

Limiti e continuità in \mathbb{R}^n .

Paola Mannucci e Alvisè Sommariva

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica

8 dicembre 2014

Il proposito di questa sezione è di estendere alcuni concetti propri di \mathbb{R} a \mathbb{R}^n .

Un punto chiave risulterà il concetto di limite di funzione in \mathbb{R}^n , e per fare questo necessiteremo di alcune definizioni che daremo in seguito, quali quelle di

- ▶ *intorno (aperto o chiuso);*
- ▶ *punto di accumulazione.*

Da queste definizioni, introdurremo il concetto di continuità per funzioni da \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^m .

Definizione

*Sia f una funzione di n variabili reali e Ω il più grande sottinsieme di \mathbb{R}^n per cui abbia senso scrivere $f(x)$ per $x \in \Omega$. Tale Ω si dice **dominio naturale di f** .*

Esempio

Sia $f(x, y) = \log(x + y)$. Il dominio naturale di f è l'insieme dei punti (x, y) per cui $x + y > 0$, cioè per cui $x > -y$.

Quindi consiste delle coppie del piano sopra la bisettrice del secondo e quarto quadrante.

Siano $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ scelti arbitrariamente.
L'insieme

$$\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

è dotato di

- ▶ una operazione detta **addizione**, per cui

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n;$$

- ▶ una operazione detta **moltiplicazione per uno scalare**, per cui

$$\lambda \cdot \mathbf{x} = (\lambda \cdot x_1, \dots, \lambda \cdot x_n) \in \mathbb{R}^n;$$

- ▶ una operazione detta **prodotto scalare**, per cui

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i = x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n \in \mathbb{R};$$

- ▶ una *norma* o modulo

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^n} = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2};$$

- ▶ una *distanza* tra \mathbf{x} e \mathbf{y}

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x} + (-1) \cdot \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

Esempio

Siano $\mathbf{x} = (-1, 3)$, $\mathbf{y} = (7, 2)$, $\lambda = 4$. Allora

- ▶ $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (-1, 3) + (7, 2) = (-1 + 7, 3 + 2) = (6, 5)$;
- ▶ $\lambda \cdot \mathbf{x} = 4 \cdot (-1, 3) = (-4, 12)$;
- ▶ $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ((-1, 3), (7, 2)) = (-1 \cdot 7) + (3 \cdot 2) = -7 + 6 = -1$;
- ▶ $\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^n} = \|(-1, 3)\|_{\mathbb{R}^n} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$;
- ▶ $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_{\mathbb{R}^n} = \|(-1, 3) - (7, 2)\|_{\mathbb{R}^n} = \sqrt{(-1 - 7)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{64 + 1} = \sqrt{65}$.

Definizione

Dati $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ed $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, si dice *intorno (sferico) \mathbf{x} di raggio ϵ* (o *palla di centro \mathbf{x} di raggio ϵ*) l'insieme

$$B_\epsilon(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \epsilon\} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \epsilon\}$$

Esempio

L'insieme $B_\epsilon(\mathbf{x})$

- ▶ in \mathbb{R}^1 è l'intervallo (aperto) $(\mathbf{x} - \epsilon, \mathbf{x} + \epsilon)$;
- ▶ in \mathbb{R}^2 è il disco di centro \mathbf{x} e raggio ϵ ;
- ▶ in \mathbb{R}^3 è la palla di centro \mathbf{x} e raggio ϵ .

Definizione

L'elemento $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ si dice **punto di accumulazione di E** se per ogni intorno B_ϵ di \mathbf{x} esiste qualche $\mathbf{y} \in E$ tale che $\mathbf{y} \in B_\epsilon \setminus \{\mathbf{x}\}$

Definizione

L'elemento $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ si dice **punto isolato di E** se non è di accumulazione in E .

Definizione

Un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ si dice **limitato** se esiste $r > 0$ tale che $E \subseteq B_r(\mathbf{0})$, ovvero se esiste $r > 0$ tale che $\|\mathbf{x}\| < r$ per ogni $\mathbf{x} \in E$.

Definizione

L'elemento $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ si dice

- ▶ **punto interno ad E** se esiste un suo intorno $B_\epsilon(\mathbf{x})$, $\epsilon > 0$, contenuto in E ;
- ▶ **punto esterno ad E** se è un punto interno al complementare di E ;
- ▶ **punto di frontiera per E** se non è ne' un punto interno ne' un punto esterno di E ;

Definizione

Si dice

- ▶ **interno di E** , spesso denotato con \mathring{E} , l'insieme dei punti interni di E ;
- ▶ **frontiera di E** , spesso denotato con ∂E , l'insieme dei punti di frontiera di E ;
- ▶ **chiusura di E** , spesso denotato con \bar{E} , l'insieme $E \cup \partial E$.

Definizione

Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice

- ▶ *aperto di \mathbb{R}^n* se coincide col suo interno;
- ▶ *chiuso di \mathbb{R}^n* se il suo complementare è aperto di \mathbb{R}^n ;

Nota.

- ▶ *Gli insiemi \emptyset, \mathbb{R}^n sono sia chiusi che aperti di \mathbb{R}^n ;*
- ▶ *L'unione e l'intersezione di aperti è ancora un aperto;*
- ▶ *L'unione e l'intersezione di chiusi è ancora un chiuso.*

Teorema

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (i) E è chiuso;
- (ii) $\partial E \subseteq E$;
- (iii) E contiene tutti i suoi punti di accumulazione.

Definizione

Un insieme $A \subseteq E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice **denso in E** se la sua chiusura coincide con E , cioè $\overline{A} = E$.

Esempio

L'insieme \mathbb{Q} è denso in \mathbb{R} .

\mathbb{R}^n : infinito

Come in precedenza per il caso di \mathbb{R} resta da definire quali siano gli intorni di ∞ in \mathbb{R}^n .

Definizione

Gli insiemi

$$\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{y}\|_{\mathbb{R}^n} > a, a \in \mathbb{R}^+\} \cup \{\infty\}$$

sono intorni di ∞ in \mathbb{R}^n , cioè i complementari di dischi centrati nell'origine e aventi raggio a .

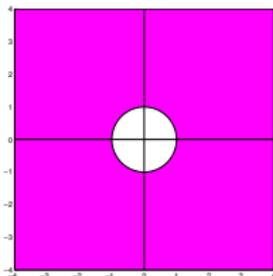


Figura : In magenta un intorno di ∞ di \mathbb{R}^2 , visto come il complementare del disco di \mathbb{R}^2 , avente centro l'origine e raggio 1.

Definizione

Siano $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ un punto di accumulazione per X . Si scrive

$$L = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$$

se per ogni intorno \mathcal{V} di L esiste \mathcal{U} intorno di \mathbf{x}_0 tale che $f(\mathbf{x}) \in \mathcal{V}$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{U} \setminus \mathbf{x}_0$.

Di seguito, a partire da questa definizione, come già visto per i limiti in \mathbb{R} , caratterizziamo questa definizione in termini di norme.

$$\mathbb{R}^n: \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L \in \mathbb{R}$$

Definizione

Se $L \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, allora

$$L = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$$

se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta(\epsilon) > 0$ tale che

$$\mathbf{x} \in X, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta(\epsilon) \Rightarrow \|f(\mathbf{x}) - L\|_{\mathbb{R}^m} < \epsilon.$$

$$\mathbb{R}^n: \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L \in \mathbb{R}$$

Esempio

Mostrare che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{1}{x^2 + y^2} = 1.$$

Svolgimento.

Supponiamo $|\frac{1}{x^2+y^2} - 1| < \epsilon$ e $(x-1)^2 + y^2 < \delta^2$.

$$\mathbb{R}^n: \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \infty$$

Definizione

Se $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, allora

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \infty$$

se e solo se per ogni $K > 0$ esiste $\delta(K) > 0$ tale che

$$\mathbf{x} \in X, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta(K) \Rightarrow \|f(\mathbf{x})\|_{\mathbb{R}^m} > K.$$

$$\mathbb{R}^n: \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}) = L \in \mathbb{R}$$

Definizione

Se $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, X contenente un intorno di ∞ , allora

$$L = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \infty} f(\mathbf{x})$$

se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $K(\epsilon) > 0$ tale che

$$\mathbf{x} \in X, \|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^n} > K(\epsilon) \Rightarrow \|f(\mathbf{x}) - L\|_{\mathbb{R}^m} < \epsilon.$$

$$\mathbb{R}^n: \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}) = \infty$$

Definizione

Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, X contenente un intorno di ∞ , allora

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}) = \infty$$

se e solo se per ogni $M > 0$ esiste $K(M) > 0$ tale che

$$\mathbf{x} \in X, \|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^n} > K(M) \Rightarrow \|f(\mathbf{x}) - L\|_{\mathbb{R}^m} > M.$$

Nota.

Si dimostra che

- ▶ il limite, se esiste, è *unico*;
- ▶ i *limiti* della *somma* e del *prodotto scalare* sono uguali rispettivamente alla somma e al prodotto scalare dei limiti, qualora questi ultimi esistano finiti;
- ▶ siano $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $g : \text{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$. Siano $\mathbf{x}_0 \in X$, $\mathbf{y}_0 \in \text{Im}(f)$ punti di accumulazione rispettivamente in X e $\text{Im}(f)$. Se

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0, \quad \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}_0} g(\mathbf{y}) = \mathbf{z}_0$$

allora

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g \circ f(\mathbf{x}) = \mathbf{z}_0.$$

Definizione

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$. Una **curva** in \mathbb{R}^m ($m \geq 2$) è una funzione $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ continua in I .

Teorema

Sia \mathbf{x}_0 un punto di accumulazione per $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Allora

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} f(\gamma(t)) = L$$

per ogni curva $\gamma : I \rightarrow X$ tale che $\gamma(t_0) = \mathbf{x}_0$ per un certo $t_0 \in I$.

Teorema

Una condizione *necessaria* per l'esistenza del limite (finito o infinito) di una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ è che la funzione ristretta a ogni retta passante per \mathbf{x}_0 ammetta lo stesso limite.

- ▶ Questa osservazione viene spesso usata per dimostrare la **non esistenza** di un limite.
- ▶ Sottolineiamo che esistono funzioni che ristrette a ogni retta passante per \mathbf{x}_0 ammettono lo stesso limite, pur **non esistendo il limite** di f in \mathbf{x}_0 .

Esempio

Mostrare che la funzione

$$f(x, y) = \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2}$$

non ammette limite per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

Svolgimento.

Le rette per $(0, 0)$ sono tutte del tipo $y = mx$. Allora, fissato m , la funzione su questa retta vale

$$f(x, y) = f(x, mx) = \frac{x^3 + (mx)^2}{x^2 + (mx)^2} = \frac{x^2(x + m^2)}{x^2(1 + m^2)} = \frac{(x + m^2)}{(1 + m^2)}$$

e quindi per $x \rightarrow 0$, il limite vale $\frac{m^2}{1+m^2}$. Siccome varia al variare di m , il limite non esiste.

Esempio

Mostrare che la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} x \cdot e^{x/y}, & \text{se } y \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } y = (0, 0) \end{cases}$$

non ammette limite per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

Traccia.

- ▶ Si vede che se restringiamo la funzione alle rette $y = mx$ passanti per l'origine, allora se $y \neq (0, 0)$, $m \neq 0$

$$f(x, y) = f(x, mx) = x \cdot e^{x/mx} = x \cdot e^{1/m} \rightarrow 0$$

mentre se $m = 0$, cioè $y = 0$, per definizione $f(x, y) = 0$.

- ▶ Tuttavia sull'arco $y = x^2$, abbiamo

$$f(x, y) = f(x, x^2) = x \cdot e^{x/x^2} = x \cdot e^{1/x} \rightarrow +\infty.$$

Quindi il limite non esiste.

Definizione

Siano $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$. Allora f si dice continua in $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ se vale una delle seguenti

- (i) \mathbf{x}_0 è un punto isolato;
- (ii) \mathbf{x}_0 è un punto di accumulazione per X e

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0).$$

Inoltre f si dice **continua in X** se è continua in ogni $\mathbf{x} \in X$.

Nota.

Si dimostra che

- ▶ *La somma e il prodotto scalare di funzioni continue sono funzioni continue;*
- ▶ *Siano $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $g : \text{Im}(f) \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ funzioni continue. Allora $h = g \circ f$ è una funzione continua;*
- ▶ *I polinomi di \mathbb{R}^n sono funzioni continue;*
- ▶ *Siano $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue. Allora $h = f/g$ è una funzione continua in tutti i punti $\mathbf{x} \in X$ in cui $g(\mathbf{x}) \neq 0$;*

Esempio

La funzione $f(x, y) = e^{x \cdot y^3 + x^4}$ è una funzione continua, in quanto lo è il polinomio $x \cdot y^3 + x^4$ composto con l'esponenziale (che è funzione continua).