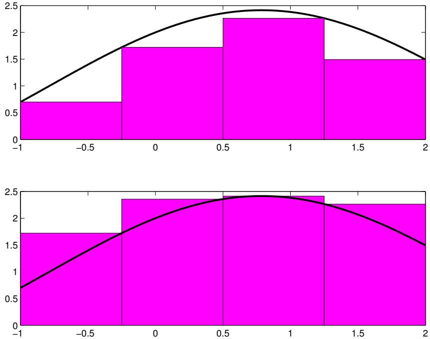

Figura : Somme inferiori e superiori per $f(x) = \sin(x) + \cos(x) + 1$ in $[-1, 2]$ (area in magenta), per suddivisione $\{x_k\}_{k=1,\ldots,5}$, con $x_k = -1 + 3(k-1)/4$.

Somma di Riemann

Definizione

La funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, con $[a, b]$ limitato e f limitata, si dice *integrabile secondo Riemann* *se risulta*

$$\sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) = \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f)$$

Il valore $\int_a^b f(x)dx := \sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) = \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f)$ è detto *integrale di Riemann* *di f in $[a, b]$.*

Usualmente

- *la funzione f è detta* *integranda,*
- *$[a, b]$ è detto* *dominio di integrazione.*

Nota.

Se f è limitata, f non è necessariamente integrabile. La funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in \mathbb{Q} \\ 0, & se\ x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}, \quad x \in [0, 1].$$

è limitata ma non integrabile.
Infatti

- *se scelgo* $\{\xi_j\}_{j=0,\ldots,n} \subset \mathbb{Q}$ *allora* $S_n(f) = 0$;
- *se scelgo* $\{\xi_j\}_{j=0,\ldots,n} \subset \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *allora*

$$S_n(f) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) = 1 - 0 = 1.$$

Alcuni teoremi

Teorema

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, *con* $[a, b]$ *limitato e* f *continua allora* f *è integrabile secondo Riemann.*

Teorema

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, *con* $[a, b]$ *limitato e* f *monotona e limitata allora* f *è integrabile secondo Riemann.*

Alcuni teoremi

Teorema

Siano $a < b < c$. *Sia* $f_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ *integrabili. Allora la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & se\ x \in [a, b] \\ f_2(x), & se\ x \in [b, c] \end{cases}$$

è integrabile (secondo Riemann) in $[a, c]$ *ed è*

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_b^c f_2(x)dx.$$

Corollario (Additività)

Siano $a < b < c$. *Sia* $f : [a, c] \to \mathbb{R}$, *integrabile (secondo Riemann) in* $[a, b]$ *e* $[b, c]$. *Allora la funzione* f *è integrabile (secondo Riemann) in* $[a, c]$ *ed è*

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Teorema (Linearità)

Siano $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$. *Siano* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrabili. Allora per ogni* α, $\beta \in \mathbb{R}$, *la funzione* $\alpha f + \beta g$ *è integrabile (secondo Riemann) e*

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

Alcuni teoremi

Siano $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile. Useremo la convenzione

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x).$$

Teorema

Siano $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile (secondo Riemann) e non negativa. Allora

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Alcuni teoremi

Teorema

Siano $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabili (secondo Riemann) e tali che $f(x) \geq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$. Allora

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

Teorema

Siano $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, tale che $|f|$ è integrabile (secondo Riemann) in $[a, b]$. Allora f è integrabile (secondo Riemann) in $[a, b]$ ed è

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Teorema della media integrale

Teorema (Media integrale)

Siano $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$. *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua. Allora esiste* $\xi \in [a, b]$ *tale che*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(\xi).$$

Nota.

Il teorema precedente dice che esiste c *tale che* $\int_a^b f(x)dx$ *è uguale all'area del rettangolo di base* $[a, b]$ *e altezza* $f(c)$.

Teorema della media integrale

Dimostrazione.

Se f è continua nell'intervallo limitato $[a, b]$, per il teorema di Weierstrass, esistono $m = \min\{f(x) : x \in [a, b]\}$
$M = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$ ed è

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Dalla monotonia dell'integrale

$$m(b-a) = \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M f(x) dx = M(b-a).$$

Quindi

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

Siccome f è continua, allora, per il teorema dei valori intermedi, f assume tutti i valori tra m e M. Quindi esiste $\xi \in [a, b]$ tale che

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Primitiva di una funzione

Definizione

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Una funzione $G : [a, b] \to \mathbb{R}$, derivabile in $[a, b]$ è una primitiva di f in $[a, b]$ se

$$G'(x) = f(x), \quad \textit{per ogni } x \in [a, b].$$

Esempio

- $G(x) = x^2$ *è una primitiva di* $f(x) = 2x$;
- $G(x) = \sin(x)$ *è una primitiva di* $f(x) = \cos(x)$;
- $G(x) = \log(x)$ *è una primitiva di* $f(x) = 1/x$.

Teorema

Sia G una primitiva di f. Allora tutte e sole le primitive di f sono del tipo $G_k(x) := G(x) + k$.

Primitiva di una funzione

Dimostrazione.

- *Se G è una primitiva di f allora lo è pure $G_k(x) := G(x) + k$ in quanto*
$$G_k'(x) = G'(x) + 0 = f(x).$$
- *Se G_1 e G_2 sono due primitive di f allora*
$$G_1'(x) = f(x), \;\; G_2'(x) = f(x), \; \textit{per ogni } x \in [a, b]$$
e quindi
$$G_1'(x) - G_2'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad \textit{per ogni } x \in [a, b].$$
Le costanti $g(x) = k$ sono le uniche funzioni la cui derivata è nulla. Quindi $G_1 - G_2 = k$, cioè $G_1 = G_2 + k$.

Primitiva di una funzione

Notazione.

Con la scrittura

$$\int f(x)dx$$

indichiamo tutte le primitive della funzione f, e chiameremo $\int f(x)dx$ integrale indefinito di f.

Esempio

Vediamo alcuni esempi di integrale indefinito.

- $\int \cos(x)dx = \sin(x) + k, \;\; k \in \mathbb{R};$
- $\int \frac{1}{x}dx = \log(x) + k, \;\; k \in \mathbb{R};$

Nota.

L'integrale definito $\int_a^b f(x)dx$ è un numero reale, mentre l'integrale indefinito $\int f(x)dx$ è una classe di funzioni.

Nota.

Supponiamo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *sia una funzione integrabile (secondo Riemann) in ogni suo sottointervallo* $[x_0, x] \subseteq [a, b]$*. Risulterà importante in seguito la funzione*

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

che mappa x *nell'integrale definito* $\int_{x_0}^{x} f(t)dt$*.*

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Vale il seguente asserto, noto come teorema fondamentale del calcolo integrale.

Teorema (Fondamentale del calcolo integrale)

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua,* $x_0 \in [a, b]$ *e*

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt.$$

Allora F *è derivabile ed è*

$$F'(x) = f(x),$$

cioè F *è una primitiva di* f *(in* $[a, b]$*)*

Dimostrazione.

Osserviamo che, per il teorema della media integrale, posto nell'asserto $a = x$, $b = x + h$, *abbiamo che esiste* $\xi_h(x) \in (a, b) = (x, x + h)$ *tale che*

$$f(\xi_h(x)) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt = \frac{1}{(x+h)-h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Quindi, per un certo $\xi_h(x) \in (x, x + h)$

$$\begin{aligned}
\frac{F(x+h)-F(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x+h} f(t)dt - \int_{x_0}^{x} f(t)dt\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x} f(t)dt + \int_{x}^{x+h} f(t)dt - \int_{x_0}^{x} f(t)dt\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_{x}^{x+h} f(t)dt\right) \\
&= f(\xi_h(x))
\end{aligned}$$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Passando al limite ambo i membri, visto che f è continua e $\xi_h(x) \in (x, x+h)$ da

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(\xi_h(x))$$

abbiamo

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} f(\xi_h(x)) = f(x).$$

Nell'ultimo passaggio si osservi che se $h \to 0$, visto che $\xi_h(x) \in (x, x+h)$, pure $\xi_h(x) \to x$ e quindi $\lim_{h \to 0} f(\xi_h(x)) = f(x)$ per la continuità di f.

Secondo teorema fondamentale del calcolo integrale

Notazione.

Sia $G : [a, b] \to \mathbb{R}$. *La scrittura* $G(x)|_a^b$ *indica la quantità* $G(b) - G(a)$.

Teorema (Secondo teorema fondamentale del calcolo integrale)

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua e* G *primitiva di* f. *Allora*

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = G(x)|_a^b.$$

Secondo teorema fondamentale del calcolo integrale

Dimostrazione.

Se G è una primitiva di f allora

- $G'(x) = f(x)$
- *per il teorema fondamentale del calcolo integrale, la funzione G coincide con $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ a meno di una costante k, visto che F è una primitiva e le primitive sono definite a meno di una costante di proporzionalità .*

Quindi

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt + k.$$

Siccome $\int_a^a f(t)dt = 0$ (deriva dalla definizione di integrale), abbiamo

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt + G(a)$$

da cui $\int_a^x f(t)dt = G(x) - G(a)$ e per $x = b$

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a) = G(x)|_a^b.$$

Teorema

Vale la seguente lista di integrali indefiniti:

f	$\int f(x)dx$	*nota*
x^{α}	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+k$	$\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{-1\}$
$1/x$	$\log(\|x\|)+k$	
$\sin(x)$	$-\cos(x)+k$	
$\cos(x)$	$\sin(x)+k$	
$\sinh(x)$	$\cosh(x)+k$	
$\cosh(x)$	$\sinh(x)+k$	
e^{x}	$e^{x}+k$	
$1+\tan^{2}(x)$	$\tan(x)+k$	
$(1-x^{2})^{-1/2}$	$\arcsin(x)+k$	
$-(1-x^{2})^{-1/2}$	$\arccos(x)+k$	
$(1+x^{2})^{-1}$	$\arctan(x)+k$	

Nota.

Si osservi che non tutte le funzioni hanno una primitiva esplicitamente nota o facilmente esprimibile. Questo è il caso di

$$\int e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} erf(x)$$

ove per definizione

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Applicazione dei teoremi fondamentali del calcolo integrale

Esempio

Essendo $G(x) = -cos(x)$ *la primitiva di* $f(x) = \sin(x)$, *abbiamo*

$$\int_a^b \sin(x)dx = (-cos(b)) - (-cos(a)) = cos(a) - cos(b)$$

Esempio

Essendo $G(x) = \log(x)$ *la primitiva di* $f(x) = 1/x$, *abbiamo*

$$\int_3^5 (1/x)dx = \log(5) - \log(3).$$

Esempio

Essendo $G(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k$ *le primitive di* $f(x) = x^{\alpha}$, *per* $\alpha \neq -1$, *abbiamo che*

- *per* $\alpha = 2$,
$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + k;$$
- *per* $\alpha = 1/2$,
$$\int \sqrt{x} dx = \frac{2x^{3/2}}{3} + k;$$
- *per* $\alpha = -1/2$,
$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + k$$

Integrali generalizzati.

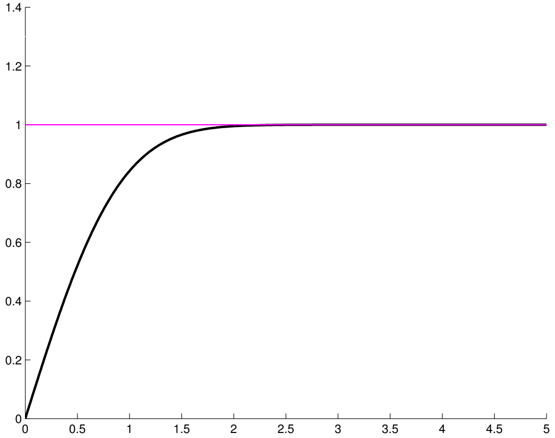

Figura : La funzione *erf* in $[0, 5]$.

Integrali per sostituzione

Teorema (sostituzione)

Siano

- G *la primitiva di* f *in* I, *cioè* $G'(t) = f(t)$ *per ogni* $t \in [\alpha, \beta]$;
- $t = \phi(x)$ *una funzione derivabile con derivata continua, tale che* $\phi([a, b]) \equiv [\alpha, \beta]$.

Allora

- $\int f(t)dt = \int f(\phi(x))\phi'(x)dx$;
- $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{a}^{b} f(\phi(x))\phi'(x)dx$;

Dimostrazione.

Se G è una primitiva di f allora $G'(t) = f(t)$ *e quindi per il teorema sulla derivata di una funzione composta, essendo* $t = \phi(x)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} G(\phi(x)) &= G'(\phi(x)) \cdot \phi'(x) \\ &= f(\phi(x)) \cdot \phi'(x). \end{aligned}$$

per cui $G(\phi(x))$ *è la primitiva di* $f(\phi(x)) \cdot \phi'(x)$. *Di conseguenza, essendo* $t = \phi(x)$

$$\int f(t)dt = G(t) = G(\phi(x)) = \int f(\phi(x))\phi'(x)dx.$$

La seconda parte dell'asserto deriva dal teorema fondamentale del calcolo integrale.

Integrali per sostituzione. Esempio 1.

Esempio

Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \sin(3x)dx.$$

Svolgimento. (metodo 1)

Posto $t = 3x$, *abbiamo che, relativamente al teorema di sostituzione,* $\phi(x) = 3x$ *da cui* $\phi'(x) = 3$. *Quindi*

$$\int (\sin(3x)) \cdot 3dx \quad = \quad \int \sin(t)dt = -\cos(t) = -\cos(3x).$$

Da

$$\int (\sin(3x)) \cdot 3dx = -\cos(3x)$$

ricaviamo, dividendo per 3 *ambo i membri*

$$\int (\sin(3x))dx = -\frac{\cos(3x)}{3}.$$

Integrali per sostituzione. Esempio 1.

Esempio

Calcolare l'integrale indefinito
$$\int \sin(3x)dx.$$

Svolgimento. (metodo 2)

Posto $t = 3x$, abbiamo che, relativamente al teorema di sostituzione, $dt = \phi'(x)dx = 3dx$, ovvero $dx = (1/3)dt$. Quindi
$$\begin{aligned}\int (\sin(3x))dx &= \int \sin(t)(1/3)dt = (1/3)\int \sin(t)dt \\ &= (1/3)\cdot(-cos(t)) + k = (1/3)\cdot(-cos(3x)) + k.\end{aligned}$$

Integrali per sostituzione. Esempio 2.

Esempio

Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^3 \frac{1}{2x+1}\,dx.$$

Svolgimento.

Posto $t = 2x+1$, *abbiamo che* $dt = \left(\frac{d}{dx}(2x+1)\right)dx = 2dx$, *da cui* $dx = (1/2)dt$. *Quindi*

$$\int \frac{1}{2x+1}\,dx = \int \frac{1}{t}(1/2)dt = (1/2)\log(|t|) + k = (1/2)\log(|2x+1|) + k \quad (1)$$

e di conseguenza per il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\int_0^3 \frac{1}{2x+1}\,dx = (1/2)\log(|2x+1|)\Big|_0^3 = (1/2)(\log(7) - \log(1)) = \frac{\log(7)}{2}$$

Integrali per sostituzione. Esempio 1.

Esempio

Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{x^2+4}\,dx.$$

Svolgimento.

Come noto

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan(x) + k.$$

Eseguo una sostituzione che mi permetta di utilizzare questo risultato. Pongo $x = 2t$, *cioè* $dx = 2dt$. *Allora*

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+4}\,dx &= \int \frac{1}{4t^2+4}\,2dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\arctan(t) + k = \frac{1}{2}\arctan(x/2) + k.\end{aligned}$$

Integrali per sostituzione. Esempio 2.

Esempio

Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{(3+5x)^6}\,dx.$$

Svolgimento.

Pongo $t = 3 + 5x$*, ovvero* $x = (t-3)/5$*. Abbiamo* $dx = (1/5)dt$ *e quindi da* $\int t^{-6} = (-1/5)t^{-5} + k$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(3+5x)^6}\,dx. &= \int \frac{1}{t^6}(1/5)dt = (1/5)\int \frac{1}{t^6}\,dt \\
&= (1/5)(-1/5)t^{-5} + k = (-1/25)t^{-5} + k \\
&= (-1/25)\frac{1}{(3+5x)^5} + k.
\end{aligned}$$

Nota.

Si supponga di dover calcolare l'integrale indefinito

$$\int f'(x) \cdot (f(x))^p dx, \ p \neq -1.$$

Posto $t = f(x)$*, abbiamo* $dt = f'(x)dx$*, e quindi*

$$\int f'(x)(f(x))^p dx = \int \underbrace{(f(x))^p}_{t^p} \underbrace{f'(x)dx}_{dt} = \frac{t^{p+1}}{(p+1)} = \frac{(f(x))^{p+1}}{(p+1)} + k.$$

Nota.

Si supponga di dover calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx.$$

Posto $t = f(x)$*, abbiamo* $dt = f'(x)dx$ *e quindi*

$$\int \frac{\overbrace{f'(x)}^{dt/dx}}{\underbrace{f(x)}_{t}} dx = \int \frac{1}{t} dt = \log(|t|) + k = \log(|f(x)|) + k.$$

Integrali per sostituzione. Nota III.

Nota.

Si supponga di dover calcolare l'integrale indefinito

$$\int f'(x)\phi(f(x))dx.$$

Posto $t = f(x)$*, abbiamo* $dt = f'(x)dx$ *e quindi*

$$\int f'(x)\phi(f(x))dx = \int \phi(\underbrace{f(x)}_{t})\underbrace{f'(x)dx}_{dt} = \int \phi(t)dt$$

che in molti casi è più facile da risolvere dell'integrale iniziale.

Gli esempi delle due note appena esposte ricadono appunto in questa famiglia di problemi.

Integrali per sostituzione. Esempio 3.

Esempio

Calcolare l'integrale indefinito

$$\int 3x \cdot e^{x^2} dx.$$

Svolgimento.

Osserviamo che se $f(x) = x^2$ *allora* $f^{(1)}(x) = 2x$*. Notiamo che ci sta una componente del tipo* xdx *nell'argomento dell'integrale, che dovrebbe agevolare il calcolo dell'integrale per sostituzione* $t = x^2$*. In effetti* $dt = 2xdx$ *(o* $dx = (1/2x)dt$*) e quindi*

$$\begin{aligned} \int 3x \cdot e^{x^2} dx &= \int 3x \cdot e^t (1/2x) dt = \int (3/2) e^t dt \\ &= (3/2)e^t + k = (3/2)e^{x^2} + k \qquad (2) \end{aligned}$$

Integrali per sostituzione. Esempio 4.

Esempio

Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}dx.$$

Svolgimento.

Posto $\sqrt{x} = t$ *ovvero* $x = t^2$, *abbiamo* $dx = 2t\,dt$ *e quindi*

$$\int \frac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}dx = \int \frac{t}{2+t}2t\,dt.$$

Integrali per sostituzione. Esempio 4.

Inoltre da $\int t dt = (t^2/2) + k$ *si ha*

$$\int 2t \ \ dt = 2 \int t \ \ dt = 2(t^2/2) + k = t^2 + k$$

e quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{t}{2+t} 2t \ \ dt &= \int (2t) \frac{(t+2-2)}{2+t} dt = \int (2t) \left(1 - \frac{2}{2+t} dt \right) \\ &= \int 2t dt - \int \frac{4t}{2+t} dt = t^2 - \int \frac{4t}{2+t} dt \end{aligned}$$

Integrali per sostituzione. Esempio 4.

Osserviamo che, posto $s = 2 + t$, $t = s - 2$ $ds = dt$ *e quindi*

$$\begin{aligned} \int \frac{4t}{2+t} dt &= \int \frac{4(s-2)}{s} ds = \int 4 ds - \int \frac{8}{s} ds \\ &= 4s - 8 \log(|s|) = 4(2+t) - 8 \log(|2+t|) \end{aligned}$$

Visto che $\int \frac{4t}{2+t} dt = 4(2+t) - 8 \log(2+t)$, $t = \sqrt{x}$, *abbiamo*

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} dx &= t^2 - \int \frac{4t}{2+t} = t^2 - (4(2+t) - 8 \log(2+t)) + k \\ &= |x| - (4(2+\sqrt{x}) - 8 \log(|2+\sqrt{x}|)) + k \\ &= |x| - 8 - 4\sqrt{x} + 8 \log(|2+\sqrt{x}|)) + k \\ &= |x| - 4\sqrt{x} + 8 \log(|2+\sqrt{x}|)) + k. \end{aligned}$$

Si osservi che nell'ultimo passaggio si è tramutato un $-8 + k$ *in* k *vista l'arbitrarietà di* k.

Integrazione per parti.

Teorema (Integrazione per parti)

Siano f, g derivabili in $[a, b]$. Allora

$$\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx$$

e

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)dx.$$

Integrazione per parti.

Dimostrazione.

Ricordiamo che

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x) \Leftrightarrow f'(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)'(x) - f(x) \cdot g(x)$$

e quindi integrando ambo i membri

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx = \int (f \cdot g)'(x) dx - \int f(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g(x) dx.$$

La seconda parte del teorema deriva dal teorema fondamentale del calcolo integrale.

Integrazione per parti. Esercizio 1.

Esercizio

Calcolare

$$\int x \sin(x) dx$$

Svolgimento.

L'idea sta nel capire che derivando la x *e integrando* $\sin(x)$ *si ottiene un integrale più semplice. Infatti posto* $f(x) = x$, $g(x) = \int \sin(x) dx = -\cos(x)$,

$$\int x \sin(x) dx = -x \cos(x) - \int 1 \cdot (-\cos(x)) dx = -x \cos(x) + \sin(x).$$

Nota.

Posto $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \int x dx = x^2/2$, *avrei il non ovvio*

$$\int x \sin(x) dx = (\sin(x)) \cdot x^2/2 - \int (\cos(x)) \cdot (x^2/2) dx$$

Esercizio

Calcolare

$$\int \log(x)dx$$

Svolgimento.

Osserviamo che $\log(x) = 1 \cdot \log(x)$. *Posto* $f(x) = \log(x)$, $g(x) = \int 1dx = x$, *da* $f'(x) = 1/x$ *abbiamo*

$$\begin{aligned} \int 1 \cdot \log(x)dx &= x\log(x) - \int \frac{1}{x} \cdot x \ \ dx \\ &= x\log(x) - x + k. \end{aligned}$$

Esercizio

Calcolare

$$\int \arctan(x)dx$$

Svolgimento.

Osserviamo che $\log(x) = 1 \cdot \arctan(x)$*. Posto* $f(x) = \arctan(x)$, $g(x) = \int 1dx = x$*, da* $f'(x) = 1/(1+x^2)$ *abbiamo*

$$\begin{aligned} \int 1 \cdot \arctan(x)dx &= x \cdot \arctan(x) - \int \frac{1}{1+x^2} \cdot x \ \ dx \\ &= x \cdot \arctan(x) - (1/2) \cdot \log(1+x^2) + k. \end{aligned}$$

essendo, posto $t = 1 + x^2$, $dt = 2x\,dx$ *e quindi* $x\,dx = (1/2)dt$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+x^2} \cdot x \ \ dx &= \int \frac{1}{t} \cdot (1/2) \ \ dt = (1/2) \cdot \log(|t|) \\ &= (1/2) \cdot \log(|1+x^2|) = (1/2) \cdot \log(1+x^2). \end{aligned}$$

Esercizio

Calcolare

$$\int e^x \cdot \sin(x)dx$$

Svolgimento.

Posto $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \int e^x dx = e^x$, *da* $f'(x) = \cos(x)$

$$\int e^x \cdot \sin(x)dx = e^x \cdot \sin(x) - \int e^x \cdot \cos(x)dx$$

Posto $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = \int e^x dx = e^x$, *da* $f'(x) = -\sin(x)$ *abbiamo*

$$\begin{aligned} \int e^x \cdot \cos(x)dx &= e^x \cdot \cos(x) - \int e^x \cdot (-\sin(x))dx \\ &= e^x \cdot \cos(x) + \int e^x \cdot \sin(x)dx \qquad (3) \end{aligned}$$

Integrazione per parti. Esercizio 4.

Assemblando i risultati

$$\begin{aligned}\int e^x \cdot \sin(x)dx &= e^x \cdot \sin(x) - (e^x \cdot \cos(x) - \int e^x \cdot (-\sin(x))dx) \\ &= e^x \cdot \sin(x) - e^x \cdot \cos(x) - \int e^x \cdot \sin(x)dx\end{aligned}$$

Portando a primo membro $\int e^x \cdot \sin(x)dx$ *e raccogliendo* e^x

$$2\int e^x \cdot \sin(x)dx = e^x \cdot (\sin(x) - \cos(x))$$

cioè

$$\int e^x \cdot \sin(x)dx = \frac{e^x \cdot (\sin(x) - \cos(x))}{2} + k.$$

Definizione

La funzione

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

con P_n, Q_m rispettivamente polinomi di grado n e m, sono note come funzioni razionali.

Esempio

Le funzioni

- $\frac{3x^2+1}{x^2+5}$;
- $\frac{1}{2x^2-8}$;
- $\frac{x^8}{x^3+2x+3}$;

sono funzioni razionali.

Problema.

Consideriamo al variare di m, n, il calcolo di integrali indefiniti di funzioni razionali, cioè

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx.$$

Integrazione di funzioni razionali $n \geq m$.

Traccia.

Si fa la divisione tra i due polinomi e si trova

$$P_n(x) = S_{n-m}(x) \cdot Q_m(x) + R_{m-1}(x)$$

con S_{n-m} polinomio di grado al più $n-m$ e R_{m-1} polinomio di grado al più $m-1$. Quindi

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx = \int S_{n-m}(x) dx + \int \frac{R_{m-1}(x)}{Q_m(x)} dx$$

Visto che è semplice calcolare l'integrale di un polinomio, abbiamo risolto il problema se siamo in grado di studiare i casi in cui la funzione razionale ha il polinomio a numeratore di grado inferiore del denominatore.

Esempio

Calcolare

$$\int \frac{x^3+1}{x^2+2x+2}\,dx$$

mediante integrali di funzioni razionali con il grado del polinomio a numeratore inferiore o uguale a quello del denominatore.

Traccia.

Dalla divisione di polinomi,

$$\begin{array}{c|c}
x^3+1 & x^2+2x+2 \\
\cline{2-2}
-x^3-2x^2-2x & x-2 \\
\cline{1-1}
-2x^2-2x+1 & \\
+2x^2+4x+4 & \\
\cline{1-1}
2x+5 &
\end{array}$$

Quindi

$$(x^3 + 1) = (x^2 + 2x + 2)(x - 2) + (2x + 5).$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3+1}{x^2+2x+2}\,dx &= \int \frac{(x^2+2x+2)(x-2)+2x+5}{x^2+2x+2}\,dx \\
&= \int (x-2)\,dx + \int \frac{2x+5}{x^2+2x+2}\,dx \\
&= \frac{(x-2)^2}{2} + \int \frac{2x+5}{x^2+2x+2}\,dx.
\end{aligned}$$

Integrazione di funzioni razionali $n < m$: alcuni casi, $1/(Ax + B)$.

Traccia.

Supponiamo sia

$$f(x) = \frac{1}{Ax + B}$$

Poniamo $y = Ax + B$ *e abbiamo che* $dy = A\,dx$ *ovvero* $dx = (1/A)\,dy$, *per cui*

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{Ax+B} dx &= \int \frac{1}{y}(1/A)\,dy \\ &= (1/A)\log(|y|) + k = (1/A)\log(|Ax+B|) + k. \end{aligned}$$

Integrazione di funzioni razionali $n < m$. Il caso $1/(ax^2 + bx + c)$.

Traccia.

Supponiamo sia

$$f(x) = \frac{1}{ax^2 + bx + c}$$

In questa situazione, studiamo caso per caso il problema al variare di

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Ricordiamo che se

- $\Delta > 0$, *allora* $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)(x - x_1)$ *per* $x_0 \neq x_1 \in \mathbb{R}$;
- $\Delta = 0$, *allora* $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$ *per* $x_0 \in \mathbb{R}$;
- $\Delta < 0$, *allora* $ax^2 + bx + c$ *non ha radici reali.*

Integrazione di funzioni razionali $n < m$. Il caso $1/(ax^2 + bx + c)$, $\Delta > 0$.

Traccia.

Supponiamo sia $\Delta = b^2 - 4ac > 0$*. Allora esistono* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *tali che*

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x2)$$

e quindi per certi S, T *abbiamo*

$$\frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{1}{a}\left(\frac{S}{x - x_1} + \frac{T}{x - x_2}\right)$$

Si verifica facilmente che deve essere

$$\begin{cases} S + T = 0 \\ -S \cdot x_2 - T \cdot x_1 = 1 \end{cases}$$

Integrazione di funzioni razionali $n < m$. Il caso $1/(ax^2 + bx + c)$, $\Delta > 0$.

Traccia.

Integrando ambo i membri di

$$\frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a}\left(\frac{S}{x - x_1} + \frac{T}{x - x_2}\right)$$

abbiamo

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx &= \int \frac{1}{a}\left(\frac{S}{x - x_1} + \frac{T}{x - x_2} dx\right) \\
&= \frac{S}{a} \int \frac{1}{x - x_1} dx + \frac{T}{a} \int \frac{1}{x - x_2} dx \\
&= \frac{S}{a} \log(|x - x_1|) + \frac{T}{a} \log(|x - x_2|) + k
\end{aligned}$$

Integrazione di funzioni razionali $n < m$. Il caso $1/(ax^2 + bx + c)$, $\Delta > 0$. Esempio.

Esempio

Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{x^2 + 4x - 5}\, dx$$

Traccia.

Non è difficile vedere che $x^2 + 4x - 5 = (x-1)(x+5)$. *Affinchè*

$$\frac{1}{x^2 + 4x - 5} = \frac{S}{x-1} + \frac{T}{x+5}$$

da

$$\frac{S}{x-1} + \frac{T}{x+5} = \frac{S(x+5) + T(x-1)}{(x-1)(x+5)} = \frac{(S+T)x + (5S-T)}{(x-1)(x+5)}$$

per confronto, serve che

$$\begin{cases} S + T = 0 \\ 5S - T = 1 \end{cases} \Leftrightarrow S = 1/6,\ T = -1/6.$$

Integrazione di funzioni razionali $n < m$. Il caso $1/(ax^2 + bx + c)$, $\Delta > 0$. Esempio.

Così

$$\frac{1}{x^2 + 4x - 5} = \frac{(1/6)}{x - 1} + \frac{(-1/6)}{x + 5}$$

da

$$\int \frac{1}{x + a}\, dx = \log(|x + a|) + k,\ a \in \mathbb{R},$$

ricaviamo

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2 + 4x - 5}\, dx &= \int \left(\frac{(1/6)}{x - 1} + \frac{(-1/6)}{x + 5} \right) dx \\
&= (1/6) \int \frac{1}{x - 1}\, dx - (1/6) \int \frac{1}{x + 5}\, dx \\
&= (1/6) \log(|x - 1|) - (1/6) \log(|x + 5|) + k.
\end{aligned}$$

Integrazione di funzioni razionali $n < m$. Il caso $1/(ax^2 + bx + c)$, $\Delta < 0$.

Traccia.

Analizziamo il caso in cui $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. *In questa situazione il polinomio* $ax^2 + bx + c$ *non è fattorizzabile. Tuttavia per certi* S, T, U *da determinare, con* $U > 0$

$$ax^2 + bx + c = (Sx + T)^2 + U$$

e quindi

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{1}{(Sx + T)^2 + U} dx = \frac{1}{U} \int \frac{1}{\left(\frac{Sx+T}{\sqrt{U}}\right)^2 + 1} dx$$

Integrazione di funzioni razionali $n < m$. Il caso $1/(ax^2 + bx + c)$, $\Delta < 0$.

Traccia.

Posto $z = \frac{Sx+T}{\sqrt{U}}$ *ovviamente* $dz = \frac{S}{\sqrt{U}} dx$ *e quindi*

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx &= \frac{1}{U} \int \frac{1}{\left(\frac{Sx+T}{\sqrt{U}}\right)^2 + 1} dx \\
&= \frac{1}{U} \frac{\sqrt{U}}{S} \int \frac{1}{z^2 + 1} dz = \frac{1}{S\sqrt{U}} \arctan(z) + k \\
&= \frac{1}{S\sqrt{U}} \arctan\left(\frac{Sx + T}{\sqrt{U}}\right) + k.
\end{aligned}$$

Integrazione di funzioni razionali $n < m$. Il caso $1/(ax^2 + bx + c)$, $\Delta < 0$. Esempio.

Esempio

Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 5}\, dx$$

Traccia.

Non è difficile vedere che $x^2 + 4x + 5$ *non ha radici reali in quanto* $\Delta = 16 - 20 < 0$. *D'altra parte*

$$x^2 + 4x + 5 = x^2 + 4x + 4 - 4 + 5 = (x^2 + 4x + 4) + 1 = (x+2)^2 + 1$$

e quindi, posto $t = x + 2$, $dx = dt$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 + 4x + 5}\, dx &= \int \frac{1}{(x+2)^2 + 1}\, dx \\ &= \int \frac{1}{t^2 + 1}\, dt = \arctan(t) + k = \arctan(x+2) + k. \end{aligned}$$

Integrazione di funzioni razionali $n < m$. Il caso $1/(ax^2 + bx + c)$, $\Delta = 0$.

Traccia.

Se $\Delta = 0$ *allora per certi* $S, T \in \mathbb{R}$ *abbiamo*

$$ax^2 + bx + c = (Sx + T)^2$$

e quindi posto $t = Sx + T$, *si ha* $dt = Sdx$, $dx = (1/S)dt$ *e quindi*

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx &= \int \frac{1}{(Sx + T)^2} dx = \int \frac{1}{t^2} \frac{1}{S} \, dx \\ &= \frac{1}{S} \frac{(-1)}{t} + k = \frac{1}{S} \left(\frac{-1}{Sx + T} \right) + k\end{aligned}$$

Integrazione di funzioni razionali $n < m$. Il caso $1/(ax^2 + bx + c)$, $\Delta = 0$. Esempio.

Esempio

Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{3x^2 - 12x + 12}\, dx$$

Traccia.

Non è difficile vedere che $3x^2 - 12x + 12$ *ha radici reali in quanto* $\Delta = 0$ *e sono la radice (doppia)* $x^* = 2$. *Quindi posto* $t = x - 2$, *si ha* $dx = dt$ *e così*

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{3x^2 - 12x + 12}\, dx &= \int \frac{1}{3(x-2)^2}\, dx \\ &= (1/3) \int \frac{1}{t^2}\, dt = \frac{-1}{3t} + k = \frac{-1}{3(x-2)} + k. \end{aligned}$$

Integrazione di funzioni razionali $n < m$. Il caso $1/(ax^2 + bx + c)$, esercizi.

Esercizio

Mostrare che

- $\int \frac{1}{x^2-5x+6} dx = \log(|x-3|) - \log(|x-2|)) + k$
- $\int \frac{1}{x^2+4} dx = (1/2) \arctan(x/2) + k$
- $\int \frac{1}{x^2+x+1} dx = (2/\sqrt{3}) \arctan\left((2/\sqrt{3})(x+(1/2))\right) + k$
- $\int \frac{1}{x^2+2x+1} dx = \frac{-1}{x+1} + k$

Integrazione di funzioni razionali $n < m$: alcuni casi, $x/(ax^2 + bx + c)$, $\Delta > 0$.

Traccia.

Calcoliamo

$$\int \frac{x}{ax^2 + bx + c}$$

al variare di $\Delta = b^2 - 4ac$.

Integrazione di funzioni razionali $n < m$: alcuni casi, $x/(ax^2 + bx + c)$, $\Delta > 0$.

Consideriamo il caso $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. *Osserviamo che posto* $t = x - x_0$, $dx = dt$ *si ha*

$$\int \frac{1}{x - x_0} dx = \int \frac{1}{t} dt = \log(|t|) = \log(|x - x_0|).$$

Come prima, $\Delta > 0$ *vuol dire che esistono* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *per cui* $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. *Quindi per certi* $S, T \in \mathbb{R}$, *da* $\int \frac{1}{x - x_0} dx = \log(|x - x_0|)$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{ax^2 + bx + c} dx &= \int \frac{x}{a(x - x_0)(x - x_1)} dx \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{S}{x - x_0} + \frac{1}{a} \int \frac{T}{x - x_1} \\ &= \frac{S}{a} \log(|x - x_0|) + \frac{T}{a} \log(|x - x_1|) + k \end{aligned}$$

Integrazione di funzioni razionali $n < m$. Il caso $x/(ax^2 + bx + c)$, $\Delta > 0$.

Osserviamo che affinchè sia

$$\frac{x}{a(x-x_0)(x-x_1)} = \frac{S}{a(x-x_0)} + \frac{T}{a(x-x_1)} = \frac{S(x-x_1) + T(x-x_0)}{a(x-x_0)(x-x_1)}$$

necessariamente, per confronto nei termini al numeratore,

$$\begin{cases} S + T = 1 \\ -Sx_1 - Tx_0 = 0 \end{cases}$$

sistema lineare che ha una e una sola soluzione.

Integrazione di funzioni razionali $n < m$. Il caso $x/(ax^2 + bx + c)$, $\Delta > 0$. Esempio.

Esempio

Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{x}{x^2 + 4x - 5}\, dx$$

Traccia.

Da un esempio precedente, $x^2 + 4x - 5 = (x - 1)(x + 5)$*. Affinchè*

$$\frac{x}{x^2 + 4x - 5} = \frac{S}{x - 1} + \frac{T}{x + 5}$$

da

$$\frac{S}{x - 1} + \frac{T}{x + 5} = \frac{S(x + 5) + T(x - 1)}{(x - 1)(x + 5)} = \frac{(S + T)x + (5S - T)}{(x - 1)(x + 5)}$$

per confronto, serve che

$$\begin{cases} S + T = 1 \\ 5S - T = 0 \end{cases} \Leftrightarrow S = 1/6,\ T = 5/6.$$

e quindi

$$\frac{x}{x^2 + 4x - 5} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x - 1} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{x + 5}$$

Integrazione di funzioni razionali $n < m$. Il caso $x/(ax^2 + bx + c)$, $\Delta > 0$. Esempio.

Poichè

$$\frac{x}{x^2 + 4x - 5} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x - 1} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{x + 5}$$

da

$$\int \frac{1}{x + a}\, dx = \log(|x + a|) + k,\ a \in \mathbb{R},$$

ricaviamo

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{x^2 + 4x - 5}\, dx &= \int \left(\frac{(1/6)}{x - 1} + \frac{(5/6)}{x + 5} \right) dx \\
&= (1/6) \int \frac{1}{x - 1}\, dx + (5/6) \int \frac{1}{x + 5}\, dx \\
&= (1/6) \log(|x - 1|) + (5/6) \log(|x + 5|) + k.
\end{aligned}$$

Integrazione di funzioni razionali $n < m$. Il caso $x/(ax^2 + bx + c)$, $\Delta < 0$.

Traccia.

Consideriamo ora il caso $\Delta < 0$. *Da* $\frac{d}{dx} ax^2 + bx + c = 2ax + b$, $\int (f'(x)/f(x))dx = \log(|f(x)|) + k$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{ax^2+bx+c}dx &= \int \frac{2ax+b-b}{2a(ax^2+bx+c)}dx \\
&= \frac{1}{2a}\left(\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx + b\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx\right) \\
&= \frac{1}{2a}(\log(|ax^2+bx+c|) + bC_1 \arctan(C_2 x + C_3)) + k
\end{aligned}$$

dove la primitiva $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} = C_1 \arctan(C_2 x + C_3)$ *si calcola come detto in precedenza.*

Integrazione di funzioni razionali $n < m$. Il caso $x/(ax^2 + bx + c)$, $\Delta < 0$. Esempio.

Esempio

Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{x}{x^2 + 4x + 5}\, dx$$

Traccia.

Non è difficile vedere che $x^2 + 4x + 5$ *non ha radici reali in quanto* $\Delta = 16 - 20 < 0$. *Notiamo che*

$$x^2 + 4x + 5 = x^2 + 4x + 4 - 4 + 5 = (x^2 + 4x + 4) + 1 = (x + 2)^2 + 1.$$

Inoltre, posto $u = t^2 + 1$, $du = 2\, dt$ *e quindi*

$$\int \frac{t}{t^2 + 1}\, dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u}\, du = \frac{1}{2} \log(|u|) = \frac{1}{2} \log(|t^2 + 1|) = \frac{1}{2} \log(t^2 + 1).$$

Integrazione di funzioni razionali $n < m$. Il caso $x/(ax^2+bx+c)$, $\Delta < 0$. Esempio.

Così, posto $t = x+2$, $dx = dt$, *da* $\int \frac{t}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\log(|t^2+1|)$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{x^2+4x+5}\,dx &= \int \frac{x}{(x+2)^2+1}\,dx \\
&= \int \frac{t-2}{t^2+1}\,dt = \int \frac{t}{t^2+1}\,dt + \int \frac{-2}{t^2+1}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\log(t^2+1) - 2\arctan(t) + k \\
&= \frac{1}{2}\log((x+2)^2+1) - 2\arctan(x+2) + k
\end{aligned}$$

Integrazione di funzioni razionali $n < m$. Il caso $x/(ax^2 + bx + c)$, $\Delta = 0$.

Traccia.

Consideriamo ora il caso $\Delta = 0$. In questo caso, le radici x_1, x_2 coincidono. Posto $t = x - x_1$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{ax^2+bx+c}dx &= \int \frac{x}{a(x-x_1)^2}dx = \frac{1}{a}\int \frac{t+x_1}{t^2}dt \\
&= \frac{1}{a}\int \frac{1}{t}dt + \frac{x_1}{a}\int \frac{1}{t^2}dt \\
&= \frac{1}{a}\log(|t|) - \frac{x_1}{a}\frac{1}{t} \\
&= \frac{1}{a}\log(|x-x_1|) - \frac{x_1}{a}\frac{1}{x-x_1} + k.
\end{aligned}$$

Integrazione di funzioni razionali $n < m$. Il caso $x/(ax^2 + bx + c)$, $\Delta = 0$. Esempio.

Esempio

Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{x}{3x^2 - 12x + 12}\, dx$$

Traccia.

Il polinomio $3x^2 - 12x + 12$ *ha radici reali in quanto* $\Delta = 0$ *e sono la radice (doppia)* $x^* = 2$. *Quindi posto* $t = x - 2$, *si ha* $dx = dt$ *e così*

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{3x^2 - 12x + 12}\, dx &= \int \frac{x}{3(x-2)^2}\, dx \\
&= (1/3) \int \frac{t+2}{t^2}\, dt = (1/3) \int \frac{1}{t}\, dt + (1/3) \int \frac{2}{t^2}\, dt \\
&= (1/3) \log(|t|) - (2/3) \frac{1}{t} + k \\
&= (1/3) \log(|x-2|) - (2/3) \frac{1}{x-2} + k.
\end{aligned}$$

Integrazione di funzioni razionali $n < m$. Il caso $(Ax + B)/(ax^2 + bx + c)$.

Nota.

Per studiare il caso generale

$$\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx$$

si osserva che

$$\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx = A \int \frac{x}{ax^2 + bx + c} dx + B \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx$$

e ci riconduce ai due casi precedenti.

Integrazione di funzioni razionali: tabella.

Nota.

Vale la seguente lista di integrali indefiniti. I parametri S, T, U, C_1, C_2, C_3 sono da determinare. Inoltre x_1, x_2 sono le radici dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$.

f	$\int f(x)dx$	*nota*
$\frac{1}{Ax+B}$	$(1/A)\log(\lvert Ax+B\rvert)$	
$\frac{1}{ax^2+bx+c}$	$\frac{S}{a}\log(\lvert x-x_1\rvert) + \frac{T}{a}\log(\lvert x-x_2\rvert)$	$b^2-4ac>0$
$\frac{1}{ax^2+bx+c}$	$\frac{1}{S\sqrt{U}}\arctan\left(\frac{Sx+T}{\sqrt{U}}\right)$	$b^2-4ac<0$
$\frac{1}{ax^2+bx+c}$	$\frac{1}{S}\left(\frac{-1}{Sx+T}\right)$	$b^2-4ac=0$
$\frac{x}{ax^2+bx+c}$	$\frac{S}{a}\log(\lvert x-x_0\rvert) + \frac{T}{a}\log(\lvert x-x_1\rvert)$	$b^2-4ac>0$
$\frac{x}{ax^2+bx+c}$	$\frac{1}{2a}(\log(\lvert ax^2+bx+c\rvert) + bC_1\arctan(C_2x+C_3))$	$b^2-4ac<0$
$\frac{x}{ax^2+bx+c}$	$(1/a)\log(\lvert x-x_1\rvert) - (x_1/(a\lvert x-x_1\rvert))$	$b^2-4ac=0$

Integrazione di funzioni pari su intervalli $[-k, k]$.

Teorema

Sia f una funzione integrabile (secondo Riemann) in $[-k, k]$, con f pari. Allora

$$\int_{-k}^{k} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{k} f(x)\,dx$$

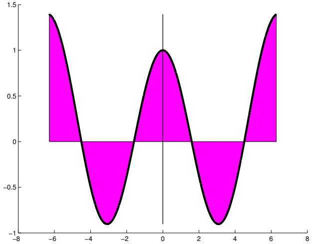

Figura : La funzione pari $f(x) = \cos(x) + (1/100)\cdot x^2$ in $[-2\pi, 2\pi]$.

Integrazione di funzioni dispari su intervalli $[-k, k]$.

Teorema

Sia f una funzione integrabile (secondo Riemann) in $[-k, k]$, con f dispari. Allora

$$\int_{-k}^{k} f(x)\,dx = 0$$

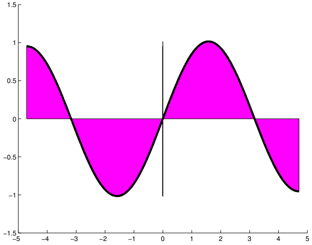

Figura : La funzione dispari $f(x) = \sin(x) + (1/100) \cdot x$ in $[-(3/2)\pi, (3/2)\pi]$.

Integrazione di funzioni pari e dispari su intervalli $[-k, k]$. Esempi.

Esempio

La funzione $\sin(x)$ *è dispari. Quindi*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\, dx = 0.$$

Esempio

La funzione $\cos(x)$ *è pari. Quindi*

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)\, dx = 2 \int_{0}^{\pi/2} \cos(x)\, dx.$$

Integrali definiti con funzioni con moduli. Esempio 1.

Esempio

Si calcoli

$$\int_0^5 |x-1|\,dx.$$

Svolgimento.

Osserviamo che

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \\ 1-x, & x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1. \end{cases}$$

Allora

$$\int_0^5 |x-1|\,dx = \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^5 (x-1)\,dx$$

Integrali definiti con funzioni con moduli. Esempio 2.

Esempio

Si calcoli

$$\int_0^{\pi} x \cdot |\cos(x)|\, dx.$$

Svolgimento.

Osserviamo che

$$|\cos(x)| = \begin{cases} \cos(x), & \cos(x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq \pi/2 \\ -\cos(x), & \cos(x) < 0 \Rightarrow \pi/2 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Allora

$$\int_0^{\pi} x \cdot |\cos(x)|\, dx = \int_0^{\pi/2} x \cdot \cos(x)\, dx + \int_0^{\pi} x \cdot (-\cos(x))\, dx$$

Integrali definiti con funzioni $\sqrt{a-x^2}$. Esempio 1.

Esempio

Si calcoli

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Svolgimento.

Posto $x = \sin(t)$, *abbiamo* $dx = \cos(t)\,dt$. *Osserviamo che* $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1$ *implica* $\cos^2(t) = (\cos(2t)+1)/2$. *Quindi, visto che* $|\cos(x)| = \cos(x)$ *in* $[0, \pi/2]$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_{\arcsin(0)}^{\arcsin(1)} \sqrt{1-\sin^2(t)}\,\cos(t)\,dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2(t)}\,\cos(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt \\
&= \int_0^{\pi/2} (\cos(2t)+1)/2\,dt \qquad (4)
\end{aligned}$$

Per simmetria $\int_0^{\pi/2} \cos(2t)dt = 0$, *così* $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = (1/2)\cdot(\pi/2) = \pi/4$.

Integrali definiti con funzioni $\sqrt{a-x^2}$. Esempio 2.

Esempio

Si calcoli

$$\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2}\,dx$$

Traccia.

Osserviamo che

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2}\,dx &= \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{3\left(1-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2\right)}\,dx \\ &= \sqrt{3}\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dx\end{aligned}$$

Si pone $\sin(t) = \frac{x}{\sqrt{3}}$ *e si risolve come nell'esempio 1, ottenendo che vale* $(3\cdot\pi)/4$.

Esempio

Si calcoli

$$\int \sqrt{1+x^2}\, dx$$

Traccia.

Ricordiamo che $\frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x)$ *e che* $1+\sinh(t)^2 = \cosh^2(t)$. *Si pone* $x = \sinh(t)$ *e si ha* $dx = \cosh(t)dt$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+x^2}\, dx &= \int \sqrt{1+\sinh(t)^2} \cdot \cosh(t)\, dt \\ &= \int \cosh(t) \cdot \cosh(t)\, dt \end{aligned}$$

Integrando per parti, si ottiene dopo qualche non facile conto

$$\int \sqrt{1+x^2}\, dx = arcsinh(x)/2 + (x \cdot (x^2+1)^{1/2})/2$$

Integrali indefiniti con funzioni $\sqrt{x^2-1}$.

Esempio

Si calcoli

$$\int \sqrt{x^2-1}\, dx$$

Traccia.

Ricordiamo che $\frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x)$ *e che* $1+\sinh(t)^2 = \cosh^2(t)$. *Si pone* $x = \cosh(t)$ *e si ha* $dx = \sinh(t)dt$ *ee quindi*

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2-1}\, dx &= \int \sqrt{\cosh(t)^2-1} \cdot (\sinh(t))\, dt \\ &= \int |\sinh(t)| \cdot \sinh(t)\, dt\end{aligned}$$

Si ottiene dopo qualche non facile conto

$$\int \sqrt{x^2-1}\, dx = (x \cdot \sqrt{x^2-1})/2 - \log(x+\sqrt{x^2-1})/2$$

Integrali indefiniti con funzioni $\sqrt{x^2+1}$. Applicazione.

Esempio

Determinare l'area A tra le due iperboli

$$y = \sqrt{1+x^2}, \quad y = -\sqrt{1+x^2}$$

nell'intervallo $[-1, 1]$.

Traccia.

Osserviamo che se $f(x) < 0$, *e* $\int_a^b f(x)\,dx$ *esiste, allora* $\int_a^b f(x)\,dx < 0$. *Essendo l'area una quantità positiva, necessariamente, in virtù delle simmetrie, della primitiva di* $\sqrt{x^2+1}$, *nonchè del teorema fondamentale del calcolo integrale,*

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\,dx - \int_{-1}^{1} (-\sqrt{1+x^2})\,dx = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\,dx \\ &= 4\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = 2(\log(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}) \approx 4.591174298785276 \end{aligned}$$

Integrali indefiniti con funzioni $\sqrt{x^2+1}$. Applicazione.

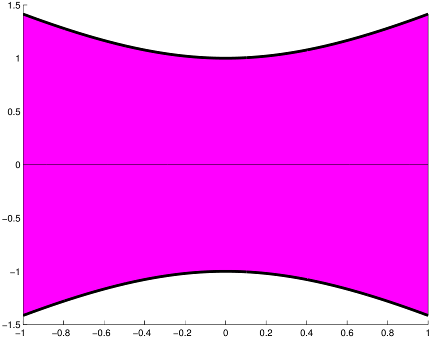

Figura : In magenta la regione tra le iperboli $y = \sqrt{1+x^2}$, $y = -\sqrt{1+x^2}$ nell'intervallo $[-1, 1]$.

Problema.

Finora abbiamo considerato il caso in cui $[a, b]$ è limitato e f è limitata. Ci domandiamo cosa succede quanto una di queste ipotesi cade.

Esempio

Che significato ha la scrittura

$$\int_1^{+\infty} 3x dx$$

essendo l'intervallo illimitato?

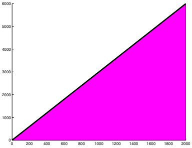

Figura : La funzione $3x$.

Esempio

Che significato ha la scrittura

$$\int_0^{0.01} \frac{1}{x} dx$$

essendo l'intervallo limitato ma la funzione $1/x$ *illimitata (poichè* $\lim_{x \to 0} 1/x = +\infty$*)?*

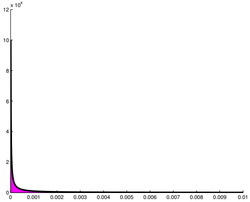

Figura : La funzione $1/x$.

Integrazione di funzioni non limitate (a destra).

Definizione

Sia $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ *continua ma con* $\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$*. Allora poniamo*

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx.$$

Se il limite

- *esiste finito, allora* f *si dice integrabile in* $[a, b]$ *o* $\int_a^b f(x)dx$ *converge;*
- *vale* $\pm\infty$*, allora si dice che* $\int_a^b f(x)dx$ *diverge;*
- *non esiste, allora si dice che* $\int_a^b f(x)dx$ *non esiste.*

Integrazione di funzioni non limitate (a sinistra).

Definizione

Sia $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ *continua ma con* $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$*. Allora poniamo*

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a-\epsilon}^b f(x)dx.$$

Se il limite

- *esiste finito, allora* f *si dice integrabile in* $[a, b]$ *o* $\int_a^b f(x)dx$ *converge;*
- *vale* $\pm\infty$*, allora si dice che* $\int_a^b f(x)dx$ *diverge;*
- *non esiste, allora si dice che* $\int_a^b f(x)dx$ *non esiste.*

Esempio 1.

Esempio

La funzione $f(x) = \frac{1}{1-x}$ *è illimitata in* $[0,1]$ *in quanto*

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty.$$

Allora, visto che $\int 1/(1-x)\,dx = -\log(|1-x|) + k$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{1-x}dx &:= \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_0^{1-\epsilon} \frac{1}{1-x}dx \\
&= \lim_{\epsilon \to 0^+} -\log(|1-x|)\,\Big|_0^{1-\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon \to 0^+} \left((-\log(|1-(1-\epsilon)|)) - (-\log(|1-0|))\right) \\
&= \lim_{\epsilon \to 0^+} -\log(|\epsilon|) = +\infty.
\end{aligned}$$

Esempio 2.

Esempio

La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ *è illimitata in* $[0,1]$ *in quanto*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Allora, visto che $\int 1/x \, dx = -\log(|x|) + k$,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{x} dx &:= \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{0+\epsilon}^1 \frac{1}{x} dx \\
&= \lim_{\epsilon \to 0^+} -\log(|x|) \Big|_{\epsilon}^{1} \\
&= \lim_{\epsilon \to 0^+} ((-\log(|1|) - (-\log(|\epsilon|))) \\
&= \lim_{\epsilon \to 0^+} +\log(|\epsilon|) = +\infty.
\end{aligned}$$

Esempio 3.

Esempio

La funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ *è illimitata in* $[0,1]$ *in quanto*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = -\infty.$$

Allora, visto che $\int 1/\sqrt{x}\, dx = 2 \cdot x^{1/2} + k$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x} dx &:= \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{0+\epsilon}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} 2 \cdot x^{1/2} \Big|_{\epsilon}^{1} \\ &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(2 \cdot 1^{1/2} - 2 \cdot \epsilon^{1/2}\right) = 2. \end{aligned}$$

Nota.

Per quanto visto, $\int_0^1 1/\sqrt{x}\, dx = 2$, *mentre* $\int_0^1 1/x\, dx = \infty$.

Alcuni casi notevoli

Si vede più in generale che

Teorema

Valgono i seguenti asserti

- $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ *converge per* $\alpha < 1$, *mentre diverge per* $\alpha \geq 1$;
- $\int_0^{1/2} \frac{1}{x^\alpha |\log(x)|^\beta}\, dx$ *converge per* $\alpha < 1$, $\beta \in \mathbb{R}$;
- $\int_0^{1/2} \frac{1}{x^\alpha |\log(x)|^\beta}\, dx$ *converge per* $\alpha = 1$, $\beta > 1$, *diverge per* $\alpha = 1$, $\beta \leq 1$.

Criteri di integrabilità

Teorema

Siano

- $f, g : [a, b)$ *continue e* $\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^-} g(x) = +\infty$;
- (i) $0 \le f(x) \le g(x)$ *in* $[a, b)$ *o*
  (ii) $0 \ge f(x) \ge g(x)$ *in* $[a, b)$.

Allora

- *se* g *è integrabile (secondo Riemann) in* $[a, b)$ *allora* f *è integrabile (secondo Riemann) in* $[a, b)$;
- *se* f *non è integrabile (secondo Riemann) in* $[a, b)$ *allora* g *non è integrabile (secondo Riemann) in* $[a, b)$;

Nota.

L'idea è che noto il comportamento di alcune funzioni campione come $1/x^{\alpha}$ *in* $(0, 1]$ *o* $1/(x^{\alpha} \cdot \log^{\beta}(x))$ *in* $(0, 1/2]$, *possiamo determinare il comportamento di altre funzioni.*

Esempio

Si consideri

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sin^2\left(\frac{1}{x}\right).$$

La funzione $f(x)$ *è continua in* $(0, 1]$ *ed essendo* $0 \leq \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$, *ricaviamo che*

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Essendo $\frac{1}{\sqrt{x}}$ *integrabile (secondo Riemann) in* $[0, 1]$, *ivi lo è pure* $\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$.

Criteri di integrabilità. Esempio 2.

Esempio

Si consideri

$$f(x) = \frac{1 + \sin^2(x)}{x^5}.$$

La funzione è illimitata poichè diverge in 0^+. *Inoltre la funzione* $f(x)$ *è continua in* $(0, 1]$ *ed essendo* $1 \le 1 + \sin^2(x)$, *ricaviamo che*

$$\frac{1}{x^5} \le \frac{1 + \sin^2(x)}{x^5}.$$

Essendo divergente $\frac{1}{x^5}$ *in* $[0, 1]$, *ivi lo è pure* $\frac{1+\sin^2(x)}{x^5}$.

Criteri di integrabilità.

Teorema (Criterio del confronto asintotico con $\sim$, in b)

Siano

- $f, g : [a, b)$ *continue;*
- (i) $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *in* $[a, b)$ *o*
  (ii) $0 \geq f(x) \geq g(x)$ *in* $[a, b)$.
- (i) $f, g \to +\infty$, *per* $x \to b^-$ *o*
  (ii) $f, g \to -\infty$, *per* $x \to b^-$.
- $f \sim g$ *cioè* $\lim_{x \to b^-} f(x)/g(x)\, dx = 1$.

Allora f *è integrabile (secondo Riemann) in* $[a, b]$ *se e solo se* g *è integrabile (secondo Riemann) in* $[a, b]$.

Criteri di integrabilità.

Teorema (Criterio del confronto asintotico con $\sim$, in a)

Siano

- $f, g : (a, b]$ *continue e* $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = +\infty$;
- (i) $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *in* $[a, b)$ *o*
  (ii) $0 \geq f(x) \geq g(x)$ *in* $[a, b)$.
- (i) $f, g \to +\infty$, *per* $x \to a^+$ *o*
  (ii) $f, g \to -\infty$, *per* $x \to a^+$.
- $f, g \to \pm\infty$, *per* $x \to a^+$;
- $f \sim g$ *cioè* $\lim_{x \to a^+} f(x)/g(x)\, dx = 1$.

Allora f è integrabile in $[a, b]$ se e solo se g è integrabile (secondo Riemann) in $[a, b]$.

Criteri di integrabilità. Esempio 1

Esempio

Si consideri

$$\int_0^1 \frac{1}{\sin(x)}dx$$

e lo si confronti asintoticamente con

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx.$$

Posto $f(x) = \frac{1}{\sin(x)}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ *abbiamo*

- $f, g : (0, 1]$ *continue e* $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to o^+} g(x) = +\infty$;
- $0 \leq f(x)$, $0 \leq g(x)$;
- $f, g \to \pm\infty$, *per* $x \to 0^+$;
- $f \sim g$ *cioè* $\lim_{x\to 0^+} f(x)/g(x)\, dx = 1$.

Allora f *è integrabile (secondo Riemann) in* $[a, b]$ *se e solo se* g *è integrabile (secondo Riemann) in* $[a, b]$. *Siccome* g *non è integrabile, non lo è neppure* f.

Criteri di integrabilità.

Teorema (Criterio del confronto con o piccoli, in a)

Siano

- $f, g : (a, b]$ *continue;*
- (i) $0 \leq f(x), 0 \leq g(x)$ *in* $[a, b)$, *o*
  (ii) $0 \geq f(x), 0 \geq g(x)$ *in* $[a, b)$*;*
- (i) $f, g \to +\infty$, *per* $x \to a^+$, *o*
  (ii) $f, g \to -\infty$, *per* $x \to a^+$*;*
- $f = o(g)$ *cioè* $\lim_{x \to a^+} f(x)/g(x) = 0$.

Allora f *è integrabile (secondo Riemann) in* $[a, b]$ *se* g *è integrabile (secondo Riemann) in* $[a, b]$.

Criteri di integrabilità.

Teorema (Criterio del confronto con o piccoli, in b)

Siano

- $f, g : [a, b)$ *continue;*
- (i) $0 \leq f(x), 0 \leq g(x)$ *in* $[a, b)$, *o*
  (ii) $0 \geq f(x), 0 \geq g(x)$ *in* $[a, b)$*;*
- (i) $f, g \to +\infty$, *per* $x \to b^-$, *o*
  (ii) $f, g \to -\infty$, *per* $x \to b^-$*;*
- $f = o(g)$ *cioè* $\lim_{x \to b^-} f(x)/g(x) = 0$.

Allora f è integrabile (secondo Riemann) in $[a, b]$ *se g è integrabile (secondo Riemann) in* $[a, b]$.

Esempio

Per descrivere se sia integrabile (secondo Riemann) in $(0,1]$

$$\int_0^1 \frac{1}{e^{-1/x}} dx$$

confrontiamolo con

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx.$$

Osserviamo che per $f(x) = \frac{1}{e^{-1/x}}$, $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ *poichè si mostra che* $e^{1/x}$ *tende a* 0 *più velocemente di qualsiasi potenza di* x

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^\alpha}{e^{-1/x}} = 0.$$

Siccome in particolare per il caso particolare $\alpha = 1/2$, $g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$ *è integrabile (secondo Riemann) in* $[0,1]$, *allora ivi lo è pure* $\frac{1}{e^{-1/x}}$.

Integrabilità assoluta.

Nota.

I criteri esposti di confronto e confronto asintotico valgono per funzioni a segno costante in $[a, b)$ *o* $(a, b]$.

Se f *non ha sempre lo stesso segno, si guarda se converge*

$$\int_a^b |f(x)|dx,$$

che ovviamente è sempre non negativa. Se $|f|$ *è integrabile (secondo Riemann) in* $[a, b)$ *o* $(a, b]$*, allora pure* f *risulta integrabile.*

Definizione

Se f *è tale che* $\int_a^b |f(x)|dx$*, converge, allora* f *si dice assolutamente integrabile (o che l'integrale converge assolutamente).*

Integrabilità assoluta. Esempio

Esempio

Si consideri l'integrale generalizzato

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx.$$

La funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ *cambia segno vicino a* $x = 0^+$ *(poichè* $1/\sqrt{x} \to +\infty$*), quindi non possiamo applicare i criteri del confronto e del confronto asintotico. Ma essendo* $0 \leq |\sin(y)| \leq 1$ *per ogni* $y \in \mathbb{R}$, *e* $\frac{1}{\sqrt{x}} \geq 0$

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right| < \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

Essendo $\frac{1}{\sqrt{x}}$ *integrabile (secondo Riemann) in* $[0, 1]$, *lo è pure* $\left|\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right|$ *e quindi per la nota precedente* $\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

Integrabilità assoluta. Esempio

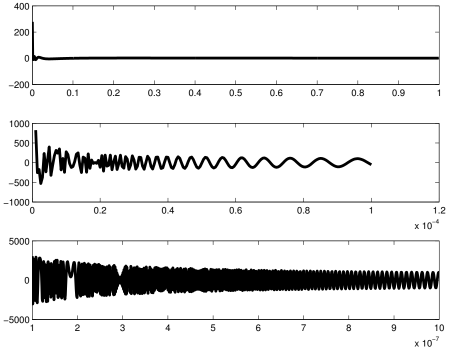

Figura : Le forti oscillazioni di $\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ in $[0, 1]$, $[10^{-6}, 10^{-4}]$, $[10^{-8}, 10^{-7}]$. L'ultimo grafico appare quasi un'area nera, per via dell'alto numero di oscillazioni.

Integrazione su intervalli illimitati.

Definizione

Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *continua e sia*

$$L = \int_a^{+\infty} f(x)\, dx := \lim_{w \to \infty} \int_a^w f(x)\, dx$$

- *Se L esiste finito allora f è integrabile (secondo Riemann) in* $[a, +\infty)$ *(oppure si dice che l'integrale converge in* $[a, +\infty)$*);*
- *Se L vale* $\pm\infty$ *allora si dice che l'integrale diverge in* $[a, +\infty)$*;*
- *Se L non esiste allora si dice che l'integrale non esiste in* $[a, +\infty)$*);*

Integrazione su intervalli illimitati.

Definizione

Sia $f : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$ *continua e sia*

$$L = \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx := \lim_{w \to -\infty} \int_{w}^{a} f(x)\, dx$$

- *Se* L *esiste finito allora* f *è integrabile (secondo Riemann) in* $(-\infty, a]$ *(oppure si dice che l'integrale converge in* $(-\infty, a]$*);*
- *Se* L *vale* $\pm\infty$ *allora si dice che l'integrale diverge in* $(-\infty, a]$*;*
- *Se* L *non esiste allora si dice che l'integrale non esiste in* $(-\infty, a]$*);*

Esempio

Si consideri

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

- *Se* $\alpha = 1$ *abbiamo*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{w \to +\infty} (\log(w) - \log(1)) = \lim_{w \to +\infty} \log w = +\infty$$

  e quindi diverge per $\alpha = 1$.

- *Se* $\alpha \neq 1$ *otteniamo*

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx &= \int_1^{+\infty} x^{-\alpha} dx = \lim_{w \to +\infty} \frac{1}{-\alpha+1} x^{-\alpha+1} |_1^w \\ &= \frac{1}{-\alpha+1} \lim_{w \to +\infty} (w^{-\alpha+1} - 1) \end{aligned}$$

che vale $1/(\alpha - 1)$ *se* $\alpha > 1$, *diverge se* $\alpha < 1$.

Integrazione su intervalli illimitati. Esempio $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\log(x))^\beta} dx$.

Esempio

Si consideri

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\log(x))^\beta} dx$$

Converge se e solo se

- $\alpha > 1$, $\beta \in \mathbb{R}$;
- $\alpha = 1$, $\beta \in (1, +\infty)$.

Integrazione su intervalli illimitati. Condizione necessaria

Teorema (Condizione necessaria di integrabilità a $+\infty$)

Supponiamo, $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *continua. Allora se*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

esiste finito, allora

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Teorema (Condizione necessaria di integrabilità a $-\infty$)

Supponiamo, $a \in \mathbb{R}$, $f : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$ *continua. Allora se*

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

esiste finito, allora

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$

Nota.

Il teorema precedente dice che

- *se* $\lim_{x \to +\infty} f(x) \neq 0$ *allora*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

  non converge.

- *se* $\lim_{x \to -\infty} f(x) \neq 0$ *allora*

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

  non converge.

Integrazione su intervalli illimitati. Condizione necessaria. Esempio

Esempio

Studiare la convergenza di

$$\int_3^{+\infty} \frac{3x+1}{2x-5}\, dx.$$

Svolgimento.

Non converge in quanto

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x+1}{2x-5} = \frac{3}{2} \neq 0.$$

Esempio

Poichè $\lim_{x \to +\infty} \sin^2(x)$ *non esiste, allora non converge*

$$\int_0^{+\infty} \sin^2(x)\, dx.$$

Integrazione su intervalli illimitati. Condizione necessaria. Nota

Nota.

Il fatto che f sia infinitesima a $+\infty$ non implica che $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converga.

Esempio

La funzione $f(x) = 1/x$ è infinitesima a $+\infty$ ma

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx.$$

non converge

Integrazione su intervalli illimitati. Criterio del confronto.

Teorema

Sia $a \in \mathbb{R}$, *e*

- $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *continue;*
- (i) $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *per* $x \in [a, +\infty)$, *o*
  (ii) $0 \geq f(x) \geq g(x)$ *per* $x \in [a, +\infty)$.

Allora

- *se* g *è integrabile in* $[a, +\infty)$ *allora* f *è integrabile in* $[a, +\infty)$*;*
- *se* f *non è integrabile in* $[a, +\infty)$ *allora* g *non è integrabile in* $[a, +\infty)$.

Nota.

L'ipotesi

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \forall\, x \in [a, +\infty)$$

si può rilassare a

$$0 \leq f(x) \leq g(x),\ \ per\ x \in [a^{*}, +\infty) \subseteq [a, +\infty).$$

L'ipotesi

$$0 \geq f(x) \geq g(x), \forall\, x \in (-\infty, a]$$

si può rilassare a

$$0 \geq f(x) \geq g(x),\ \ per\ x \in [a^{*}, +\infty) \subseteq [a, +\infty).$$

Integrazione su intervalli illimitati. Criterio del confronto.

Teorema

Sia $a \in \mathbb{R}$, *e*

- $f, g : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$ *continue;*
- (i) $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *per* $x \in (-\infty, a]$, *o*
  (ii) $0 \geq f(x) \geq g(x)$ *per* $x \in (-\infty, a]$.

Allora

- *se* g *è integrabile in* $(-\infty, a]$ *allora* f *è integrabile in* $(-\infty, a]$*;*
- *se* f *non è integrabile in* $(-\infty, a]$ *allora* g *non è integrabile in* $(-\infty, a]$.

Nota.

L'ipotesi

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \forall\, x \in (-\infty, a]$$

si può rilassare a

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \;\; per\; x \in (-\infty, a^*] \subseteq (-\infty, a].$$

L'ipotesi

$$0 \geq f(x) \geq g(x), \forall\, x \in (-\infty, a]$$

si può rilassare a

$$0 \geq f(x) \geq g(x), \;\; per\; x \in (-\infty, a^*] \subseteq (-\infty, a].$$

Integrazione su intervalli illimitati. Criterio del confronto asintotico con $\sim$, in $[a, +\infty)$.

Teorema

Sia $a \in \mathbb{R}$, *e*

- $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *continue;*
- (i) $0 \leq f(x)$, $0 \leq g(x)$ *per* $x \in [a, +\infty)$, *o*
  (ii) $0 \geq f(x)$, $0 \geq g(x)$ *per* $x \in [a, +\infty)$
- $f \sim g$ *per* $x \to +\infty$

Allora f *è integrabile in* $[a, +\infty)$ *se e solo se* g *è integrabile in* $[a, +\infty)$.

Integrazione su intervalli illimitati. Criterio del confronto asintotico con $\sim$, in $(-\infty, a]$.

Teorema

Sia $a \in \mathbb{R}$, *e*

- $f, g : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$ *continue;*
- (i) $0 \leq f(x)$, $0 \leq g(x)$ *per* $x \in (-\infty, a]$, *o*
  (ii) $0 \geq f(x)$, $0 \geq g(x)$ *per* $x \in (-\infty, a]$
- $f \sim g$ *per* $x \to -\infty$

Allora f *è integrabile in* $(-\infty, a]$ *se e solo se* g *è integrabile in* $(-\infty, a]$.

Integrazione su intervalli illimitati. Criterio del confronto asintotico con *o* piccolo in $[a, +\infty)$.

Teorema

Sia $a \in \mathbb{R}$, *e*

- $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *continue;*
- (i) $0 < f(x)$, $0 < g(x)$, *per* $x \in [a, +\infty)$ *o*
  (ii) $0 > f(x)$, $0 > g(x)$, *per* $x \in [a, +\infty)$*;*
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, *cioè* $f = o(g)$.

Se g *è integrabile in* $[a, +\infty)$ *allora* f *è integrabile in* $[a, +\infty)$.

Integrazione su intervalli illimitati. Criterio del confronto asintotico con o piccolo in $(-\infty, a]$.

Teorema

Sia $a \in \mathbb{R}$, *e*

- $f, g : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$ *continue;*
- (i) $0 < f(x)$, $0 < g(x)$, *per* $x \in (-\infty, a]$ *o*
  (ii) $0 > f(x)$, $0 > g(x)$, *per* $x \in (-\infty, a]$;
- $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, *cioè* $f = o(g)$.

Se g *è integrabile in* $(-\infty, a]$ *allora* f *è integrabile in* $(-\infty, a]$.

Integrazione su intervalli illimitati. Criterio del confronto asintotico. Esempio 1.

Esempio

Dire se converge l'integrale

$$\int_1^{+\infty} (1 - cos(1/x))\, dx$$

Svolgimento.

Visto che se $x \to +\infty$ *allora* $1/x \to 0^+$, *dallo sviluppo di* $\cos(y)$ *in un intorno di* 0^+, *abbiamo che* $\cos(y) - 1 \sim -\frac{y^2}{2}$ *ricaviamo che*

$$\cos(1/x) - 1 \sim -\frac{(1/x)^2}{2} = -\frac{1}{2x^2} \Rightarrow (1 - cos(1/x)) \sim \frac{1}{2x^2}.$$

Poichè $0 < \cos(1/x)$, $0 < \frac{1}{2x^2}$ *per* $x \in [1, +\infty)$, *e sono evidentemente continue in* $[1, +\infty)$, $\int_1^{+\infty} (1 - cos(1/x))\, dx$ *converge se e solo se converge*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^2}\, dx = (1/2) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$$

cosa vera per un precedente teorema.

Integrazione su intervalli illimitati. Criterio del confronto asintotico. Esempio 2.

Esempio

Dire se converge l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$$

Svolgimento.

Non è difficile osservare che

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \sim \frac{1}{x}, \quad x \to +\infty$$

e che le funzioni in questione verificano le ipotesi del criterio del confronto asintotico. Poichè diverge

$$\int \frac{1}{x} dx$$

allora diverge pure

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx.$$

Integrazione su intervalli illimitati. Criterio del confronto asintotico. Esempio 3.

Esempio

Dire se converge l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{3x^2+1}{x^5+e^{1/x}+\sin(x)}\,dx$$

Svolgimento.

Osserviamo che

- *il numeratore è asintotico a* $3x^2$ *per* $x \to +\infty$*;*
- *nel denominatore, poichè* $1/x \to 0$*, per* $x \to +\infty$*, dalla formula di Mac Laurin* $e^y \sim 1$ *implica* $e^{1/x} \sim 1$ *e quindi dalla limitatezza di* $\sin(x)$*, il denominatore è asintotico a* $+\infty$ *a* x^5*.*

Così, essendo verificate le ipotesi del teorema del confronto asintotico basta vedere se è integrabile

$$\int_1^{+\infty} \frac{3x^2}{x^5}\,dx = 3\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$$

cosa vera per un teorema precedente.

Integrazione su intervalli illimitati. Criterio del confronto asintotico. Esempio 4.

Esempio

Dire se converge l'integrale

$$\int_1^{+\infty} x^2 \left(\frac{1}{x} - \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\, dx$$

Svolgimento.

Visto che $1/x \to 0^+$ *per* $x \to +\infty$, *dallo sviluppo di Mac Laurin*

$$\sin(y) - y \sim -\frac{y^3}{6} \Rightarrow y - \sin(y) \sim \frac{y^3}{6} \Rightarrow \frac{1}{x} - \sin\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{(1/x)^3}{6} = \frac{1}{6x^3},\ x \to +\infty.$$

Poichè per $f(x) = x^2\left(\frac{1}{x} - \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$, $g(x) = x^2 \frac{1}{6x^3} = \frac{1}{6x}$ *sono verificate le ipotesi del teorema del confronto asintotico, basta studiare la convergenza di* $\int_1^{+\infty}(1/6x)dx = (1/6)\int_1^{+\infty}(1/x)dx$ *che come noto diverge in quanto diverge* $\int_1^{+\infty}(1/x)dx$.

Integrazione su intervalli illimitati. Criterio del confronto. Esempio 5.

Esempio

Dire se converge l'integrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\log(x)}\, dx$$

Svolgimento.

Osserviamo che $\log(x) < x$ *per* $x \geq 2$. *Ma allora* $1/\log(x) > 1/x$ *per* $x \geq 2$. *Siccome*

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$$

diverge, allora diverge pure

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\log(x)}\, dx.$$

Integrazione su intervalli illimitati. Criterio del confronto. Esempio 6.

Esempio

Dire se converge l'integrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$$

Svolgimento.

Si può provare che

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} e^{-x^2} = 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Quindi

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x^2}}{\frac{1}{x^{\alpha}}} = \lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} e^{-x^2} = 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Dal criterio del confronto con $\alpha = 2$, risulta che l'integrale richiesto converge.

Teorema

Sia $f : [a, +\infty)$ *una funzione continua. Se*

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$$

converge allora

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

converge.

Teorema

Sia $f(-\infty, a]$ *una funzione continua. Se*

$$\int_{-\infty}^{a} |f(x)| dx$$

converge allora

$$\int_{-\infty}^{a} f(x) dx$$

converge.

Integrazione su intervalli illimitati. Convergenza assoluta. Esempio.

Esempio

Si stabilisca se converge

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^5}\, dx$$

Svolgimento.

Causa il segno variabile di $\sin(x)$ *non si possono applicare i soliti criteri del confronto. Vediamo se converge*

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x^5}\, dx.$$

In effetti $\frac{|\sin(x)|}{x^5} \leq \frac{1}{x^5}$ *e siccome converge*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^5}\, dx.$$

allora converge pure $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x^5}\, dx$ *e quindi anche l'integrale richiesto.*

Integrali definiti in $(-\infty, +\infty)$.

Teorema

Si supponga che esistano finiti $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$, $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$, *allora esiste finito* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ *ed è*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Esempio

Si dimostra (difficile!!) che

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{x}}{2}.$$

Essendo l'integranda pari, è pure $\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{x}}{2}$. *Quindi*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Esercizi

Esercizi.

Esercizio

Mostrare che

- $\int \tan(x)dx = -\log(|\cos(x)|) + k$ *(suggerimento: porre* $\cos(x) = t$*);*
- $\int \frac{x}{x^2+1}dx = (1/2)\cdot\log(|x^2-1|) + k$ *(suggerimento: porre* $x^2+1 = t$*);*
- $\int \sin^5(x)\cos(x)dx = \frac{\sin^6(x)}{6} + k$ *(suggerimento: porre* $\sin(x) = t$*);*

Esercizio

Mostrare che

- $\int_2^3 \frac{x}{x^2+1}dx = \sqrt{8} - \sqrt{3}$ *(suggerimento: vedi un integrale indefinito precedente);*

Esercizi.

Esercizio

Mostrare per sostituzione (attenzione a risultati equivalenti!)

- $\int \frac{1}{x\log(x)} dx = \log(\log(|x|)) + k$ *(suggerimento: porre* $\log(x) = t$*);*
- $\int \sqrt{x+2} dx = (2 \cdot (x+2)^{3/2})/3 + k.$
- $\int \frac{x}{\sqrt{2-3x^2}} dx = -(3^{1/2} \cdot (2/3 - x^2)^{1/2})/3 + k.$
- $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}} dx = (x^4 + 1)^{1/2}/2 + k.$
- $\int \frac{(\log(x))^7}{x} dx = (log(x))^8/8 + k.$
- $\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = -2 \cdot \cos(x^{1/2}) + k$
- $\int \frac{1}{e^x} dx = -e^{-x} + k$
- $\int \sin^3(x) dx = (\cos(x) \cdot (\cos(x)^2 - 3))/3 + k.$ *(suggerimento: porre* $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$*);*

Esercizi.

Esercizio

Integrando per parti, calcolare facendo attenzione a risultati equivalenti

- $\int \arcsin(x)\, dx = x \cdot \arcsin(x) + (1 - x^2)^{1/2} + k;$
- $\int \arccos(x)\, dx = x \cdot \arccos(x) - (1 - x^2)^{1/2} + k;$
- $\int e^x \cdot \cos(x)\, dx = (e^x\, (\cos(x) + \sin(x)))/2 + k;$
- $\int x^2 \cdot \sin(x)\, dx = 2\, x\, \sin(x) - \cos(x)\, (x^2 - 2) + k;$
- $\int x^n \cdot \sin(x)\, dx;$
- $\int \sin^2(x)\, dx = x/2 - sin(2x)/4 + k$ *(sugg.* $\sin^2(x) = \sin(x) \cdot \sin(x)$*);*
- $\int (\log(x))^2\, dx = x\, (\log(x)^2 - 2\, \log(x) + 2) + k$ *(sugg.* $(\log(x))^2 = \log(x) \cdot \log(x)$*);*
- $\int x^5 \cdot e^{x^2}\, dx = (e^{x^2}\, (x^4 - 2\, x^2 + 2))/2 + k$ *(sugg.* $x^5 \cdot e^{x^2} = x^4 \cdot x \cdot e^{x^2}$*, integrare due volte per parti);*

Esercizio

Calcolare gli integrali indefiniti delle seguenti funzioni razionali, facendo attenzione a risultati equivalenti,

- $\int \frac{x-1}{x^2+x} dx = \log(x^2+2)/2 - \arctan(x/2^{1/2})/2^{1/2} + k$
- $\int \frac{3x-8}{x^2+5} dx = (3\log(x^2+5))/2 - (8\arctan(x/5^{1/2}))/5^2 + k$
- $\int \frac{x^3+x}{x^2+x+1} dx =$ $\log(x^2+x+1)/2 - x + \arctan(3^{-1/2}(2x+1))/3^{1/2} + x^2/2 + k$
- $\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+5} dx = \arctan(e^x/2+1/2)/2 + k$ *(sugg.: porre* $y = e^x$*)*

Esercizi.

Esercizio

Calcolare i seguenti integrali generalizzati

- $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \infty$
- $\int_0^{1/2} \frac{1}{x \log(x)} dx = -\infty$

Esercizio

Mostrare che $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx$ *converge a* $(b-a)^{1-\alpha}$ *per* $\alpha < 1$, *diverge per* $\alpha \geq 1$.

Esercizio

Mostrare che $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx$ *converge per* $\alpha < 1$, *diverge per* $\alpha \geq 1$.

Esercizi.

Esercizio

Determinare se convergono i seguenti integrali generalizzati

- $\int_2^3 \frac{1}{\sin(x-3)} dx = -\infty$; *(sugg.: applicare sostituzione* $y = x - 3$*) [non integrabile];*
- $\int_0^1 \frac{1}{e^x-1} dx = \infty$; *(sugg.:* $e^x - 1 \sim x$*) [non integrabile];*
- $\int_0^1 \frac{1}{e^{\sqrt{x}}-1} dx$; *(sugg.:* $e^{\sqrt{x}} - 1 \sim \sqrt{x}$*) [integrabile];*
- $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-4}} dx$; *(sugg.:* $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$*) [integrabile];*

Esercizio

Calcolare i seguenti integrali con moduli

- $\int_{-1}^1 \frac{|x|+\sin(x)}{1+x^2} dx = \log(2)$.
- $\int_0^2 |x^2 + 2x - 3| \, dx = 4$. *(sugg.: vedere quando* $x^2 + 2x - 3 \geq 0$*).*

Esercizio

Riconducendosi a opportuni integrali di funzioni irrazionali, calcolare

- $\int \sqrt{5+x^2}dx = (5\,arcsinh((5^{1/2}\,x)/5))/2+(x\,(x^2+5)^{1/2})/2+k$ *(sugg.: raccogliere* 5 *e porre* $t = x/\sqrt{5}$*);*
- $\int \sqrt{x^2-8}dx = (x\,(x^2-8)^{1/2})/2 - 4\,\log(x+(x^2-8)^{1/2}) + k$ *(sugg.: raccogliere* 8 *e porre* $t = x/\sqrt{5}$*).*

Esercizi di ricapitolazione.

Esercizio

Determinare se convergono

- $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^3 \log^2(x)} \sin(1/x)\, dx$; *(converge)*
- $\int_2^{+\infty} \frac{e^{1/x}-1}{\log(x)}\, dx$; *(diverge)*

Esercizio

Determinare se convergono, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{(1+x^3)^\alpha}{x^2(\log^2(x)+2)}\, dx.$$

(suggerimento: confrontarsi con $1(x^\alpha \log^\beta(x))$*). Risultato: converge per* $\alpha \leq 1/3$.