Introduzione.

Paola Mannucci e Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica

28 settembre 2014

Insiemi

Un insieme è una collezione di oggetti detti elementi.

- Usualmente gli insiemi si denotano con lettere maiuscole come ad esempio A, B o X mentre gli elementi con lettere minuscole come ad esempio a, b o x.
- La scrittura $a \in A$ significa che l'elemento a appartiene all'insieme A.

Insiemi

- Un insieme può essere rappresentato in maniera descrittiva come ad esempio
$$A = \{a, b, c\}$$
cioè l'insieme A contiene esclusivamente gli elementi a, b, c, oppure
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$
cioè l'insieme dei numeri 0, 1, 2, eccetera (ovvero l'insieme dei numeri naturali,
- oppure come predicato, come ad esempio
$$D = \{n \in \mathbb{N}, n \text{ dispari}\}$$
cioè l'insieme dei numeri naturali dispari, e quindi equivalente a
$$D = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$$

Insiemi

L'insieme dei numeri naturali dispari può essere rappresentato ovviamente in vari modi. Ad esempio:

$$D = \{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k + 1\}.$$

Si legge che D è l'insieme dei numeri naturali n per cui esiste un numero naturale k tale che $n = 2 \cdot k + 1$.

Infatti

- per $k = 0$, $n = 2 \cdot 0 + 1 = 1$;
- per $k = 1$, $n = 2 \cdot 1 + 1 = 3$;
- per $k = 2$, $n = 2 \cdot 2 + 1 = 5$;

e così via.

Alcuni simboli e notazioni

- $a \in A$: l'elemento a appartiene all'insieme A;
- $\forall$: per ogni;
- $\exists$: esiste;
- $\nexists$: non esiste;
- $\exists!$: esiste ed è unico;
- $\Rightarrow$: implica;
- $\Leftrightarrow$: se e solo se;
- $\in$: appartiene;
- $\notin$: non appartiene;
- $=:$: definizione;
- $\emptyset$: insieme vuoto.

Quale esempio, due insiemi A e B si dicono uguali, cioè $A = B$ se contengono gli stessi elementi. Con notazione matematica,

$$\forall x \in A \Rightarrow x \in B \text{ e } \forall x \in B \Rightarrow x \in A.$$

Alcuni simboli e notazioni.

- $A \subseteq B$: A è sottinsieme di B, cioè

$$\forall x \in A \Rightarrow x \in B;$$

- $A \subset B$: A è sottinsieme stretto di B, cioè

$$\forall x \in A \Rightarrow x \in B \text{ e } \exists x \in V : x \notin A.$$

Operazioni insiemistiche.

- $A \cap B := \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$;

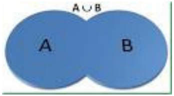

Figura : Unione di due insiemi A, B.

.

- $A \cup B := \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$;

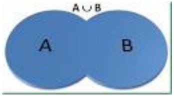

Figura : Intersezione di due insiemi A, B.

.

Operazioni insiemistiche.

- $\complement_x = X \backslash A := \{x : x \in A \text{ e non } x \in X\}$;
- $\emptyset$: insieme vuoto, privo di elementi; ovviamente, qualsiasi sia l'insieme A, $\emptyset \subseteq A$;
- $\mathbb{P}(x) := \{\text{sottinsiemi di X}\}$: insieme delle parti di X. Esempio: $X = \{a, b, c\}$, allora

$$\mathbb{P}(x) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}.$$

Nel nostro caso X ha 3 elementi e $\mathbb{P}(x)$ ha 2^3 elementi.
In generale se X ha n elementi allora $\mathbb{P}(x)$ ha 2^n elementi.

Insiemi numerici.

- $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$: numeri naturali;
- $\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, -2, 2, \ldots\}$: numeri interi (relativi);
- $\mathbb{Q} := \{\frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$: numeri razionali (frazioni); si possono scrivere in forma decimale e avere uno

  $$p, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \text{ sviluppo decimale finito}$$

  oppure

  $$p, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \overline{\alpha_n} \text{ sviluppo decimale periodico.}$$

- $\mathbb{R}$: numeri reali, con sviluppo decimale generico, anche infinito.

Ovviamente:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Prodotto cartesiano.

Siano A, B due insiemi. L'insieme

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B)\}$$

si chiama prodotto cartesiano.

- Ha per elementi le coppie ordinate (a, b).
- Ovviamente se $a \in A$, $b \in B$, allora $(a, b) \in A \times B$ mentre $(b, a) \notin A \times B$ a meno che $b \in A$ e $a \in B$.
- Si ha che (a, b) non coincide con (b, a) a meno che $a = b$.

Esempio di prodotto cartesiano.

Siano $A = \{0,1\}$, $B = \{2,3\}$. *Allora*

$$A \times B = \{(0,2),(0,3),(1,2),(1,3)\}$$

$$B \times A = \{(2,0),(3,0),(3,1),(3,2)\}$$

e quindi

$$A \times B \neq B \times A.$$

Se $A = B$ allora si scrive $A^2 := A \times A$. Così , ad esempio:

$$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R})\}.$$

Esempio di prodotto cartesiano.

Più in generale si possono definire insiemi del tipo

$$A_1 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}$$

come ad esempio

$$\mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R})\}$$

o più in generale

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R})\}.$$

Insiemi numerici.

Dato un insieme X, un'operazione in X associa a ogni coppia *ordinata* $(x, y) \in X \times X$ uno e un solo elemento di X. Un esempio su $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sono le operazioni di somma e prodotto. Vediamo quale esempio le proprietà in $\mathbb{Q}$. Relativamente alla somma $+$:

- Per ogni $x, y \in \mathbb{Q}$ si ha $x + y = y + x$ (proprietà commutativa);
- Per ogni $x, y \in \mathbb{Q}$ si ha $(x + y) + z = z + (x + y)$ (proprietà associativa);
- Esiste un unico elemento detto *zero* tale che $x \in \mathbb{Q}$ si ha $x + 0 = x$ (proprietà elemento neutro);
- Per ogni $x \in \mathbb{Q}$ esiste un unico elemento detto *opposto*, indicato con $-x$, tale che $x + (-x) = 0$ (proprietà inverso);

Insiemi numerici.

Similmente, relativamente al prodotto $\cdot$:

- Per ogni $x, y \in \mathbb{Q}$ si ha $x \cdot y = y \cdot x$ (proprietà commutativa);
- Per ogni $x, y \in \mathbb{Q}$ si ha $(x \cdot y) \cdot z = z \cdot (x \cdot y)$ (proprietà associativa);
- Esiste un unico elemento detto *unità* e indicato con 1 tale che $x \in \mathbb{Q}$ si ha $x \cdot 1 = x$ (proprietà elemento neutro);
- Per ogni $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$ esiste un unico elemento detto *reciproco*, indicato con x^{-1}, tale che $x \cdot x^{-1} = 1$ (proprietà inverso);

Le operazioni di somma e prodotto in $\mathbb{Q}$ sono legate dalla proprietà distributiva

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Q} : (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

Campi.

Un insieme si dice campo se:

- esistono due operazioni (che chiameremo in generale *somma* e *prodotto*);
- sono verificate le proprietà commutativa, associativa per ogni operazione, nonchè la proprietà distributiva;
- esiste l'elemento neutro;
- esiste l'inverso di ogni elemento.

Gli insiemi $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ non sono campi, mentre lo sono $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ (perchè ?).

Campi ordinati.

Su $\mathbb{Q}$ e R è definita una relazione d'ordine $\leq$ che verifica le proprietà

- riflessiva (cioè $a \leq a$);
- antisimmetrica;
- transitiva.

Per questo $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ si dicono campi ordinati.
Gli insiemi $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ sono perfino totalmente ordinati cioè

$$\forall a, b \in \mathbb{Q}, a \leq b \text{ o } b \leq a.$$

Proprietà delle operazioni su insiemi.

- $A \cap B = B \cap A$ (simmetrica intersezione);
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (associativa intersezione);
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributiva, intersezione e unione);
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributiva, intersezione e unione);
- $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$
- $\complement(\complement A) = A$

Logica elementare.

Nella maggior parte del corso discuteremo di proposizioni, dimostrazioni e negazioni di proposizioni. Torna comodo discutere di notazioni.

Un esempio:

$$\forall x \in A, p(x) \Rightarrow q(x)$$

dice che

per ogni x appartenente a A se è verificata la proposizione $p(x)$ allora è pure verificata la proposizione $q(x)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \text{ dispari} \Rightarrow n^2 \text{ dispari}$$

Con riferimento a quanto detto nell'esempio

$$\forall x \in A, p(x) \Rightarrow q(x)$$

si ha

- $x \equiv n$;
- $A \equiv \mathbb{N}$;
- $p(n) \equiv n$ *dispari*;
- $q(n) \equiv n^2$ *dispari*.

Usualmente si definisce la parte a sinistra di $\Rightarrow$ *come ipotesi, quella a destra come tesi.*

Vogliamo mostrare che

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \text{ dispari} \Rightarrow n^2 \text{ dispari}$$

Dimostrazione

Essendo n un numero naturale dispari, sappiamo che $n = 2 \cdot k + 1$ per un certo $k \in \mathbb{N}$. Ma allora da $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ si ha

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \end{aligned} \tag{1}$$

Osserviamo che $2(2k^2 + 2k)$ è pari e quindi necessariamente $n = 2(2k^2 + 2k) + 1$ è dispari.

Procedimento *per assurdo*.

Osserviamo che:

$$\forall x \in A, p(x) \Rightarrow q(x)$$

è equivalente a

$$\forall x \in A, \text{ non } p(x) \Rightarrow \text{ non } q(x)$$

Quindi invece che provare l'asserto

$$\forall x \in A, p(x) \Rightarrow q(x)$$

si prova equivalentemente che

$$\forall x \in A, \text{ non } p(x) \Rightarrow \text{ non } q(x)$$

spesso detto informalmente *per assurdo*.
Nell'esempio precedente, quindi per provare che

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \text{ dispari} \Rightarrow n^2 \text{ dispari}$$

bastava provare

$$\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \text{ pari} \Rightarrow n \text{ pari}.$$

Procedimento *per assurdo*: esempio.

Teorema (Euclide): *non esiste* $r \in \mathbb{Q}$ *tale che* $r^2 = 2$.

Dimostrazione

Se per assurdo fosse vero esistesse $r \in \mathbb{Q}$ *tale che* $r^2 = 2$, *visto che si può scrivere tale* r *come*

$$r = \frac{n}{m}, n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0, \text{ con } n, m \text{ primi tra loro}$$

allora da

$$r^2 = \left(\frac{n}{m}\right)^2 = \frac{n^2}{m^2} = 2,$$

avremo che n^2 *sarebbe pari in quanto*

$$n^2 = 2m^2$$

Procedimento *per assurdo*: esempio.

Per quanto visto prima, se n^2 *è pari abbiamo che pure* n *è pari, e quindi esiste un* $k \in \mathbb{Z}$ *per cui* $n = 2k$. *Ma ricordiamo che*

$$n^2 = 2m^2$$

per cui semplificando

$$4k^2 = (2k)^2 = n^2 = 2m^2 \Rightarrow m^2 = 2k^2$$

cioè pure m *è pari, cosa assurda perche' avevamo richiesto che* m, n *fossero primi tra loro.*

Controesempi.

I controesempi si usano per dimostrare la falsità di una implicazione del tipo

$$\forall x \in A, p(x) \Rightarrow q(x).$$

Se trovo $\overline{x} \in A$ per cui vale $p(\overline{x})$ ma non vale $q(\overline{x})$, ho dimostrato la falsità dell'implicazione.

L'asserto

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \text{ primo } \Rightarrow n \text{ è dispari}$$

è falso in quanto per $\overline{x} = 2$ *si ha che* $\overline{x} = 2$ *è primo ma non dispari.*

L'elemento $\overline{x} = 2$ *rappresenta un controesempio.*

Negazione delle proposizioni.

La negazione della proposizione

$$\forall x \text{ vale } p(x)$$

si scrive

$$\exists x : \text{ non vale } p(x).$$

La negazione della proposizione

$$\forall x \text{ vale } p(x) \ e \ q(x)$$

si scrive

$$\exists x : \text{ non vale } p(x) \ o \ q(x).$$

Passaggio da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$.

Vediamo alcuni esempi

- $E = \{x \in \mathbb{Q} : x < 5\}$ è superiormente limitato da 5;
- $E = \{x \in \mathbb{Q} : -27 < x < 1\}$ è inferiormente e superiormente limitato risp. da -27 e 1 e quindi limitato;
- $E = \{x \in \mathbb{Q} : x = \frac{1}{n}, n \neq 0, n \in \mathbb{N}\}$ è inferiormente e superiormente limitato risp. da 0 e 1 e quindi limitato.

Passaggio da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$.

Sia $E \subseteq X$, con X totalmente ordinato.

L'elemento $\overline{x}$ è massimo per E se

- $\overline{x} \in E$;
- $x \leq \overline{x}$ per ogni $x \in E$.

L'elemento $\overline{x}$ è minimo per E se

- $\overline{x} \in E$;
- $\overline{x} \leq x$ per ogni $x \in E$.

Passaggio da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$.

Alcuni esempi

- $E = [0,1] = \{x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}$ ha massimo in $x = 1$ e minimo in $x = 0$.
- $E = (0,1] = \{x \in \mathbb{R}, 0 < x \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}$ ha massimo in $x = 1$ ed è limitato inferiormente ma non ha minimo.
- $E = \{x \in \mathbb{Q}, x \leq -5\} \subseteq \mathbb{R}$ è limitato superiormente ma non ha massimo e non è limitato inferiormente.

Osserviamo che

- Se esiste il massimo di E allora E è limitato superiormente;
- Se E è limitato superiormente, non è detto che esista il massimo di E.

Teorema

Se esiste il massimo di E, questo è unico.

Dimostrazione. *Supponiamo che per assurdo esistano due massimi di E, siano M_1 e M_2 con $M_1 \neq M_2$. Dalle loro definizioni,*

$$M_1 \leq M_2 \text{ e } M_2 \leq M_1$$

il che implica $M_1 = M_2$.

Passaggio da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$.

Definizione

Sia $E \subseteq X$ con X totalmente ordinato. Un elemento $k \in X$ si dice maggiorante di E, se $x \leq k$ per ogni $x \in E$. Si definisce estremo superiore di E (in X), e lo si indica con $\sup(E)$, il minimo dei maggioranti di E in X (se esiste).

Definizione

Sia $E \subseteq X$ con X totalmente ordinato. Un elemento $k \in X$ si dice minorante di E, se $k \leq x$ per ogni $x \in E$. Si definisce estremo inferiore di E (in X), e lo si indica con $\inf(E)$, il massimo dei minoranti di E in X (se esiste).

Osserviamo che

- se E ha un massimo, questo coincide con $\sup(E)$;
- se E ha un minimo, questo coincide con $\inf(E)$.

Esempio

Si consideri $E = [0, 1]$. *Evidentemente*

- $\max(E) = 1 = \sup(E)$;
- $\min(E) = 0 = \inf(E)$;

Passaggio da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$.

Esempio

Si consideri $E = (0, 1]$. *Evidentemente*

- $\max(E) = 1 = \sup(E)$;
- $\min(E)$ *non esiste;*
- $\inf(E) = 0$: *i minoranti sono tutti i numeri* $x \leq 0$ *e ovviamente il loro massimo, che è* $\inf(E)$, *è* $x = 0$.

Esempio

Si consideri $E = \{x \in \mathbb{Q} : x < 5\}$. *Evidentemente*

- $\max(E)$ *non esiste;*
- $\min(E)$ *non esiste;*
- $\sup(E) = -5$: *i maggioranti sono tutti i numeri* $-5 \leq x$ *e ovviamente il loro minimo, che è* $\sup(E)$, *è* $x = -5$.
- $\inf(E)$: *non esiste;*

Passaggio da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$.

Esempio

Si consideri $E = (0, 1]$. *Evidentemente*

- $\max(E) = 1 = \sup(E)$;
- $\min(E)$ *non esiste;*
- $\inf(E) = 0$: *i minoranti sono tutti i numeri* $x \leq 0$ *e ovviamente il loro massimo, che è* $\inf(E)$, *è* $x = 0$.

Esempio

Si consideri $E = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0, x^2 < 2\}$. *Evidentemente*

- $\max(E)$ *non esiste;*
- $\min(E) = \inf(E) = 0$;
- $\sup(E)$: *non appartiene a* $\mathbb{Q}$ *ma esiste in* $\mathbb{R}$.

Passaggio da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$: sup.

L'insieme X ha la proprietà dell'estremo superiore se per ogni $E \subseteq X$, non vuoto e limitato superiormente, questo possiede sup in X.

Nota.

Si noti che non è X ad avere estremo superiore, ma ogni $E \subseteq X$ limitato superiormente.

Passaggio da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$: sup.

Definizione

L'insieme $\mathbb{R}$ è un campo ordinato che ha la proprietà dell'estremo superiore.

Facoltativo.

Si dimostra che in questo caso, la proprietà dell'estremo superiore è equivalente a dire che per ogni sezione $\{A, B\}$ di $\mathbb{R}$, cioè A, B tali che

- $A, B \neq \emptyset$;
- $A \cap B = \emptyset$;
- $A \cup B = \mathbb{R}$;
- *se* $a \in A$, $b \in B$ *allora* $a < b$,

esiste unico l'elemento separatore s (cioè tale che $a \leq s \leq b$ per ogni $a \in A$, $b \in B$).

Passaggio da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$: sup.

Esempio

Siano

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$$

e

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 2\}.$$

Si verifica facilmente che i due insiemi A e B sono due sezioni e che esiste unico l'elemento separatore, che in questo caso è $\sqrt{2}$.

Caratterizzazione di sup(E) e inf(E).

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ limitato superiormente. Sia $L = \sup(E)$ il minimo dei maggioranti.

Si ha che

$$L = \sup(E) \Leftrightarrow \begin{cases} i)\ x \leq L, \forall x \in E \\ ii)\ \forall \epsilon > 0 \exists x \in E \text{ tale che } x > L - \epsilon \end{cases}$$

La condizione *ii*) dice che $L + \epsilon$ non è maggiorante di E.

Caratterizzazione di $\sup(E)$ e $\inf(E)$.

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ limitato inferiormente. Sia $l = \inf(E)$ il massimo dei minoranti.
Si ha che

$$l = \inf(E) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} i)\ x \geq l, \forall x \in E \\ ii)\ \forall \epsilon > 0 \exists x \in E t.c. x < l + \epsilon \end{array} \right.$$

La condizione *ii*) dice che $l + \epsilon$ non è minorante di E.

Esempio

Si consideri

$$E = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N},\ n \neq 0\}.$$

Si mostri che E è limitato.

Dimostrazione. *Non è difficile mostrare che* $\max(E) = 1$. *Infatti*

- $\frac{1}{n} \leq 1$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$;
- $1 \in E$ *in quanto per* $n = 1$ *si ha* $\frac{1}{n} = 1$.

Alcuni esercizi.

Mostriamo ora che $\inf(E) = 0$. *Infatti*

- $\frac{1}{n} > 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$;
- *Per ogni* $\epsilon > 0$ *esiste* $\epsilon > 0$ *tale che* $x < \epsilon$. *Infatti se* $n > \frac{1}{\epsilon}$ *allora* $\frac{1}{n} < \epsilon$.

Di conseguenza l'insieme

$$E = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$$

- *avendo massimo è superiormente limitato;*
- *avendo estremo inferiore è inferiormente limitato;*

e quindi è limitato.

Esercizio per casa.

Sia

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{n}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Vediamo alcuni valori:

- $n = 0$: $x = \frac{n}{n+1} = \frac{0}{0+1} = 0$;
- $n = 1$: $x = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 0.5$;
- $n = 2$: $x = \frac{n}{n+1} = \frac{2}{3} = 0.6666\ldots$;
- $n = 3$: $x = \frac{n}{n+1} = \frac{3}{3+1} = 0.75$;
- $n = 4$: $x = \frac{n}{n+1} = \frac{4}{4+1} = 0.8$;
- $n = 100000$: $x = \frac{n}{n+1} = \frac{100000}{100000+1} = 0.99999000009999\ldots$;

Si capisce intuitivamente che il valore di $x = \frac{n}{n+1}$ è positivo, cresce al crescere di n e tende a 1 pur essendo inferiore poichè

$$n < n + 1 \Rightarrow \frac{n}{n+1} < 1.$$

Esercizio per casa.

Dimostrare che

1. $\min(A) = \inf(A) = 0$
2. $\sup(A) = 1$.
3. Esiste $\max(A)$?

Esercizio su max, min, sup, inf.

Esercizio

Sia

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbb{N},\ n \neq 0\}.$$

Determinare max *e* min.

Esercizio

Sia

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n} + (-1)^n,\ n \in \mathbb{N},\ n \neq 0\}.$$

Determinare max *e* min *(se esistono),* inf *e* sup *(se esistono).*

Valore assoluto (o modulo).

Sia $a \in \mathbb{R}$.
Si definisce valore assoluto (o modulo), la quantità

$$|a| := \begin{cases} a \text{ se } a \geq 0 \\ -a \text{ se } a < 0 \end{cases}$$

Si mostra facilmente che

- $|a| \geq 0$;
- $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$;
- $-|a| \leq a \leq |a|$.

Valore assoluto (o modulo).

Vediamo alcune disuguaglianze.
Sia $b \in \mathbb{R}$ e vediamo quando $|x| \leq b$.

- Se $b < 0$ ciò è mai verificato in quanto $0 \leq |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e quindi se fosse $|x| \leq b$ sarebbe

$$0 \leq |x| \leq b < 0$$

  il che non è possibile;
- Se $b \geq 0$ allora
  - Se $x \geq 0$, allora $|x| = x$ e quindi $|x| \leq b$ se e solo se $x = |x| \leq b$;
  - Se $x < 0$, allora $|x| = -x$ e quindi $|x| \leq b$ se e solo se $-x = |x| \leq b$ (cioè $x \geq -b$).

Raccogliendo i risultati si ha che per $b \geq 0$ si ha

$$|x| \leq b \Leftrightarrow -b \leq x \leq b \Leftrightarrow \{x \in \mathbb{R} : x \in [-b, b]\} \qquad (2)$$

Valore assoluto (o modulo).

Vediamo un'altra disuguaglianza.
Sia $b \in \mathbb{R}$ e vediamo quando $|x| \geq b$.

- Se $b < 0$ ciò è sempre verificato in quanto $|x| \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
- Se $b \geq 0$ allora
  - Se $x \geq 0$, allora $|x| = x$ e quindi $|x| \geq b$ se e solo se $x \geq b$;
  - Se $x < 0$, allora $|x| = -x$ e quindi $|x| \geq b$ se e solo se $-x \geq b$ (cioè $x \leq -b$).

Raccogliendo i risultati si ha che per $b \geq 0$ si ha

$$|x| \geq b \Leftrightarrow x \geq b \text{ o } x \leq -b \Leftrightarrow \{x \in \mathbb{R} : x \in (-\infty, -b] \cup [b, +\infty)\} \tag{3}$$

Valore assoluto (o modulo): disuguaglianza triangolare.

Vale la cosidetta disuguaglianza triangolare

Teorema

Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ *si ha che*

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

Dimostrazione. *Per quanto visto, per ogni* $x, y \in \mathbb{R}$

$$-|x| \leq x \leq |x|, \;\; -|y| \leq y \leq |y|$$

e quindi

$$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|.$$

Posto $b = |x| + |y| \geq 0$ *e* $z = x + y$ *abbiamo* $-b \leq z \leq b$ *e da (2) ciò è equivalente a dire* $|z| \leq b$ *da cui*

$$|x+y| = |z| \leq b = |x| + |y|.$$

Valore assoluto (o modulo): alcuni esempi.

Esempio

Fissato il parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ *determiniamo quando* $|x+3| < \alpha$.

- *Se* $\alpha < 0$, *essendo* $0 \leq |x+3|$, *ciò non si realizza mai altrimenti*
$$0 \leq |x+3| < \alpha < 0$$
che è assurdo.
- *Se* $\alpha > 0$, *da (2) abbiamo per* $b > 0$
$$|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$$
e quindi nel nostro caso implica
$$-\alpha < x + 3 < \alpha$$
o equivalentemente $-\alpha - 3 < x < \alpha - 3$.

Valore assoluto (o modulo): alcuni esempi.

Esempio

Fissato il parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ determiniamo quando $|x+3| > \alpha$.

- *Se $\alpha < 0$, essendo $0 \leq |x+3|$, ciò si realizza sempre*

$$\alpha < 0 \leq |x+3|;$$

- *Se $\alpha > 0$, da (3) abbiamo per $b > 0$*

$$|a| > b \Leftrightarrow a > b \text{ o } b < -a$$

e quindi nel nostro caso, posto $a = x+3$ e $b = \alpha$, implica

$$\alpha < x+3 \text{ cioè } \alpha \leq -(x+3)$$

da cui evidenziando il termine x

$$\alpha - 3 < x \text{ o } x \leq -3 - \alpha$$

Valore assoluto (o modulo): alcuni esempi.

Esempio

Se f, g sono due funzioni, vediamo quando $|f(x)| \leq g(x)$

- *se $g(x) < 0$, $|f(x)| \leq g(x)$ non è verificata;*
- *se $g(x) \geq 0$, $|f(x)| \leq g(x)$ è verificata se e solo se $-g(x) \leq f(x) \leq g(x)$;*

Valore assoluto (o modulo): alcuni esempi.

Esempio

Consideriamo, quale applicazione, per quali x *vale la disuguaglianza*

$$|6x^2 - 13x - 15| \leq 3 - x$$

Posto $f(x) := 6x^2 - 13x - 15$, $g(x) := 3 - x$, *per quanto visto*

- *se* $g(x) < 0$, $|f(x)| \leq g(x)$ *non è verificata; nel nostro caso* $g(x) < 0$ *se e solo se* $3 - x < 0$, *cioè* $x > 3$;
- *se* $g(x) \geq 0$, $|f(x)| \leq g(x)$ *è verificata* $\Leftrightarrow$ *se* $-g(x) \leq f(x) \leq g(x)$; *nel nostro caso* $g(x) \geq 0$ *se e solo se* $x \leq 3$ *ed in tal caso la disuguaglianza è verificata se e solo se* $-(3 - x) = -g(x) \leq f(x) = 6x^2 - 13x - 15 \leq g(x) = 3 - x$ *cioè se solo se valgono le seguenti disuguaglianze*

$$x - 3 \leq 6x^2 - 13x - 15 \text{ cioè } x^2 - 2x - 3 \leq 0$$

$$6x^2 - 13x - 15 \leq 3 - x \text{ cioè } 3x^2 - 7x - 6 \geq 0.$$

Valore assoluto (o modulo): alcuni esempi.

Osserviamo che per risolvere

$$x^2 - 2x - 3 \leq 0$$

basta calcolare gli zeri dell'equazione di secondo grado

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

che tramite la ben nota formula sono

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2$$

cioè $x_1 = -1$, $x_2 = 3$ *e osservare che esclusivamente tra* x_1 *e* x_2 *la parabola* $x^2 - 2x - 3$ *assume valori negativi, per dedurre che* $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ *se e solo se* $-1 \leq x \leq 3$.

Valore assoluto (o modulo): alcuni esempi.

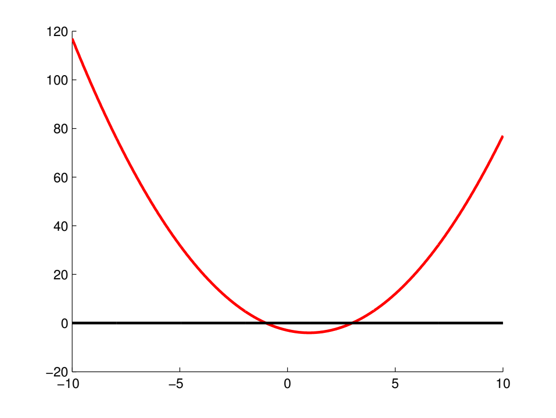

Figura : Grafico di $x^2 - 2x - 3$.

.

Valore assoluto (o modulo): alcuni esempi.

Similmente per risolvere

$$3x^2 - 7x - 6 \geq 0$$

basta calcolare gli zeri dell'equazione di secondo grado

$$3x^2 - 7x - 6 = 0$$

che sono $x_1 = 2/3$ *e* $x_2 = 3$, *e osservare che la parabola* $3x^2 - 7x - 6$ *assume valori non negativi per* $x \leq -2/3$ *e* $x \geq 3$.

Valore assoluto (o modulo): alcuni esempi.

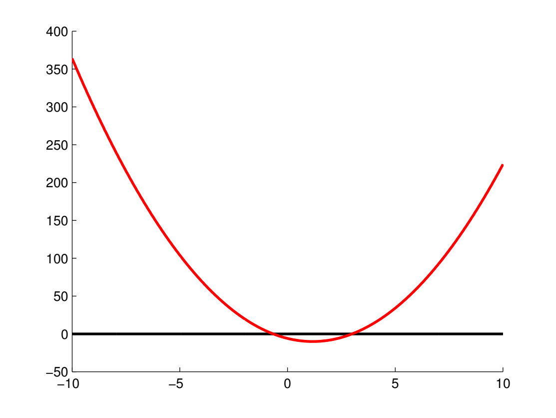

Figura : Grafico di $3x^2 - 7x - 6$.

.

Valore assoluto (o modulo): alcuni esempi.

Quindi, affinchè siano verificate contemporaneamente

$$x^2 - 2x - 3 \leq 0$$

$$3x^2 - 7x - 6 \geq 0$$

bisogna siano verificate tutte le disuguaglianze

$$-1 \leq x \leq 3$$

$$x \leq -2/3$$

$$x \geq 3$$

il che comporta

$$-1 \leq x \leq -2/3.$$

Passaggio da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$.

I numeri razionali in $\mathbb{Q}$ non sono sufficienti a misurare tutte le lunghezze. Ad esempio la lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo con cateti lunghi 1 vale $\sqrt{2}$ che non è un numero razionale.

Il proposito è costruire $\mathbb{R}$ da $\mathbb{Q}$.

Sia X un insieme totalmente ordinato (come ad esempio $\mathbb{Q}$).

- Il sottoinsieme $E \subseteq X$ è limitato superiormente se esiste M tale che $x \leq M$ per ogni $x \in E$. Tale M si dice maggiorante.
- Il sottoinsieme $E \subseteq X$ è limitato inferiormente se esiste m tale che $m \leq x$ per ogni $x \in E$. Tale M si dice minorante.
- L'insieme E è limitato se è limitato superiormente e inferiormente cioè

$$\exists m, M : m \leq x \leq M, \forall x \in E.$$

Principio per induzione: esempi.

Il principio per induzione viene utilizzato quale tecnica per dimostrare asserti del tipo

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \text{ vale la proprietà } p(n).$$

Esempio

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si dimostri che se n è pari allora n^2 è pari.

In questo caso $p(n)$ sta per *se n è pari allora n^2 è pari*.

Esempio

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si dimostri che $2^n > n$.

In questo caso $p(n)$ sta per $2^n > n$.

Principio per induzione: esempi.

Esempio

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si dimostri che

$$1 + 2 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

In questo caso $p(n)$ sta per $1 + 2 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Principio per induzione.

Sia $n_0 \in \mathbb{N}$ e supponiamo di dover dimostrare che $p(n)$ è verificata per ogni $n \geq n_0$. Se si dimostra che

1. $p(n)$ è vera per $n = n_0$ (*primo passo*),
2. supponendo che $p(n)$ allora $p(n+1)$ è vera (*passo induttivo*),

allora $p(n)$ è vera per ogni $n \geq n_0$.

Principio per induzione: esercizi.

Esercizio

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ *si ha che* $n^2 + n$ *è pari.*

Esercizio

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ *si ha che* $2n + 1 < n^2$.

Principio per induzione: disuguaglianza di Bernoulli.

Teorema

Per ogni $x \geq -1$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ *si ha*

$$(1+x)^n \geq 1 + xn.$$

Dimostrazione.

- $n = 0$*: essendo* $(1+x)^0 = 1$, $(1 + x \cdot 0) = 1$, *il primo passo è verificato;*
- *supponiamo valga l'ipotesi induttiva*

  $$(1+x)^n \geq 1 + xn$$

  e mostriamo

  $$(1+x)^{n+1} \geq 1 + x(n+1).$$

  In effetti, essendo $1 + x \geq 0$, $x^2 n \geq 0$

Sommatorie.

Per fare la somma di n numeri, si usa il simbolo $\sum$. Così

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

In questo caso, i si dice *indice* di sommatoria.

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

$$\sum_{k=3}^{8} \frac{1}{k} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$$

Progressione geometrica.

La sommatoria

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + \ldots + q^n$$

è nota come progressione geometrica di ragione q. Un suo esempio è

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k = 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^n.$$

Si dimostra che per $q \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1},$$

altrimenti banalmente

$$\sum_{k=0}^{n} 1^k = 1 + 1 + \ldots + 1^n = n + 1.$$

Per esempio, nel caso $q = 3$ si ha che da

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1},$$

necessariamente

$$\sum_{k=0}^{8} 3^k = 1 + 3 + \ldots + 2^n = \frac{3^{8+1} - 1}{3 - 1} = \frac{3^9 - 1}{2} = 9841.$$

Sommatorie e coefficienti binomiale.

Teorema

Per $q \neq 1$ si ha che

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Dimostrazione. *Osserviamo che*

$$\begin{aligned}(1-q)(1+q+\ldots+q^n) &= 1 + q + q^2 + \ldots + q^n \\ &\quad -q - q^2 - \ldots - q^{n+1} \\ &= 1 - q^{n+1} \end{aligned} \qquad (4)$$

abbiamo

$$(1-q)(1+q+\ldots+q^n) = 1 - q^{n+1}$$

da cui l'asserto, osservando che $\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + \ldots + q^n$ *e dividendo ambo i membri per* $1 - q \neq 0$.

Principio per induzione: esempio.

Esempio

Si dimostri che per ogni $n \geq 1$ *si ha*

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dimostrazione.

Nel nostro esempio $p(n)$ *è la proposizione* $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
Ragionando per induzione:

- $n = 1$*:* $\sum_{k=1}^{n} k = 1$, $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = 1$, *e quindi è verificata;*

Esercizio sul principio di induzione e sommatorie.

- *Supponiamo valga* $p(n)$, *cioè* $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ *e mostriamo* $p(n+1)$, *cioè* $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. *Da*

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

necessariamente vale la tesi del passo induttivo.

Coefficienti binomiali e binomio di Newton.

L'intenzione è quella di calcolare, fissati a, b, n, la quantità

$$(a+b)^n.$$

Esempi:

- $n = 0$: $(a+b)^0 = 1$;
- $n = 1$: $(a+b)^1 = a + b$;
- $n = 2$: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

Fattoriale.

Si definisce il fattoriale di $n \in \mathbb{N}$, la quantità

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

Esempi:

- $0! = 0$ (per definizione);
- $1! = 1$;
- $2! = 1 \cdot 2$;
- $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$;
- $8! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 8 = 40320$;
- $10! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 10 = 3628800$.

Fattoriale.

Teorema

Il fattoriale corrisponde al numero di permutazioni di n oggetti distinti.

Siano a, b, c e consideriamo le loro permutazioni:

1. (a, b, c);
2. (a, c, b);
3. (b, a, c);
4. (b, c, a);
5. (c, a, b);
6. (c, b, a).

Come anticipato sono 6, *esattamente come il fattoriale del numero n degli oggetti (nell'esempio* $n = 3$, *visto che gli oggetti sono a, b, c). Ricordiamo che* $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Coefficienti binomiali.

Siano $n, k \in \mathbb{N}$, con $k \leq n$.
Si definisce coefficiente binomiale $C_{n,k}$ di n e k, la quantità

$$C_{n,k} = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Alcuni esempi, ricordando che $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$:

- $C_{2,1} = \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right) = \frac{2!}{1!(2-1)!} = \frac{2!}{1!1!} = 2;$
- $C_{0,0} = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right) = \frac{0!}{0!(0-0)!} = \frac{0!}{0!0!} = 1;$
- $C_{n,0} = \left(\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array} \right) = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{0!n!} = 1;$

Formula del binomio di Newton.

Teorema

Definito con

$$C_{n,k} = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

si ha per $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b) \cdot \ldots \cdot (a+b)}_{n \text{ volte}} = \sum_{k=0}^{n} C_{n,k} a^k b^{n-k}$$

Per esempio, nel caso $n = 2$, essendo $C_{2,0} = 1$, $C_{2,1} = 2$, $C_{2,2} = 1$, si ottiene il noto risultato

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= \sum_{k=0}^{2} C_{2,k} a^k b^{2-k} = C_{2,0} a^0 b^{2-0} + C_{2,1} a^1 b^{2-1} + C_{2,2} a^2 b^{2-2} \\ &= b^2 + 2ab + a^2 \end{aligned} \tag{5}$$

Triangolo di Tartaglia.

I coefficienti $C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ si calcolano col Triangolo di Tartaglia.

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \end{array}$$

Il valore $C_{n,k}$ è il $(k+1)$-simo elemento della $(n+1)$-sima riga.
Così, dalla formula del binomio di Newton

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Potenze e radici n-sime.

Teorema

Siano $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. *Allora esiste un unico* $x > 0$, $x \in \mathbb{R}$ *tale che* $x^n = y$

- Usualmente tale x si denota con $y^{1/n}$ oppure $\sqrt[n]{y}$ e si chiama radice n-sima di x;
- Si osservi che se $y = 0$, $x = 0$ soddisfa $x^n = y$.

Potenze e radici *n*-sime.

Esempio

$\sqrt{4} = 2$

Esempio

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ *si ha* $\sqrt{x^2} = |x|$.

- in generale $\sqrt[n]{y} = x$ è definita solo se $y \geq 0$;
- se n è dispari e $y < 0$, $\sqrt[n]{y} = -\sqrt[n]{-y}$.

Potenze a esponente razionale.

Definizione

Supposto $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $y \in R$, $y > 0$, *si definisce*

$$y^r = y^{\frac{m}{n}} = (y * m)^{\frac{1}{n}}$$

Nota.

Per $y < 0$, n *dispari, questa definizione si può facilmente estendere (vedere quanto detto in precedenza sulle radici n-sime).*

Alcune proprietà delle potenze.

Si supponga $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, $r, s \in \mathbb{Q}$

- $a^{r+s} = a^r \cdot a^s$;
- $(ab)^r = a^r \cdot b^r$;
- $(a)^{r \cdot s} = (a^r)^s$;
- $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$;
- $a^r > 0$;
- $\begin{cases} a^r > 1 \text{ se } a > 1, r > 0; \\ a^r > 1 \text{ se } a < 1, r < 0; \\ a^r < 1 \text{ se } a < 1, r > 0; \\ a^r < 1 \text{ se } a > 1, r < 0; \end{cases}$
- $r < s \Rightarrow \begin{cases} a^r < a^s \text{ se } a > 1; \\ a^r > a^s \text{ se } a < 1; \end{cases}$
- $0 < a < b \Rightarrow \begin{cases} a^r < b^r \text{ se } r > 0; \\ a^r < b^r \text{ se } r < 0; \end{cases}$
- $\forall a \neq 1, a^r = a^s \Rightarrow r = s$.

Alcune proprietà delle potenze.

Nota.

Per ogni $a > 1$ $r \in \mathbb{R}$, $r = p, \alpha_1 \ldots \alpha_n$ *ldots si definisce* $a^r := \sup \{p, \alpha_1 \ldots \alpha_n, n \in \mathbb{N}\}$.
Con tale definizione, le precedenti proprietà delle potenze sono verificate e inoltre coincidono le definizioni nel caso $r \in \mathbb{Q}$.

Logaritmo.

Definizione

Sia $a > 0$, $a \neq 1$, $y > 0$. Esiste un solo $x \in \mathbb{R}$ tale che $a^x = y$.
Tale x si chiama logaritmo in base a di y e si scrive $x := \log_a y$

Dalla definzione, se $x = \log_a y$ necessariamente

$$a^{\log_a y} = a^x = y.$$

Logaritmo: proprietà .

Si supponga $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, $a, b, x, y > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$

- $a^{\log_a x} = x$;
- $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$;
- $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$;
- $\log_a \frac{x}{y} = -\log_a x - \log_a y$;
- $\log_a x^\gamma = \gamma \log_a x$ per ogni $\gamma \in \mathbb{R}$;
- $\log_a x = \frac{1}{\log_x a} = -\log_{\frac{1}{a}} x$;
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$;
- $x > y > 0 \Rightarrow \begin{cases} \log_a x > \log_a y \text{ se } a > 1; \\ \log_a x < \log_a y \text{ se } 0 < a < 1; \end{cases}$
- $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$; $\log_a \frac{1}{a} = -1$;
- Per ogni $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \neq 1$, si ha
    1. $\forall x \neq 0 : \log_a x^2 = 2 \log_a |x|$;
    2. $\forall x, y, xy > 0 : \log_a xy = \log_a |x| + \log_a |y|$.