Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi auctore Carolo Friderico Gauss

METHODVS NOVA
INTEGRALIVM VALORES
PER APPROXIMATIONEM INVENIENDI

AVCTORE

CAROLO FRIDERICO GAVSS.

GOTTINGAE
APVD HENRICVM DIETERICH.
MDCCCXV.

Eine Anzeige der Gaußischen Abhandlung: Methodus nova .... in der Jen. Allg. Litt. Zeit. 1823. Nro. 23. (von Brandes?)

METHODVS NOVA
INTEGRALIVM VALORES PER APPROXIMATIONEM INVENIENDI.

AVCTORE
CAROLO FRIDERICO GAVSS

SOCIETATI REGIAE SCIENTIARVM EXHIBITA D. 16. SEPT. 1814.

I.

Inter methodos ad determinationem numericam approximatam integralium propofitas infignem tenent locum regulae, quas praeeunte fummo *Newton* euolutas dedit *Cotes*. Scilicet fi requiritur valor integralis $\int y\,\mathrm{d}x$ ab $x = g$ vsque ad $x = h$ fumendus, valores ipfius y pro his valoribus extremis ipfius x et pro quotcunque aliis intermediis a primo ad vltimum incrementis aequalibus progredientibus, multiplicandi funt per certos coëfficientes numericos, quo facto productorum aggregatum in $h - g$ ductum integrale quaefitum fuppeditabit, eo maiore praecifione, quo plures termini in hac operatione adhibentur. Quum principia huius methodi, quae a geometris rarius quam par est in vfum vocari videtur, nullibi quod fciam plenius explicata fint, pauca de his praemittere ab inftituto noftro haud alienum erit.

2.

Sit $n + 1$ multitudo terminorum, quos in vfum vocare placuit, ftatuamusque $h - g = \Delta$, ita vt valores ipfius x fint

 g,

g, $g+\frac{\Delta}{n}$, $g+\frac{2\Delta}{n}$, $g+\frac{3\Delta}{n}$ etc. vsque ad $g+\Delta$, respondeantque iisdem refp. valores ipfius y hi A, A', A'', A''' etc. vsque ad $A^{(n)}$: denique ponatur indefinite $x=g+\Delta t$, ita vt y etiam fpectari poffit tamquam functio ipfius t. Defignemus per Y functionem fequentem

$$A.\frac{(nt-1)\,(nt-2)\,(nt-3)\,\ldots\,(nt-n)}{(-1)\;\;(-2)\,.\,(-3)\,\ldots\,(-n)}$$

$$+A'.\frac{nt\,.\,(nt-2)\,.\,nt-3)\,\ldots\,(nt-n)}{1\,.\,(-1)\,(-2)\,\ldots\,(1-n)}$$

$$+A''.\frac{nt\,.\,(nt-1)\,.\,(nt-3)\,\ldots\,(nt-n)}{2.\;\;1.\;\;\;(-1)\;\ldots\;(2-n)}$$

$$+A'''.\frac{nt\,.\,(nt-1)\,.\,(nt-2)\,\ldots\,(nt-n)}{3.\;2.\;\;\;1\;\ldots\;(3-n)}$$

$+$ etc.

$$+A^{(n)}.\frac{nt\,(nt-1)\,.\,(nt-2)\,\ldots\,(nt-n+1)}{n\,.\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,1}$$

fiue $\Sigma\frac{A^{(\mu)}\,T^{(\mu)}}{M^{(\mu)}}$, vbi repraefentante μ fingulos integros $0, 1, 2, 3 \ldots n$,

$$T^{(\mu)}=\frac{nt\,(nt-1)\,(nt-2)\,(nt-3)\,\ldots\,(nt-n)}{nt-\mu}$$

$M^{(\mu)}$ valor ipfius T pro $nt=\mu$.

Manifeftum erit, Y exhibere functionem algebraicam integram ipfius t ordinis n, atque eius valores pro fingulis $n+1$ valoribus ipfius t puta $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n} \ldots 1$ aequales effe valoribus ipfius y. Porro patet, fi Y' fit functio alia integra pro iisdem valoribus cum y confpirans, $Y'-Y$ pro iisdem euanefcere, adeoque per factores t, $t-\frac{1}{n}$, $t-\frac{2}{n}$, $t-\frac{3}{n} \ldots t-1$ et proin etiam per eorum productum (quod eft ordinis $n+1$) diuifibilem effe, vnde patet, Y', nifi prorfus identica fit cum Y, certo ad altiorem ordinem afcendere debere, fiue Y ex omnibus functionibus integris ordinem n haud egredientibus vnicam effe, quae pro illis $n+1$ valoribus cum y confpiret.

conſpiret. Quodſi itaque y, in ſeriem ſecundum poteſtates ipſius t progredientem euoluta, ante terminum qui implicat t^{n+1} omnino abrumpitur, cum Y identica erit: ſi vero ſaltem tam cito conuergit, vt terminos ſequentes ſpernere liceat, functio Y inter limites $t = 0$, $t = 1$ ſiue $x = g$, $x = h$ ipſius y vice fungi poterit.

3.

Iam integrale noſtrum $\int y dx$ tranſit in $\Delta \int y dt$ a $t = 0$ vsque ad $t = 1$ ſumendum, cuius loco per ea quae modo monuimus adoptabimus $\Delta \int Y dt$. Euoluendo itaque $T^{(\mu)}$ in

$$\alpha t^n + \beta t^{n-1} + \gamma t^{n-2} + \delta t^{n-3} + \text{etc.}$$

erit $\int T^{(\mu)} dt$, a $t = 0$ vsque ad $t = 1$,

$$= \frac{\alpha}{n+1} + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{n-1} + \frac{\delta}{n-2} + \text{etc.}$$

qua quantitate poſita $= M^{(\mu)} R^{(\mu)}$, erit integrale quaeſitum

$$= \Delta(AR + A'R' + A''R'' + A'''R''' + \text{etc.} + A^{(n)}R^{(n)}).$$

Exempli cauſſa apponemus computum coëfficientis R'' pro $n = 5$. Fit hic

$$T'' = 5^5 t^5 - 13.5^4 t^4 + 59.5^3 t^3 - 107.5^2 tt + 60.5.t$$

$$M'' = 2 \times 1 \times (-1) \times (-2) \times (-3) = -12.$$

Hinc $-12 R'' = \frac{3125}{6} - 1625 + \frac{7375}{4} - \frac{2675}{3} + 150 = -\frac{25}{12}$,

adeoque $R'' = \frac{25}{144}$.

Computus aliquanto breuior euadit, ſtatuendo $2t - 1 = u$. Tunc fit

$$T^{(\mu)} = \frac{(nu+n)(nu+n-2)(nu+n-4)\ldots(nu-n+4)(nu-n+2)(nu-n)}{2^n(nu+n-2\mu)}$$

Ponamus

$$\frac{(nnuu-nn).(nnuu-(n-2)^2).(nnuu-(n-4)^2).(nnuu-(n-6)^2)\ldots}{nnuu-(n-2\mu)^2}$$

$$= U^{(\mu)}$$

 vbi

vbi numerator desinere debet in ... $(nnuu - 9)(nnuu - 1)$, si n est impar, vel in ... $(nnuu - 4) nu$, si n est par, eritque

$$T^{(\mu)} = \frac{(nu - n + 2\mu)\, U^{(\mu)}}{2^n}$$

Iam integrale $\int T^{(\mu)} \mathrm{d}t$ a $t = 0$ vsque ad $t = 1$ acceptum aequale est integrali

$$\int \tfrac{1}{2}\, T^{(\mu)}\, \mathrm{d}u = \int \frac{nu\, U^{(\mu)}\, \mathrm{d}u}{2^{n+1}} + \int \frac{(2\mu - n)\, U^{(\mu)}\, \mathrm{d}u}{2^{n+1}}$$

ab $u = -1$ vsque ad $u = +1$.

Statuendo itaque

$$U^{(\mu)} = \alpha u^{n-1} + \beta u^{n-3} + \gamma u^{n-5} + \delta u^{n-7} + \text{etc.}$$

(sponte enim patet, potestates u^{n-2}, u^{n-4}, u^{n-6} etc. abesse), integralis pars $\int \frac{nu\, U^{(\mu)}\, \mathrm{d}u}{2^{n+1}}$ euanescet pro valore impari ipsius n, pars altera $\int \frac{(2\mu - n)\, U^{(\mu)}\, \mathrm{d}u}{2^{n+1}}$ vero pro valore pari, vnde integrale $\int T^{(\mu)} \mathrm{d}t$ fiet pro n pari

$$= \frac{n}{2^n} \left(\frac{\alpha}{n+1} + \frac{\beta}{n-1} + \frac{\gamma}{n-3} + \frac{\delta}{n-5} + \text{etc.} \right)$$

pro n impari autem

$$= \frac{2\mu - n}{2^n} \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n-2} + \frac{\gamma}{n-4} + \frac{\delta}{n-6} + \text{etc.} \right)$$

In exemplo nostro habetur

$U'' = (25uu - 25)(25uu - 9) = 625u^4 - 850uu + 225$, adeoque

$-12R'' = -\frac{1}{32}\left(125 - \frac{850}{3} + 225\right) = -\frac{25}{12}$ vt supra.

Obseruare conuenit, fieri $U^{(n-\mu)} = U^{(\mu)}$, adeoque $\int T^{(n-\mu)} \mathrm{d}t = \pm \int T^{(\mu)} \mathrm{d}t$, signo superiori valente pro n pari, inferiori pro impari. Quare quum facile perspiciatur, perinde haberi $M^{(n-\mu)} = \pm M^{(\mu)}$, semper erit $R^{(n-\mu)} = R^{(\mu)}$, siue e coëfficientibus $R, R', R'' \ldots\ldots R^{(n)}$ vltimus primo aequalis, penultimus secundo et sic porro.

4.

Valores numericos horum coëfficientium a Cotesio vsque ad $n = 10$ computatos ex Harmonia Mensurarum hic adscribimus.

Pro $n = 1$ siue terminis duobus.

$R = R' = \frac{1}{2}$.

Pro $n = 2$ siue terminis tribus.

$R = R'' = \frac{1}{6}$, $R' = \frac{2}{3}$

Pro $n = 3$ siue terminis quatuor,

$R = R''' = \frac{1}{8}$, $R' = R'' = \frac{3}{8}$

Pro $n = 4$ siue terminis quinque.

$R = R^{\text{iv}} = \frac{7}{90}$, $R' = R''' = \frac{16}{45}$, $R'' = \frac{2}{15}$

Pro $n = 5$ siue terminis sex.

$R = R^{\text{v}} = \frac{19}{288}$, $R' = R^{\text{iv}} = \frac{25}{96}$, $R'' = R''' = \frac{25}{144}$

Pro $n = 6$ siue terminis septem.

$R = R^{\text{vi}} = \frac{41}{840}$, $R' = R^{\text{v}} = \frac{9}{35}$, $R'' = R^{\text{iv}} = \frac{9}{280}$, $R''' = \frac{34}{105}$

Pro $n = 7$ siue terminis octo.

$R = R^{\text{vii}} = \frac{751}{17280}$, $R' = R^{\text{vi}} = \frac{3577}{17280}$, $R'' = R^{\text{v}} = \frac{49}{640}$, $R''' = R^{\text{iv}} = \frac{2989}{17280}$

Pro $n = 8$ siue terminis nouem.

$R = R^{\text{viii}} = \frac{989}{28350}$, $R' = R^{\text{vii}} = \frac{2944}{14175}$, $R'' = R^{\text{vi}} = -\frac{464}{14175}$, $R''' = R^{\text{v}} = \frac{5248}{14175}$

$R^{\text{iv}} = -\frac{454}{2835}$

Pro $n = 9$ siue terminis decem.

$R = R^{\text{ix}} = \frac{2857}{89600}$, $R' = R^{\text{viii}} = \frac{15741}{89600}$, $R'' = R^{\text{vii}} = \frac{27}{2240}$, $R''' = R^{\text{vi}} = \frac{1209}{5600}$, $R^{\text{iv}} = R^{\text{v}} = \frac{2889}{44800}$

Pro $n = 10$ siue terminis vndecim.

$R = R^{\text{x}} = \frac{16067}{598752}$, $R' = R^{\text{ix}} = \frac{26575}{149688}$, $R'' = R^{\text{viii}} = -\frac{16175}{199584}$, $R''' = R^{\text{vii}} = \frac{5675}{12474}$, $R^{\text{iv}} = R^{\text{vi}} = -\frac{4825}{11088}$, $R^{\text{v}} = \frac{17807}{24948}$.

5.

Quum formula $\Delta\,(AR + A'R' + A''R'' + \text{etc.} + A^{(n)}R^{(n)})$ integrale $\int y\,dx$ ab $x = g$ vsque ad $x = g + \Delta$, siue integrale $\Delta \int y\,dt$ a $t = 0$ vsque ad $t = 1$ exacte quidem exhibeat, quoties y in seriem euoluta

euoluta poteſtatem t^n non transſcendit, ſed approximate tantum, quoties y vltra progreditur, ſupereſt, vt errorem, quem inducunt termini proxime ſequentes, aſſignare doceamus. Deſignemus generaliter per $k^{(m)}$ differentiam inter valorem verum integralis $\int t^m dt$ a $t = 0$ vsque ad $t = 1$, atque valorem ex formula prodeuntem, ita vt ſit

$$k = 1 - R - R' - R'' - R''' - \text{etc.} - R^{(n)}$$
$$k' = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{n}(R' + 2R'' + 3R''' + \text{etc.} + nR^{(n)})$$
$$k'' = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{nn}(R' + 4R'' + 9R''' + \text{etc.} + nnR^{(n)})$$
$$k''' = \tfrac{1}{4} - \frac{1}{n^3}(R' + 8R'' + 27R''' + \text{etc.} + n^3 R^{(n)})$$

etc. Patet igitur, ſi y euoluatur in ſeriem

$$K + K't + K''tt + K'''t^3 + \text{etc.}$$

differentiam inter valorem verum integralis $\int y\,dt$ atque valorem approximatum formulae exprimi per

$$Kk + K'k' + K''k'' + K'''k''' + \text{etc.}$$

Sed manifeſto k, k', k'' etc. vsque ad $k^{(n)}$ ſponte fiunt $= 0$: correctio itaque formulae approximatae erit

$$K^{(n+1)}k^{(n+1)} + K^{(n+2)}k^{(n+2)} + K^{(n+3)}k^{(n+3)} + \text{etc.}$$

Indolem quantitatum $k^{(n+1)}$, $k^{(n+2)}$ etc. infra accuratius perſcrutabimur; hic ſufficiat, valores numericos primae aut ſecundae, pro ſingulis valoribus ipſius n, appoſuiſſe, vt gradus praeciſionis, quam formula approximata affert, inde aeſtimari poſſit.

Pro $n = 1$ habemus $k'' = -\tfrac{1}{6}$, $k''' = -\tfrac{1}{4}$, $k^{\text{iv}} = -\tfrac{3}{10}$.
Pro $n = 2$ inuenimus $k''' = 0$, $k^{\text{iv}} = -\tfrac{1}{120}$, $k^{\text{v}} = -\tfrac{1}{48}$.
Pro $n = 3$ fit $k^{\text{iv}} = -\tfrac{1}{270}$, $k^{\text{v}} = -\tfrac{1}{108}$
Pro $n = 4$ .... $k^{\text{v}} = 0$, $k^{\text{vi}} = -\tfrac{1}{2688}$, $k^{\text{vii}} = -\tfrac{1}{768}$
Pro $n = 5$ .... $k^{\text{vi}} = -\tfrac{11}{525000}$, $k^{\text{vii}} = -\tfrac{11}{15000}$
Pro $n = 6$ .... $k^{\text{vii}} = 0$, $k^{\text{viii}} = -\tfrac{1}{38880}$, $k^{\text{ix}} = -\tfrac{1}{8640}$
Pro $n = 7$ .... $k^{\text{viii}} = -\tfrac{167}{105884100}$, $k^{\text{ix}} = -\tfrac{167}{23532980}$
Pró $n = 8$ .... $k^{\text{ix}} = 0$, $k^{\text{x}} = -\tfrac{37}{1730150 4}$, $k^{\text{xi}} = -\tfrac{37}{31145728}$

Pro

Pro $n = 9$ .... $k^{\mathrm{x}} = -\frac{865}{631351908}$, $k^{\mathrm{xi}} = -\frac{865}{114791256}$

Pro $n = 10$ .... $k^{\mathrm{xi}} = 0$, $k^{\mathrm{xii}} = -\frac{26927}{1365000000000}$,

$k^{\mathrm{xiii}} = -\frac{26927}{210000000000}$.

Pro valore pari ipſius n vbique hic fieri animaduertimus $k^{(n+1)} = 0$, ac praeterea $k^{(n+3)} = \frac{n+3}{2} k^{(n+2)}$; pro valore impari ipſius n autem vbique prodit $k^{(n+2)} = \frac{n+2}{2} k^{(n+1)}$. Ratio horum euentuum facile e conſiderationibus ſequentibus depromitur.

Deſignemus generaliter per $l^{(m)}$ differentiam inter valorem verum huius integralis $\int (t - \frac{1}{2})^m \, \mathrm{d}t$ a $t = 0$ vsque ad $t = 1$, atque valorem eum, quem formula approximata profert, ita vt habeatur

$$l^{(m)} = \int (t - \tfrac{1}{2})^m \, \mathrm{d}t - [(-\tfrac{1}{2})^m R + (\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{2})^m R' + (\tfrac{2}{n} - \tfrac{1}{2})^m R'' + (\tfrac{3}{n} - \tfrac{1}{2})^m R''' + \text{etc.} + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{n})^m R^{(n-1)} + (\tfrac{1}{2})^m R^{(n)}]$$

integrali a $t = 0$ vsque ad $t = 1$ accepto. Manifeſto pro valore impari ipſius m euaneſcet tum valor verus integralis tum valor approximatus: erit itaque $l' = 0$, $l''' = 0$, $l^{\mathrm{v}} = 0$, $l^{\mathrm{vii}} = 0$ etc. ſiue generaliter $l^{(m)} = 0$ pro valore impari ipſius m. Pro valore pari autem ipſius m, formulae tribuimus formam hancce

$$l^{(m)} = \frac{1}{2^m(m+1)} - \frac{2}{n^m}\left((\tfrac{1}{2}n)^m R + (\tfrac{1}{2}n - 1)^m R' + (\tfrac{1}{2}n - 2)^m R'' + \text{etc.} + 2^m R^{(\frac{1}{2}n-2)} + R^{(\frac{1}{2}n-1)}\right)$$

ſi ſimul fuerit n par; vel hanc

$$l^{(m)} = \frac{1}{2^m}\left(\frac{1}{m+1} - \frac{2}{n^m}\left(n^m R + (n-2)^m R' + (n-4)^m R'' + \text{etc.} + 3^m R^{(\frac{1}{2}n-\frac{3}{2})} + R^{(\frac{1}{2}n-\frac{1}{2})}\right)\right)$$

ſi ſimul fuerit n impar.

Si igitur per euolutionem ipſius y in ſeriem ſecundum poteſtates ipſius $t - \frac{1}{2}$ progredientem prodit

$$y = L + L'(t-\tfrac{1}{2}) + L''(t-\tfrac{1}{2})^2 + L'''(t-\tfrac{1}{2})^3 + \text{etc.}$$

correctio valori approximato integralis $\int y\,dt$ a $t=0$ vsque ad $t=1$ applicanda erit

$$Ll + L''l'' + L^{\text{iv}}l^{\text{iv}} + L^{\text{vi}}l^{\text{vi}} + \text{etc.}$$

aut potius, quum $l^{(m)}$ neceſſario euaneſcat pro valore quouis integro ipſius m haud maiori quam n, correctio erit

$$L^{(n+2)}\,l^{(n+2)} + L^{(n+4)}\,l^{(n+4)} + L^{(n+6)}\,l^{(n+6)} + \text{etc.}$$

pro n pari, vel

$$L^{(n+1)}\,l^{(n+1)} + L^{(n+3)}\,l^{(n+3)} + L^{(n+5)}\,l^{(n+5)} + \text{etc.}$$

pro n impari.

Facillime iam correctiones $l^{(m)}$ ad $k^{(m)}$ reducuntur et vice verſa. Quum enim habeatur

$$(t-\tfrac{1}{2})^m = t^m - \tfrac{1}{2}m.\,t^{m-1} + \tfrac{1}{4}.\frac{m(m-1)}{1.\,2}\,t^{m-2} + \text{etc.}$$

erit

$$l^{(m)} = k^{(m)} - \tfrac{1}{2}mk^{(m-1)} + \tfrac{1}{4}.\frac{m(m-1)}{1.\,2}\,k^{(m-2)} + \text{etc.}$$

Et perinde fit

$$k^{(m)} = l^{(m)} + \tfrac{1}{2}ml^{(m-1)} + \tfrac{1}{4}.\frac{m(m-1)}{1.\,2}\,l^{(m-2)} + \text{etc.}$$

Ex poſteriori formula eiicientur termini, vbi l afficitur indice impari: vtraque autem continuanda eſt tantummodo vsque ad indicem $n+1$ (incluſ.) Manifeſto itaque habebimus

pro n pari

$$k^{(n+1)} = 0$$
$$k^{(n+2)} = l^{(n+2)}$$
$$k^{(n+3)} = \frac{n+3}{2}.\,l^{(n+2)}$$

pro n impari

$$k^{(n+1)} = l^{(n+1)}$$
$$k^{(n+2)} = \frac{n+2}{2}.\,l^{(n+1)}$$

vnde demanant obſeruationes ſupra indicatae.

6.

6.

Generaliter itaque loquendo praeſtabit, in applicanda methodo Coteſiana ipſi n tribuere valorem parem, ſeu terminorum multitudinem imparem in vſum vocare. Perparum ſcilicet praeciſio augebitur, ſi loco valoris paris ipſius n ad imparem proxime maiorem ascendamus, quum error maneat eiusdem ordinis, licet coëfficiente aliquantulum minori affectus. Contra ascendendo a valore impari ipſius n ad parem proxime ſequentem, error duobus ordinibus promouebitur, inſuperque coëfficiens notabilius imminutus praeciſionem augebit. Ita ſi quinque termini adhibentur, ſiue pro $n=4$, error proxime exprimitur per $-\frac{1}{2688}K^6$ vel per $-\frac{1}{2688}L^6$; ſi ſtatuitur $n=5$, error erit proxime $-\frac{11}{52500}K^6$ vel $-\frac{11}{52500}L^6$, adeoque ne ad ſemiſſem quidem prioris depreſſus: contra faciendo $n=6$, error ſit proxime $=-\frac{1}{38880}K^8$ vel $=-\frac{1}{38880}L^8$, praeciſioque tanto magis aucta, quo citius ſeries, in quam functio euoluitur, iam per ſe conuergit.

7.

Poſtquam haecce circa methodum *Coteſii praemiſimus*, ad disquiſitionem generalem progredimur, abiiciendo conditionem, vt valores ipſius x progreſſione arithmetica procedant. Problema itaque aggredimur, determinare valorem integralis $\int y\,dx$ inter limites datos ex aliquot valoribus datis ipſius y, vel exacte vel quam proxime. Supponamus, integrale ſumendum eſſe ab $x=g$ vsque ad $x=g+\Delta$, introducamusque loco ipſius x aliam variabilem $t=\frac{x-g}{\Delta}$, ita vt integrale $\Delta\int y\,dt$ a $t=0$ vsque ad $t=1$ inueſtigare oporteat. Reſpondeant $n+1$ valores dati ipſius y hi A, A', A'', A''' .... $A^{(n)}$ valoribus ipſius t inaequalibus his a, a', a'', a''' .... $a^{(n)}$, deſignemusque per Y functionem algebraicam integram ordinis n hancce:

$$A\frac{(t-a')(t-a'')(t-a''')\dots(t-a^{(n)})}{(a-a')(a-a'')(a-a''')\dots(a-a^{(n)})}$$
$$+A'\frac{(t-a)(t-a'')(t-a''')\dots(t-a^{(n)})}{(a'-a)(a'-a'')(a'-a''')\dots(a'-a^{(n)})}$$
$$+A''\frac{(t-a)(t-a')(t-a''')\dots(t-a^{(n)})}{(a''-a)(a''-a')(a''-a''')\dots(a''-a^{(n)})}$$
$$+\text{ etc.}$$
$$+A^{(n)}\frac{(t-a)(t-a')(t-a'')\dots(t-a^{(n-1)})}{(a^{(n)}-a)(a^{(n)}-a')(a^{(n)}-a'')\dots(a^{(n)}-a^{(n-1)})}$$

Manifesto valores huius functionis, ſi t alicui quantitatum a, a', a'', a''' .... $a^{(n)}$ aequalis ponitur, coincidunt cum valoribus reſpondentibus functionis y, vnde perinde vt in art. 2. concludimus, Y cum y identicam eſſe, quoties y quoque ſit functio algebraica integra ordinem n non transſcendens, aut ſaltem ipſius y vice fungi poſſe, ſi y in ſeriem ſecundum poteſtates ipſius t progredientem conuerſa tantam conuergentiam exhibeat, vt terminos altiorum ordinum negligere liceat.

8.

Iam ad eruendum integrale $\int Y\mathrm{d}t$ ſingulas partes ipſius Y conſideremus. Deſignemus productum,

$$(t-a)(t-a')(t-a'')(t-a''')\dots(t-a^{(n)})$$

per T, fiatque per euolutionem huius producti

$$T = t^{n+1} + \alpha t^n + \alpha' t^{n-1} + \alpha'' t^{n-2} + \text{etc.} + \alpha^{(n)}$$

Numerator fractionis, per quam, in parte prima ipſius Y, multiplicata eſt A, fit $=\frac{T}{t-a}$; numeratores in partibus ſequentibus perinde ſunt $\frac{T}{t-a'}$, $\frac{T}{t-a''}$, $\frac{T}{t-a'''}$ etc. Denominatores vero nihil aliud ſunt, niſi valores determinati horum numeratorum, ſi reſp. ſtatuitur $t=a$, $t=a'$, $t=a''$, $t=a'''$ etc.: denotemus hos denominatores reſp. per M, M', M'', M''' etc., ita vt ſit

Y

$$Y = \frac{A\,T}{M\,(t-a)} + \frac{A'\,T}{M'(t-a')} + \frac{A''\,T}{M''(t-a'')} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{A^{(n)}\;T}{M^{(n)}\,(t-a^{(n)})}$$

Quum fiat $T=0$, pro $t=a$, habemus aequationem identicam
$$a^{n+1} + \alpha a^n + \alpha' a^{n-1} + \alpha'' a^{n-2} + \text{etc.} + \alpha^{(n)} = 0.$$
adeoque
$$T = t^{n+1} - a^{n+1} + \alpha(t^n - a^n) + \alpha'(t^{n-1} - a^{n-1}) + \alpha''(t^{n-2} - a^{n-2})$$
$$+ \text{etc.} + \alpha^{(n-1)}(t-a)$$
Hinc diuidendo per $t-a$ fit
$$\frac{T}{t-a} = t^n + a t^{n-1} + a a t^{n-2} + a^3 t^{n-3} + \text{etc.} + a^n$$
$$+ \alpha t^{n-1} + \alpha a t^{(n-2)} + \alpha a a t^{n-3} + \text{etc.} + \alpha a^{n-1}$$
$$+ \alpha' t^{n-2} + \alpha' a t^{n-3} + \text{etc.} + \alpha' a^{n-2}$$
$$+ \alpha'' t^{n-3} + \text{etc.} + \alpha'' a^{n-3}$$
$$+ \text{etc. etc.}$$
$$+ \alpha^{(n-1)}$$
Valor huius functionis pro $t=a$ colligitur
$$= (n+1)\,a^n + n\,\alpha a^{n-1} + (n-1)\,\alpha' a^{n-2} + (n-2)\,\alpha'' a^{n-3}$$
$$+ \text{etc.} + \alpha^{(n-1)}.$$
Hinc M aequalis valori ipsius $\frac{dT}{dt}$ pro $t=a$, vti etiam aliunde constat. Perinde M', M'', M''' etc. erunt valores ipsius $\frac{dT}{dt}$ pro $t=a'$, $t=a''$, $t=a'''$ etc.

Porro inuenimus valorem integralis $\int \frac{T\,dt}{t-a}$, a $t=0$ vsque ad $t=1$,
$$= \frac{1}{n+1} + \frac{a}{n} + \frac{aa}{n-1} + \frac{a^3}{n-2} + \text{etc.} + a^n$$
$$+ \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha a}{n-1} + \frac{\alpha . aa}{n-2} + \text{etc.} + \alpha a^{n-1}$$
$$+ \frac{\alpha'}{n-1} + \frac{\alpha' a}{n-2} + \text{etc.} + \alpha' a^{n-2}$$
$$+ \frac{\alpha''}{n-2}$$

$$+\frac{\alpha''}{n-2}+\text{etc.}+\alpha''a^{n-3}$$
$$+\text{etc. etc.}$$
$$+\alpha^{(n-1)}$$

quos terminos ordine sequente disponemus:

$$a^n+\alpha a^{n-1}+\alpha' a^{n-2}+\alpha'' a^{n-3}+\text{etc.}+\alpha^{(n-1)}$$
$$+\tfrac{1}{2}(a^{n-1}+\alpha a^{n-2}+\alpha' a^{n-3}+\text{etc.}+\alpha^{(n-2)})$$
$$+\tfrac{1}{3}(a^{n-2}+\alpha a^{n-3}+\alpha' a^{n-4}+\text{etc.}+\alpha^{(n-3)})$$
$$+\tfrac{1}{4}(a^{n-3}+\alpha a^{n-4}+\alpha' a^{n-5}+\text{etc.}+\alpha^{(n-4)})$$
$$+\text{etc.}$$
$$+\frac{1}{n-1}(aa+\alpha a+\alpha')$$
$$+\frac{1}{n}(a+\alpha)$$
$$+\frac{1}{n+1}$$

Sed manifesto eadem quantitas prodit, si in producto e multiplicatione functionis T in seriem infinitam

$$t^{-1}+\tfrac{1}{2}t^{-2}+\tfrac{1}{3}t^{-3}+\tfrac{1}{4}t^{-4}\ \text{etc.}$$

orto, reiectis omnibus terminis, qui implicant potestates ipsius t exponentibus negatiuis (siue breuius, in producti parte ea, quae est functio integra ipsius t) pro t scribitur a. Supponamus itaque, fieri *)

$$T(t^{-1}+\tfrac{1}{2}t^{-2}+\tfrac{1}{3}t^{-3}+\tfrac{1}{4}t^{-4}+\text{etc.})=T'+T''$$

ita vt T' sit functio integra ipsius t in hoc producto contenta, T'' vero pars altera, scilicet series descendens in infinitumque excurrens. Quo facto valor integralis $\int\frac{T\,dt}{t-a}$ a $t=0$ vsque ad $t=1$ aequalis erit valori functionis T' pro $t=a$. Quodsi itaque valores determinatos functionis

$$\frac{T'}{\left(\frac{dT}{dt}\right)}$$

pro

*) Vix opus erit monere, characteres T, T', T'' alio sensu hic accipi, quam in art. 2.

pro $t=a$, $t=a'$, $t=a''$, $t=a'''$ etc. vsque ad $t=a^{(n)}$ resp. per R, R', R'', R'''.... $R^{(n)}$ denotamus, integrale $\int Y\mathrm{d}t$ a $t=0$ vsque ad $t=1$ fiet

$$= RA + R'A' + R''A'' + \text{etc.} + R^{(n)}A^{(n)}$$

quod per Δ multiplicatum exhibebit valorem vel verum vel approximatum integralis $\int y\,\mathrm{d}x$ ab $x=g$ vsque ad $x=g+\Delta$.

9.

Hae operationes aliquanto facilius perficiuntur, si loco indeterminatae t introducitur alia $u=2t-1$. Scribimus quoque brevitatis caussa $b=2a-1$, $b'=2a'-1$, $b''=2a''-1$ etc. Transeat T, substituto pro t valore $\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}$, in $\frac{U}{2^{n+1}}$, siue sit

$$U=(u-b)(u-b')(u-b'')\,\ldots\ldots\,(u-b^n)$$

Erit itaque $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2^n}.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}u}$, adeoque M, M', M'' etc. valores determinati ipsius $\frac{1}{2^n}.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}u}$, si deinceps statuitur $u=b$, $u=b'$, $u=b''$ etc.

Quum series $t^{-1}+\frac{1}{2}t^{-2}+\frac{1}{3}t^{-3}+\frac{1}{4}t^{-4}+$ etc. nihil aliud sit quam $\log.\frac{1}{1-t^{-1}}=\log\frac{1+u^{-1}}{1-u^{-1}}$: per substitutionem $t=\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}$ necessario transibit in $2u^{-1}+\frac{2}{3}u^{-3}+\frac{2}{5}u^{-5}+\frac{2}{7}u^{-7}+$ etc. Quodsi itaque statuimus

$$U(u^{-1}+\tfrac{1}{3}u^{-3}+\tfrac{1}{5}u^{-5}+\tfrac{1}{7}u^{-7}+\text{etc.})=U'+U''$$

ita vt U' sit functio integra ipsius u in hoc producto contenta, U'' vero pars altera, puta series descendens infinita, patet esse

$$T'+T''=\frac{1}{2^n}(U'+U'')$$

Sed manifesto T', tamquam functio integra ipsius t, per substitutionem $t=\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}$ necessario functionem integram ipsius u producet: contra T'', quae non continet nisi potestates negatiuas ipsius t, per eandem substitutionem tantummodo potestates negatiuas

tiuas ipſius u gignet. Quam ob rem U' nihil aliud erit quam $2^n T'$ per hanc ſubſtitutionem transformata, ac perinde U'' producta erit ex $2^n T''$. Nihil itaque intererit, ſiue in $\frac{T'}{\left(\frac{dT}{dt}\right)}$ ſubſtituamus $t = a$, ſiue in $\frac{U'}{\left(\frac{dU}{du}\right)}$ faciamus $u = b$, vnde colligimus, R, R', R'', R''' etc. etiam eſſe valores determinatos functionis $\frac{U'}{\left(\frac{dU}{du}\right)}$ pro $u = b$, $u = b'$, $u = b''$, $u = b'''$ etc.

10.

Antequam vlterius progrediamur, haecce praecepta per exemplum illuſtrabimus. Sit $n = 5$, ſtatuamusque $a = 0$, $a' = \frac{1}{5}$, $a'' = \frac{2}{5}$, $a''' = \frac{3}{5}$, $a^{\text{IV}} = \frac{4}{5}$, $a^{\text{V}} = 1$. Hinc fit

$$T = t^6 - 3t^5 + \tfrac{17}{5} t^4 - \tfrac{9}{5} t^3 + \tfrac{274}{625} tt - \tfrac{24}{625} t$$

Multiplicando per $t^{-1} + \frac{1}{2} t^{-2} + \frac{1}{3} t^{-3} + \frac{1}{4} t^{-4} +$ etc. obtinemus

$$T' = t^5 - \tfrac{5}{2} t^4 + \tfrac{67}{30} t^3 - \tfrac{17}{20} tt + \tfrac{913}{7500} t - \tfrac{10}{7500}$$

Valores itaque coefficientium R, R', R'', R''', R^{IV}, R^{V} exprimuntur per functionem fractam

$$\frac{t^5 - \frac{2}{5} t^4 + \frac{67}{30} t^3 - \frac{17}{20} tt + \frac{913}{7500} t - \frac{10}{7500}}{6t^5 - 15t^4 + \frac{68}{5} t^3 - \frac{27}{5} tt + \frac{548}{625} t - \frac{24}{625}}$$

in qua pro t deinceps ſubſtituendi ſunt valores 0, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, 1. Aliquanto breuior eſt methodus altera, quae ſuppeditat $b = -1$, $b' = -\frac{3}{5}$, $b'' = -\frac{1}{5}$, $b''' = \frac{1}{5}$, $b^{\text{IV}} = \frac{3}{5}$, $b^{\text{V}} = 1$

$$U = u^6 - \tfrac{7}{5} u^4 + \tfrac{259}{625} uu - \tfrac{9}{625}$$

$$U' = u^5 - \tfrac{16}{15} u^3 + \tfrac{277}{1875} u$$

vnde R, R', R'' etc. erunt valores functionis fractae

$$\frac{u^4 - \frac{16}{15} uu + \frac{277}{1875}}{6u^4 - \frac{28}{5} uu + \frac{518}{625}}$$

pro

pro $u = -1$, $u = -\frac{3}{5}$, $u = -\frac{1}{5}$ etc. Vtraque methodus eosdem numeros profert, quos in art. 4. ex Harmonia Mensurarum tradidimus. Ceterum in casu tali, qualem hocce exemplum sistit, vbi a, a', a'' etc. sunt quantitates rationales, valores denominatoris $\frac{dT}{dt}$ commodius in forma primitiua computantur puta $(a - a')(a - a'').(a - a''') \ldots (a - a^{(n)})$ pro $t = a$ ac perinde de reliquis. Idem valet de denominatore $\frac{dU}{du}$, qui pro $u = b$ fit $= (b - b')(b - b'')(b - b''') \ldots (b - b^{(n)})$.

II.

Quoties a, a', a'' etc. vel ex parte vel omnes sunt irrationales, vtilis erit transformatio functionis fractae, ex qua numeros R, R', R'' etc. deriuamus, in functionem integram: *principia talis transformationis*, quum in libris algebraicis non inueniantur, hoc loco breuiter explicabimus. Propositis scilicet tribus functionibus integris Z, ζ, ζ' indeterminatae z, quaeritur functio integra, quae fractae $\frac{Z}{\zeta}$ vice fungi possit, quatenus pro z accipitur radix quaecunque aequationis $\zeta' = 0$. Supponemus autem, ζ pro nullo horum valorum ipsius z euanescere, siue quod eodem redit, ζ atque ζ' nullum diuisorem communem indeterminatum implicare. Exponentes potestatum altissimarum ipsius z in ζ atque ζ' per k, k' denotabimus.

Diuidatur sueto more ζ per ζ', donec residui ordo infra k' depressus sit; statuatur residuum $= \frac{\zeta''}{\lambda}$, eiusque ordo $= k''$, ita vt $\frac{1}{\lambda} z^{k''}$ sit residui terminus altissimus; diuisionis quotientem ponemus $= \frac{p}{\lambda}$. Perinde ex diuisione functionis ζ' per ζ'' prodeat residuum $\frac{\zeta'''}{\lambda'}$ ordinis k''', quotiens $\frac{p'}{\lambda'}$; dein rursus e diuisione functionis

nis

nis ζ'' per ζ''' prodeat residuum $\frac{\zeta^{\text{IV}}}{\lambda''}$ ordinis k^{IV} atque quotiens $\frac{p''}{\lambda''}$, et sic porro, donec in serie functionum ζ'', ζ''', ζ^{IV} etc., quae singulae terminum suum altissimum coefficiente 1 affectum habebunt, perueniatur ad $\zeta^{(m)} = 1$. Hoc tandem euenire debere facile perspicitur, quum quaelibet functionum ζ, ζ', ζ'', ζ''' etc. cum praecedente diuisorem communem indeterminatum habere nequeat, adeoque certo diuisio absque residuo fieri nequeat, quamdiu diuisor fuerit ordinis maioris quam o. Habebimus igitur seriem aequationum

$$\zeta'' = \lambda\zeta - p\zeta'$$
$$\zeta''' = \lambda'\zeta' - p'\zeta''$$
$$\zeta^{\text{IV}} = \lambda''\zeta'' - p''\zeta'''$$
$$\zeta^{\text{V}} = \lambda'''\zeta''' - p'''\zeta^{\text{IV}}$$

etc. vsque ad

$$\zeta^{(m)} = \lambda^{(m-2)}\zeta^{(m-2)} - p^{(m-2)}\zeta^{(m-1)}$$

vbi ζ'', ζ''', $\zeta^{\text{IV}} \ldots \zeta^{(m)}$ sunt functiones integrae ipsius z ordinis k'', k''', $k^{\text{IV}} \ldots k^{(m)}$; numeri k', k'', $k''' \ldots k^{(m)}$ continuo decrescentes vsque ad vltimum $k^{(m)} = 0$; p, p', p'', p''' etc. quoque functiones integrae ipsius z ordinis $k - k'$, $k' - k''$, $k'' - k'''$, $k''' - k^{\text{IV}}$ etc. (excepto casu vbi $k < k'$, in quo manifesto statui debet $p = 0$).

His ita praeparatis formamus *secundam* seriem functionum integrarum ipsius z puta η, η', η'', $\eta''' \ldots \eta^{(m)}$. Et quidem statuemus $\eta = 1$, $\eta' = 0$, reliquas vero singulas e binis praecedentibus per eandem legem deriuamus, per quam functiones ζ, ζ', ζ'', ζ''' etc. inter se nexae sunt, scilicet per aequationes

$$\eta'' = \lambda\eta - p\eta'$$
$$\eta''' = \lambda'\eta' - p'\eta''$$
$$\eta^{\text{IV}} = \lambda''\eta'' - p''\eta'''$$
$$\eta^{\text{V}} = \lambda'''\eta''' - p'''\eta^{\text{IV}}$$

etc. vsque ad

$$\eta^{(m)} = \lambda^{(m-2)}\eta^{(m-2)} - p^{(m-2)}\eta^{(m-1)}$$

Mani-

Manifeſto $\eta'' = \lambda$ hic eſt ordinis o; $\eta''' = -\lambda p'$ ordinis $k' - k''$, et perinde ſequentes η^{IV}, η^{V} etc. reſp. ordinis $k' - k'''$, $k' - k^{\text{IV}}$ etc. ita vt vltima $\eta^{(m)}$ aſcendat ad ordinem $k' - k^{(m-1)}$.

Porro conſideremus *tertiam* functionum ſeriem, $\zeta - \zeta\eta$, $\zeta' - \zeta\eta'$, $\zeta'' - \zeta\eta''$, $\zeta''' - \zeta\eta'''$ etc., inter cuius terminos quosuis ternos conſequentes manifeſto ſimilis relatio intercedet, ſcilicet

$$\zeta'' - \zeta\eta'' = \lambda(\zeta - \zeta\eta) - p(\zeta' - \zeta\eta')$$
$$\zeta''' - \zeta\eta''' = \lambda'(\zeta' - \zeta\eta') - p'(\zeta'' - \zeta\eta'')$$
$$\zeta^{\text{IV}} - \zeta\eta^{\text{IV}} = \lambda''(\zeta'' - \zeta\eta'') - p''(\zeta''' - \zeta\eta''')$$

Iam prima harum functionum fit $= 0$, ſecunda $= \zeta'$: hinc facile colligitur, ſingulas per ζ' diuiſibiles fore.

Hinc autem nullo negotio ſequitur, loco fractionis $\frac{Z}{\zeta}$ adoptari poſſe functionem integram $Z\eta^{(m)}$, quatenus quidem ipſi z non tribuantur alii valores niſi qui ſint radices aequationis $\zeta' = 0$: manifeſto enim differentia $\frac{Z(1 - \zeta\eta^{(m)})}{\zeta}$ pro tali valore ipſius z neceſſario euaneſcit, quum $1 - \zeta\eta^{(m)} = \zeta^{(m)} - \zeta\eta^{(m)}$ per ζ' ſit diuiſibilis.

Loco functionis $Z\eta^{(m)}$ etiam adoptari poterit eius reſiduum ex diuiſione per ζ' ortum, cuius ordo erit inferior ordine functionis ζ'.

Ceterum hocce reſiduum commodius per algorithmum ſequentem immediate eruere licet. Formentur aequationes ſequentes

$$Z = q'\zeta' + Z'$$
$$Z' = q''\zeta'' + Z''$$
$$Z'' = q'''\zeta''' + Z'''$$
$$Z''' = q^{\text{IV}}\zeta^{\text{IV}} + Z^{\text{IV}}$$
etc. vsque ad
$$Z^{(m-1)} = q^{(m)}\zeta^{(m)} + Z^{(m)}$$

ſcilicet deinceps diuidendo Z per ζ', dein reſiduum primae diuiſionis Z' per ζ'', tum reſiduum ſecundae diuiſionis per ζ''' ac ſic porro.

Quum reſiduum ſemper ad ordinem inferiorem pertineat quam diviſor, ordo functionum Z', Z'', Z''', Z^{iv} etc. erit resp. inferior quam k', k'', k''', k^{iv} etc.; vltima vero $Z^{(m)}$ neceſſario ſit $=0$, quum diuiſor $\zeta^{(m)}$ ſit $=1$. Habemus itaque

$$Z = q'\zeta' + q''\zeta'' + q'''\zeta''' + q^{\mathrm{iv}}\zeta^{\mathrm{iv}} + \text{etc.} + q^{(m)}\zeta^{(m)}$$

Quatenus autem pro z ſolae radices aequationis $\zeta' = 0$ accipiuntur, fit $\zeta' = 0$, $\zeta'' = \zeta\eta''$, $\zeta''' = \zeta\eta'''$, $\zeta^{\mathrm{iv}} = \zeta\eta^{\mathrm{iv}}$ etc., vnde ſub eadem reſtrictione erit

$$\frac{Z}{\zeta} = q''\eta'' + q'''\eta''' + q^{\mathrm{iv}}\eta^{\mathrm{iv}} + \text{etc.} + q^{(m)}\eta^{(m)}.$$

Ordo vero huius expreſſionis neceſſario erit infra k': quum enim ordo quotientium q'', q''', q^{iv} etc. eſſe debeat infra $k' - k''$, $k'' - k'''$, $k''' - k^{\mathrm{iv}}$ etc., ordo ſingularum partium $q''\eta''$, $q'''\eta'''$, $q^{\mathrm{iv}}\eta^{\mathrm{iv}}$ etc. erit infra $k' - k''$, $k' - k'''$, $k' - k^{\mathrm{iv}}$ etc.

Denique adhuc obſeruamus, ſi forte inter valores indeterminatae z, quos in fractione $\frac{Z}{\zeta}$ ſubſtituere oporteat, rationales cum irrationalibus mixti reperiantur, magis e re fore, illos ab his ſeparare, atque hos ſolos in aequatione $\zeta' = 0$ comprehendere. Pro rationalibus enim valoribus calculi compendio opus non erit; pro irrationalibus autem calculus tanto ſimplicior erit, quo minor fuerit gradus functionis integrae, ad quam fractam reducere licet.

12.

Ecce nunc exemplum transformationis in art. praec. explicatae. Propoſita ſit functio fracta

$$\frac{z^6 - \frac{50}{39}z^4 + \frac{283}{715}zz - \frac{256}{15015}}{7z^6 - \frac{105}{13}z^4 + \frac{315}{143}zz - \frac{35}{429}}$$

in qua z indefinite repraeſentat radices aequationis

$$z^7 - \tfrac{21}{13}z^5 + \tfrac{105}{143}z^3 - \tfrac{35}{429}z = 0.$$

Si hic omnes ſeptem radices complecti vellemus, ad functionem integram ſexti ordinis delaberemur. Manifeſto autem pro

valore

valore rationali $z=0$ computus fractionis obuius eſt, datque valorem $\frac{256}{1225}$: quopropter ſepoſita hac radice in aequatione ſexti gradus ſubſiſtemus:

$$z^6 - \tfrac{21}{13}z^4 + \tfrac{105}{143}zz - \tfrac{35}{429} = 0$$

quo pacto facile praeuidemus orturam eſſe functionem integram quarti ordinis. Iam ex applicatione praeceptorum praecedentium prodeunt ſequentia:

$$\zeta = 7z^6 - \tfrac{105}{13}z^4 + \tfrac{315}{143}zz - \tfrac{35}{429}$$
$$\zeta' = z^6 - \tfrac{21}{13}z^4 + \tfrac{105}{143}zz - \tfrac{35}{429}$$
$$\zeta'' = z^4 - \tfrac{10}{11}zz + \tfrac{5}{33}$$
$$\zeta''' = zz - \tfrac{3}{7}$$
$$\zeta^{\mathrm{iv}} = 1$$
$$\lambda = \tfrac{13}{42} \qquad p = \tfrac{13}{6}$$
$$\lambda' = -\tfrac{4719}{280} \qquad p' = -\tfrac{4719}{280}zz + \tfrac{3333}{280}$$
$$\lambda'' = -\tfrac{147}{8} \qquad p'' = -\tfrac{147}{8}zz + \tfrac{777}{88}$$
$$\eta = 1$$
$$\eta' = 0$$
$$\eta'' = \tfrac{13}{42}$$
$$\eta''' = \tfrac{20449}{3920}zz - \tfrac{14443}{3920}$$
$$\eta^{\mathrm{iv}} = \tfrac{61347}{640}z^4 - \tfrac{127413}{1120}zz + \tfrac{120263}{4480}$$
$$Z = z^6 - \tfrac{50}{39}z^4 + \tfrac{283}{715}zz - \tfrac{256}{15015}; \qquad q' = 1.$$
$$Z' = \tfrac{1}{3}z^4 - \tfrac{22}{65}zz + \tfrac{323}{5005} \qquad q'' = \tfrac{1}{3}$$
$$Z'' = -\tfrac{76}{2145}zz + \tfrac{632}{45045} \qquad q''' = -\tfrac{76}{2145}$$
$$Z''' = -\tfrac{4}{3465} \qquad q^{\mathrm{iv}} = -\tfrac{4}{3465}$$

Hinc tandem deriuatur functio integra fractioni propoſitae aequiualens:

$$-\tfrac{1850}{10800}z^4 - \tfrac{1573}{29400}zz + \tfrac{7047}{39200}$$

13.

Ad determinandum gradum praeciſionis, qua formula noſtra integralis $RA + R'A' + R''A'' + \text{etc.} + R^{(n)}A^{(n)}$ gaudet, ſtatuamus generaliter

 Ra^m

$$Ra^m + R'a'^m + R''a''^m + \text{etc.} + R^{(n)}a^{(n)m} = \frac{1}{m+1} - k^{(m)}$$

ita vt $k^{(m)}$ fit differentia inter integralis $\int t^m\,dt$ a $t=0$ vsque ad $t=1$ fumti valorem verum atque approximatum. Habebimus itaque, fingulis fractionibus in feries euolutis,

$$\frac{R}{t-a} + \frac{R'}{t-a'} + \frac{R''}{t-a''} + \text{etc.} + \frac{R^{(n)}}{t-a^{(n)}}$$

$$= (1-k)t^{-1} + (\tfrac{1}{2}-k')t^{-2} + (\tfrac{1}{3}-k'')t^{-3} + (\tfrac{1}{4}-k''')t^{-4} + \text{etc.}$$

$$= t^{-1} + \tfrac{1}{2}t^{-2} + \tfrac{1}{3}t^{-3} + \tfrac{1}{4}t^{-4} + \text{etc.} - \Theta$$

fi ftatuimus

$$\Theta = kt^{-1} + k't^{-2} + k''t^{-3} + k'''t^{-4} + \text{etc.}$$

fiue potius (quum iam fciamus, k, k', k'', k''' etc. vsque ad $k^{(n)}$ fponte euanefcere debere)

$$\Theta = k^{(n+1)}t^{-(n+2)} + k^{(n+2)}t^{-(n+3)} + k^{(n+3)}t^{-(n+4)} + \text{etc.}$$

Multiplicando per T fit

$$T\left(\frac{R}{t-a} + \frac{R'}{t-a'} + \frac{R''}{t-a''} + \text{etc.} + \frac{R^{(n)}}{t-a^{(n)}}\right) = T' + T'' - T\Theta$$

Pars prior huius aequationis eft functio integra ipfius t ordinis n, eiusque valores determinati pro $t=a$, $t=a'$, $t=a''$ etc. refp. fiunt MR, $M'R'$, $M''R''$ etc.: quapropter, quum eadem valeant de functione T', vti ex ipfo modo numeros R, R', R'' etc. determinandi perfpicuum eft, neceffario illa pars prior aequationis identica effe debet cum T', adeoque $T'' = T\Theta$. Oritur itaque Θ ex euolutione fractionis $\frac{T''}{T}$, quo pacto coëfficientes $k^{(n+1)}$, $k^{(n+2)}$ etc. quousque libet determinari poterunt. Quibus inuentis correctio valoris noftri approximati integralis $\int y\,dt$ erit

$$= k^{(n+1)}K^{(n+1)} + k^{(n+2)}K^{(n+2)} + \text{etc.}$$

fi feries, in quam euoluitur y, eft

$$y = K + K't + K''tt + K'''t^3 + \text{etc.}$$

14.

Si magis placet, correctionem exprimere per coëfficientes feriei fecundum poteftates ipfius $t-\frac{1}{2}$ progredientis

$$y = L + L'(t-\tfrac{1}{2}) + L''(t-\tfrac{1}{2})^2 + L'''(t-\tfrac{1}{2})^3 + \text{etc.}$$

illa erit

$$= l^{(n+1)} L^{(n+1)} + l^{(n+2)} L^{(n+2)} + l^{(n+3)} L^{(n+3)} + \text{etc.}$$

fi generaliter per $l^{(m)}$ exprimimus correctionem valoris approximati integralis $\int (t-\frac{1}{2})^m \,dt$. Hae correctiones $l^{(m)}$ cum correctionibus $k^{(m)}$ nexae erunt per aequationem

$$l^{(m)} = k^{(m)} - \tfrac{1}{2} m k^{(m-1)} + \tfrac{1}{4}.\frac{m.m-1}{1.2} k^{(m-2)} - \tfrac{1}{8}.\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} k^{(m-3)} + \text{etc.}$$

Quo vero illas independenter eruere poffimus, perpendamus, functionem Θ per fubftitutionem $t = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}$ tranfire in

$$\begin{aligned}
&2k(u^{-1} - u^{-2} + u^{-3} - u^{-4} + \text{etc.})\\
+\ &4k'(u^{-2} - 2u^{-3} + 3u^{-4} - 4u^{-5} + \text{etc.})\\
+\ &8k''(u^{-3} - 3u^{-4} + 6u^{-5} - 10u^{-6} + \text{etc.})\\
+\ &16k'''(u^{-4} - 4u^{-5} + 10u^{-6} - 20u^{-7} + \text{etc.})\\
+\ &\text{etc.}
\end{aligned}$$

fiue in

$$2ku^{-1} + 4(k'-\tfrac{1}{2})u^{-2} + 8(k''-\tfrac{1}{2}.2k' + \tfrac{1}{4}k)u^{-3}$$
$$+ 16(k'''-\tfrac{1}{2}.3k'' + \tfrac{1}{4}.3k' - \tfrac{1}{8}k)u^{-4} + \text{etc.}$$

fiue in

$$2lu^{-1} + 4l'u^{-2} + 8l''u^{-3} + 16l'''u^{-4} + \text{etc.}$$

fiue denique, quum a priori fciamus, l, l', l'', l''' etc. vsque ad $l^{(n)}$ fponte euanescere, in

$$2^{n+2} l^{(n+1)} u^{-(n+2)} + 2^{n+3} l^{(n+2)} u^{-(n+3)} + 2^{n+4} l^{(n+4)} u^{-(n+4)} + \text{etc.}$$

At $\Theta = \frac{T''}{T}$; quare quum T, T'' per fubftitutionem $t = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}$ transeant in $\frac{U}{2^{n+1}}$, $\frac{U''}{2^n}$, (art. 9.), functio Θ per eandem fubftitutionem tranfibit in $\frac{2U''}{U}$. Quodfi itaque feriem ex euolutione fractionis

ctionis $\frac{U''}{U}$ oriundam per Ω designamus, erit

$$\Omega = 2^{n+1} l^{(n+1)} u^{-(n+2)} + 2^{n+2} l^{(n+2)} u^{-(n+3)} + 2^{n+3} l^{(n+3)} u^{-(n+4)} + \text{etc.}$$

quo pacto coëfficientes $l^{(n+1)}$, $l^{(n+2)}$ etc. quousque lubet erui poterunt.

Ita in exemplo art. 10. inuenimus

$$U'' = -\tfrac{176}{13125} u^{-1} - \tfrac{304}{28125} u^{-3} - \tfrac{2576}{309375} u^{-5} - \text{etc.}$$

$$\Omega = -\tfrac{176}{13125} u^{-7} - \tfrac{832}{28125} u^{-9} - \tfrac{189856}{4296875} u^{-11} - \text{etc.}$$

adeoque correctio valoris approximati integralis

$$= -\tfrac{11}{52500} L^{\mathrm{VI}} - \tfrac{13}{112500} L^{\mathrm{VIII}} - \tfrac{5033}{1375000000} L^{\mathrm{X}} - \text{etc.}$$

15.

Coëfficiens $K^{(m)}$ functionis y in seriem euolutae fit, per theorema Taylori, aequalis valori ipsius

$$\frac{1}{1.2.3\ldots m} \cdot \frac{d^m y}{dt^m} \text{ siue } \frac{\Delta^m}{1.2.3\ldots m} \cdot \frac{d^m y}{dx^m}$$

pro $t=0$ siue $x=g$; perinde coëfficiens $L^{(m)}$ est valor eiusdem expressionis pro $t=\frac{1}{2}$ siue $u=0$ siue $x=g+\frac{1}{2}\Delta$: vtrique coëfficienti *ordinem* m tribuemus. *Generaliter* itaque loquendo integratio nostra vsque ad ordinem n inclus. exacta erit, quicunque valores pro $a, a', a'' \ldots a^{(n)}$ accipiantur. Attamen hinc nihil obstat, quominus pro valoribus harum quantitatum scite electis praecisio ad altiorem gradum euehatur. Ita iam supra vidimus, in methodo Cotesii i. e. pro $a=0$, $a=\frac{1}{n}$, $a''=\frac{2}{n}$, $a'''=\frac{3}{n}$ etc. praecisionem sponte ad ordinem $n+1$ inclus. extendi, quoties n sit numerus par. Generaliter patet, si valores a, a', a'', a''' etc. ita fuerint electi, vt in functione T'' vel U'' ab initio excidat terminus vnus pluresue, praecisionem totidem gradibus vltra ordinem n promotum iri, quot termini exciderint. Hinc facile colligitur, quum multitudo quantitatum quas eligere conceditur sit $n+1$, per idoneam earum determiterminationem praecifionem femper ad ordinem $2n+1$ incluf. euehi poffe, quo pacto adiumento $n+1$ terminorum eundem praecifionis ordinem affequi licebit, ad quem attingendum $2n+1$ vel $2n+2$ terminos in vfum vocare oporteret, fi Cotefii methodum fequeremur.

16.

Totum hoc negotium in eo vertitur, vt pro quouis valore dato ipfius n functionem T eruamus formae $t^{n+1} + \alpha t^n + \alpha' t^{n-1} + \alpha'' t^{n-2}$ etc. itaque comparatam, vt in producto

$$T(t^{-1} + \tfrac{1}{2}t^{-2} + \tfrac{1}{3}t^{-3} + \tfrac{1}{4}t^{-4} + \text{etc.})$$

euoluto poteftates t^{-1}, t^{-2}, t^{-3} .... $t^{-(n+1)}$ omnes nanciscantur coëfficientem o; aut fi magis placet, functionem U formae $u^{n+1} + \beta u^n + \beta' u^{n-1} + \beta'' u^{n-2} +$ etc., cuius productum per $u^{-1} + \frac{1}{3}u^{-3} + \frac{1}{5}u^{-5} + \frac{1}{7}u^{-7} +$ etc. liberum euadat a poteftatibus u^{-1}, u^{-2}, u^{-3}, u^{-4} .... $u^{-(n+1)}$. Modus pofterior aliquanto fimplicior erit: quum enim facile perfpiciatur, coëfficientes ipfius U, *vt conditioni praefcriptae fatisfiat, alternatim euanescere debere*, fiue ftatui $\beta = 0$, $\beta'' = 0$, $\beta^{\text{IV}} = 0$ etc., laboris dimidia fere pars iam abfoluta cenfenda erit. Euoluamus cafus quosdam fimpliciores.

I. Pro $n=0$ coëfficiens vnicus ipfius t^{-1} in producto $(t+\alpha)(t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} + \frac{1}{3}t^{-3} +$ etc.) euanescere debet. Qui quum fiat $= \frac{1}{2} + \alpha$, habemus $\alpha = -\frac{1}{2}$, fiue $T = t - \frac{1}{2}$. Perinde $U = u$.

II. Pro $n=1$, determinatio ipfius T pendet a duabus aequationibus

$$0 = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2}\alpha + \alpha'$$
$$0 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3}\alpha + \tfrac{1}{2}\alpha'$$

vnde deducimus $\alpha = -1$, $\alpha' = +\frac{1}{6}$, fiue $T = tt - t + \frac{1}{6}$. Determinatio functionis U vnicam aequationem affert

$$0 = \tfrac{1}{3} + \beta'$$

vnde $\beta' = -\frac{1}{3}$, fiue $U = uu - \frac{1}{3}$.

III. Pro $n = 2$, functio T determinatur adiumento trium aequationum

$$0 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3}\alpha + \tfrac{1}{2}\alpha' + \alpha''$$
$$0 = \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{4}\alpha + \tfrac{1}{3}\alpha' + \tfrac{1}{2}\alpha''$$
$$0 = \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{5}\alpha + \tfrac{1}{4}\alpha' + \tfrac{1}{3}\alpha''$$

vnde nancifcimur $\alpha = -\frac{3}{2}$, $\alpha' = \frac{3}{5}$, $\alpha'' = -\frac{1}{20}$, adeoque T $t^3 - \frac{3}{2}tt + \frac{3}{5}t - \frac{1}{20}$. Ad determinandam U vnica aequatio fufficit

$$0 = \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{3}\beta'$$

vnde $\beta' = -\frac{3}{5}$ fiue $U = u^3 - \frac{3}{5}u$.

Attamen hunc modum, qui *calculos continuo moleftiores* adducit, hic vlterius non perfequemur, fed ad fontem genuinum folutionis generalis progrediemur.

17.

Propofita fractione continua

$$\varphi = \cfrac{v}{w + \cfrac{v'}{w' + \cfrac{v''}{w'' + \cfrac{v'''}{w''' + \text{etc.}}}}}$$

conftat, fractiones continuo magis appropinquantes inueniri per algorithmum fequentem. Formentur duae quantitatum feries, V, V', V'', V''' etc., W, W', W'', W''' etc. per hafce formulas

$$\begin{array}{ll} V = 0 & W = 1 \\ V' = v & W' = wW \\ V'' = w'V' + v'V & W'' = w'W' + v'W \\ V''' = w''V'' + v''V' & W''' = w''W'' + v''W' \\ V^{\text{IV}} = w'''V''' + v'''V'' & W^{\text{IV}} = w'''W''' + v'''W'' \end{array}$$

etc. eritque

$$\frac{V}{W} = 0 \qquad\qquad \frac{V'}{W'}$$

$$\frac{V'}{W'} = \frac{v}{w}$$

$$\frac{V''}{W''} = \cfrac{v}{w + \cfrac{v'}{w'}}$$

$$\frac{V'''}{W'''} = \cfrac{v}{w + \cfrac{v'}{w' + \cfrac{v''}{w''}}}$$

et ſic porro. Praeterea conſtat, vel facile ex ipſis aequationibus praecedentibus confirmatur, eſſe

$$V W' - V' W = - v$$
$$V' W'' - V'' W' = + v v'$$
$$V'' W''' - V''' W'' = - v v' v''$$
$$V''' W^{\text{IV}} - V^{\text{IV}} W''' = + v v' v'' v'''$$

etc. Hinc perſpicuum eſt, ſeriei

$$\frac{v}{W W'} - \frac{v v'}{W' W''} + \frac{v v' v''}{W'' W'''} - \frac{v v' v'' v'''}{W''' W^{\text{IV}}} + \text{etc.}$$

terminum primum eſſe $= \frac{V'}{W'}$

ſummam duorum terminorum primorum $= \frac{V''}{W''}$

ſummam trium terminorum primorum $= \frac{V'''}{W'''}$

ſummam quatuor terminorum primorum $= \frac{V^{\text{IV}}}{W^{\text{IV}}}$

et ſic porro; quocirca ſeries ipſa vel in infinitum vel vsque dum abrumpatur continuata ipſam fractionem continuam φ exprimet. Simul hinc habetur differentia inter φ atque ſingulas fractiones appropinquantes $\frac{V'}{W'}$, $\frac{V''}{W''}$, $\frac{V'''}{W'''}$ etc.

E formula 33 p. 16 *Disquiſitionum generalium circa ſeriem in-*

 finitam

finitam (COMMENTATT. RECENT. Vol. II.), mutando t in $\frac{1}{u}$, facile obtinemus transformationem feriei

$$\varphi = u^{-1} + \tfrac{1}{3}u^{-3} + \tfrac{1}{5}u^{-5} + \tfrac{1}{7}u^{-7} + \text{etc.}$$

in fractionem continuam fequentem

$$\cfrac{1}{u - \cfrac{\frac{1}{3}}{u - \cfrac{\frac{2.2}{3.5}}{u - \cfrac{\frac{3.3}{5.7}}{u - \cfrac{\frac{4.4}{7.9}}{u - \text{etc.}}}}}}$$

ita vt habeatur

$$v = 1,\ v' = -\tfrac{1}{3},\ v'' = -\tfrac{4}{15},\ v''' = -\tfrac{9}{35},\ v^{\text{IV}} = -\tfrac{16}{63} \text{ etc.}$$

$$w = w' = w'' = w''' = w^{\text{IV}} \text{ etc.} = u.$$

Hinc pro V, V', V'', V''' etc., W, W', W'', W''' etc. nanciscimur valores fequentes

$$V = 0,\ W = 1$$
$$V' = 1,\ W' = u$$
$$V'' = u,\ W'' = uu - \tfrac{1}{3}$$
$$V''' = uu - \tfrac{4}{15},\ W''' = u^3 - \tfrac{3}{5}u$$
$$V^{\text{IV}} = u^3 - \tfrac{11}{21}u,\ W^{\text{IV}} = u^4 - \tfrac{6}{7}uu + \tfrac{3}{35}$$
$$V^{\text{V}} = u^4 - \tfrac{7}{9}uu + \tfrac{64}{945},\ W^{\text{V}} = u^5 - \tfrac{10}{9}u^3 + \tfrac{5}{21}u$$
$$V^{\text{VI}} = u^5 - \tfrac{34}{33}u^3 + \tfrac{1}{5}u,\ W^{\text{VI}} = u^6 - \tfrac{15}{11}u^4 + \tfrac{5}{11}uu - \tfrac{5}{231}$$
$$V^{\text{VII}} = u^6 - \tfrac{50}{39}u^4 + \tfrac{283}{715}uu - \tfrac{256}{15015},$$
$$W^{\text{VII}} = u^7 - \tfrac{21}{13}u^5 + \tfrac{105}{143}u^3 - \tfrac{35}{429}u$$

etc.

Leui attentione adhibita elucet, fingulas V, V', V'', V''' etc. W, W', W'', W''' etc. fieri functiones integras indeterminatae u; terminum altiffimum in $V^{(m)}$ fieri u^{m-1}, poteftatesque u^{m-2},

u^{m-4},

u^{m-4}, u^{m-6} etc. abeſſe; terminum altiſſimum vero in $W^{(m)}$ fieri u^m, atque abeſſe poteſtates u^{m-1}, u^{m-3}, u^{m-5} etc. Per ea autem, quae ſupra demonſtrauimus, erit

$$\varphi = \frac{1}{WW'} + \frac{1}{3W'W''} + \frac{2.2}{3.3.5W''W'''} + \frac{2.2.3.3}{3.3.5.5.7W'''W^{\text{IV}}}$$
$$+ \frac{2.2.3.3.4.4}{3.3.5.5.7.7.9W^{\text{IV}}W^{\text{V}}} + \text{etc.}$$

ac proin generaliter

$$\varphi - \frac{V^{(m)}}{W^{(m)}} = \frac{2.2.3.3\ldots\ldots m.m}{3.3.5.5\ldots\ldots(2m-1)(2m+1)W^{(m)}W^{(m+1)}}$$
$$+ \frac{2.2.3.3\ldots\ldots(m+1)(m+1)}{3.3.5.5\ldots\ldots(2m+1)(2m+3)W^{(m+1)}W^{(m+2)}}$$
$$+ \text{etc.}$$

Si igitur $\varphi - \frac{V^{(m)}}{W^{(m)}}$ in ſeriem descendentem conuertitur, eius terminus primus erit

$$= \frac{2.2.3.3\ldots\ldots m.mu^{-(2m+1)}}{3.3.5.5\ldots\ldots(2m-1)(2m+1)}$$

Productum vero $\varphi W^{(m)}$ compoſitum erit e functione integra $V^{(m)}$ atque ſerie infinita, cuius terminus primus

$$= \frac{2.2.3.3\ldots\ldots m\,m\,u^{-(m+1)}}{3.3.5.5\ldots\ldots(2m-1)(2m+1)}$$

Hinc igitur ſponte inuenta eſt functio U ordinis $n+1$, quae conditioni in art. praec. ſtabilitae ſatisfacit, ſcilicet vt productum φU liberum euadat a poteſtatibus u^{-1}, u^{-2}, u^{-3} ..... $u^{-(n+1)}$. Scilicet non eſt alia quam $W^{(n+1)}$, ſimulque patet, U' aequalem fieri ipſi $V^{(m+1)}$, nec non terminum primum ipſius U'' eſſe

$$= \frac{2.2.3.3\ldots\ldots(n+1)(n+1)}{3.3.5.5\ldots\ldots(2n+1)(2n+3)}.\, u^{-(n+2)}$$

Quodſi igitur pro b, b', b'' ..... $b^{(n)}$ accipiuntur radices aequationis $W^{(n+1)} = 0$, valoresque coëfficientium R, R', R'' ..... $R^{(n)}$

 per

per praecepta ſupra tradita eruuntur, formula noſtra integralis praeciſione gaudebit ad ordinem $2n+1$ ascendente, eiusque correctio exprimetur proxime per

$$\frac{1}{2^{2n+2}} \cdot \frac{2.2.3.3 \ldots\ldots (n+1)(n+1)}{3.3.5.5 \ldots\ldots (2n+1)(2n+3)} L^{(2n+2)}$$

$$= \frac{1.1.2.2.3.3 \ldots\ldots (n+1)(n+1)}{2.6.6.10.10.14 \ldots\ldots (4n+2)(4n+6)} L^{(2n+2)}$$

18.

Disquiſitiones art. praec. functiones idoneas U pro ſingulis valoribus numeri n inuenire quidem docent, ſed ſucceſſiue tantum, dum a valoribus minoribus ad maiores transeundum eſt. Facile autem animaduertimus, has functiones generaliter exprimi per

$$u^{n+1} - \frac{(n+1)n}{2.(2n+1)} u^{n-1} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2.4(2n+1)(2n-1)} u^{n-3}$$
$$- \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2.4.6.(2n+1)(2n-1)(2n-3)} u^{n-5} + \text{etc.}$$

ſiue etiam, ſi characteriſtica F ad normam commentationis ſupra citatae vtimur, per

$$u^{n+1} F(-\tfrac{1}{2}n, -\tfrac{1}{2}(n+1), -(n+\tfrac{1}{2}), u^{-2})$$

Haecce inductio facile in demonſtrationem rigoroſam conuertitur per methodum vulgo notam, aut, ſi ita videtur, adiumento formulae 19 in comment. cit. Functio U, ſi magis placet, etiam ordine terminorum inuerſo, exprimi poteſt per

$$\pm \frac{3.5.7 \ldots. (n+1)}{(n+3)(n+5) \ldots. (2n+1)} \cdot uF(-\tfrac{1}{2}n, \tfrac{1}{2}(n+3), \tfrac{3}{2}, uu)$$

pro n pari, valente ſigno ſuperiori vel inferiori, prout $\frac{1}{2}n$ par eſt vel impar

aut per

$$\pm \frac{1.3.5 \ldots. n}{(n+2)(n+4) \ldots. (2n+1)} F(-\tfrac{1}{2}(n+1), \tfrac{1}{2}n+1, \tfrac{1}{2}, uu)$$

pro

pro n impari, valente ſigno ſuperiori vel inferiori, prout $\frac{1}{2}(n+1)$ par eſt vel impar.

Functio U' expreſſionem generalem aeque ſimplicem non admittit: facile tamen ex ipſa geneſi quantitatum V, V', V'' etc. colligitur, terminum vltimum ipſius U' pro n pari fieri

$$= \pm \frac{2.2.4.4.6.6 \ldots\ldots n.n}{3.5.7.9.11.13 \ldots\ldots (2n-1)(2n+1)}$$

ſigno ſuperiori vel inferiori valente, prout $\frac{1}{2}n$ par eſt vel impar.

Functio $U'' = \varphi W^{(n+1)} - V^{(n+1)}$, cuius terminum primum iam in art. praec. aſſignare docuimus, etiam per algorithmum recurrentem euolui poteſt, quum manifeſto generaliter habeatur

$$\varphi W'' - V'' = w' (\varphi W' - V') + v' (\varphi W - V)$$

$$\varphi W''' - V''' = w'' (\varphi W'' - V'') + v'' (\varphi W' - V')$$

$$\varphi W^{\mathrm{IV}} - V^{\mathrm{IV}} = w''' (\varphi W''' - V''') + v''' (\varphi W'' - V'')$$

etc. adeoque eo quem tractamus caſu

$$\varphi W^{(m+2)} - V^{(m+2)} = u(\varphi W^{(m+1)} - V^{(m+1)}) - \frac{(m+1)^2}{(2m-1)(2m+1)}(\varphi W^{(m)} - V^{m})$$

Ita inuenimus

$$\varphi W - V = u^{-1} + \tfrac{1}{3}u^{-3} + \tfrac{1}{5}u^{-5} + \tfrac{1}{7}u^{-7} + \text{etc.}$$

$$\varphi W' - V' = \tfrac{1}{3}u^{-2} + \tfrac{1}{5}u^{-4} + \tfrac{1}{7}u^{-6} + \tfrac{1}{9}u^{-8} + \text{etc.}$$

$$\varphi W'' - V'' = \tfrac{4}{45}u^{-3} + \tfrac{8}{105}u^{-5} + \tfrac{4}{63}u^{-7} + \tfrac{112}{2079}u^{-9} + \text{etc.}$$

$$\varphi W''' - V''' = \tfrac{4}{175}u^{-4} + \tfrac{8}{315}u^{-6} + \tfrac{4}{165}u^{-8} + \tfrac{16}{715}u^{-10} + \text{etc.}$$

etc. quas ſeries ita quoque exhibere licet

$$\varphi W - V = u^{-1}\left(1 + \frac{1.2}{2.3}u^{-2} + \frac{1.2.3.4}{2.4.3.5}u^{-4} + \frac{1.2.3.4.5.6}{2.4.6.3.5.7}u^{-6} + \text{etc.}\right)$$

$$\varphi W' - V' = \tfrac{1}{3}u^{-2}\left(1 + \frac{2.3}{2.5}u^{-2} + \frac{2.3.4.5}{2.4.5.7}u^{-4} + \frac{2.3.4.5.6.7}{2.4.6.5.7.9}u^{-6} + \text{etc.}\right)$$

$$\varphi W'' - V'' = \tfrac{4}{45}u^{-3}\left(1 + \frac{3.4}{2.7}u^{-2} + \frac{3.4.5.6}{2.4.7.9}u^{-4} + \frac{3.4.5.6.7.8}{2.4.6.7.9.11}u^{-6} + \text{etc.}\right)$$

$\varphi W'''$

$$\varphi W'''-V'''=\tfrac{4}{175}u^{-4}\left(1+\frac{4.5}{2.9}u^{-2}+\frac{4.5.6.7}{2.4.9.11}u^{-4}+\frac{4.5.6.7.8.9}{2.4.6.9.11.13}u^{-6}+\text{etc}\right)$$

etc. Hanc inductionem sequentes habebimus generaliter
$U'' = \varphi W^{(n+1)} - V^{(n+1)}$ aequalem producto ex

$$\frac{2.2.3.3.4.4\,\ldots\ldots\,(n+1).(n+1)}{3.3.5.5.7.7.9\,\ldots\ldots\,(2n+1)(2n+3)}u^{-(n+2)}$$

in seriem infinitam

$$1+\frac{(n+2)(n+3)}{2(2n+5)}u^{-2}+\frac{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{2.4.(2n+5)(2n+7)}u^{-4}+\text{etc.}$$

aut si magis placet in $F(\frac{1}{2}n+1,\ \frac{1}{2}n+\frac{3}{2},\ n+\frac{5}{2},\ u^{-2})$. *Haec quoque* inductio facillime ad plenam certitudinem euehitur vel per methodum vulgo notam vel adiumento formulae 19 in commentatione saepius citatae.

19.

Quum sufficiat, *functionum T, U* alterutram nosse, *posterioris* determinationem tamquam simpliciorem praetulimus. Quae quemadmodum euolutioni seriei $u^{-1}+\frac{1}{3}u^{-3}+\frac{1}{5}u^{-5}+$ etc. in fractionem continuam innixa est, per ratiocinia similia ex euolutione seriei $t^{-1}+\frac{1}{2}t^{-2}+\frac{1}{3}t^{-3}+\frac{1}{4}t^{-4}+$ *etc. in fractionem continuam*

$$\cfrac{1}{t-\cfrac{\frac{1}{2}}{1-\cfrac{\frac{1}{6}}{t-\cfrac{\frac{2}{6}}{1-\cfrac{\frac{2}{10}}{t-\cfrac{\frac{3}{10}}{1-\text{etc.}}}}}}}$$

deriuare potuissemus algorithmum ad determinandam functionem T pro valoribus successiuis numeri n. Ad eandem vero conclusionem peruenimus perpendendo, T nihil aliud esse quam $\frac{U}{2^{n+1}}$ seu $\frac{W^{(n+1)}}{2^{n+1}}$, si pro u scribitur $2t-1$, quo pacto functiones successiue pro

pro T adoptandae habebuntur per algorithmum sequentem:

$$W = 1$$

$$\tfrac{1}{2}W' = t - \tfrac{1}{2}$$

$$\tfrac{1}{4}W'' = (t-\tfrac{1}{2})\cdot\tfrac{1}{2}W' - \frac{1.1}{2.6}W = tt - t + \tfrac{1}{6}$$

$$\tfrac{1}{8}W''' = (t-\tfrac{1}{2})\cdot\tfrac{1}{4}W'' - \frac{2.2}{6.10}\cdot\tfrac{1}{2}W' = t^3 - \tfrac{3}{2}tt + \tfrac{3}{5}t - \tfrac{1}{20}$$

$$\tfrac{1}{16}W^{\text{iv}} = (t-\tfrac{1}{2})\cdot\tfrac{1}{8}W''' - \frac{3.3}{10.14}\cdot\tfrac{1}{4}W'' = t^4 - 2t^3 + \tfrac{9}{7}tt - \tfrac{2}{7}t + \tfrac{1}{70}$$

etc. Per inductionem hinc resultat generaliter

$$T = t^{n+1} - \frac{(n+1)^2}{1.(2n+2)}t^n + \frac{(n+1)^2.nn}{1.2.(2n+2)(2n+1)}t^{n-1}$$
$$- \frac{(n+1)^2.nn.(n-1)^2}{1.2.3.(2n+2)(2n+1).2n}t^{n-2} + \text{etc.}$$

siue $T = t^{n+1}F(-(n+1),\ -(n+1),\ -2(n+1),\ t^{-1})$, cui inductioni facile est demonstrationis vim conciliare. Si magis arridet, T ordine terminorum inuerso etiam per

$$\pm\frac{1.2.3.4\,.....\,(n+1)}{2.6.10.14\,.....\,(4n+2)}F(n+2,\ -(n+1),\ 1,\ t)$$

exprimi potest, vbi signum superius valet pro n impari, inferius pro pari. Simili denique modo generaliter T'' aequalis inuenitur producto ex

$$\frac{1.1.2.2.3.3\,.....\,(n+1).(n+1)}{2.6.6.10.10.14\,.....\,(4n+2).(4n+6)}t^{-(n+2)}$$

in seriem infinitam

$$1 + \frac{(n+2)^2}{1.(2n+4)}t^{-1} + \frac{(n+2)^2(n+3)^2}{1.2.(2n+4)(2n+5)}t^{-2}$$
$$+ \frac{(n+2)^2.(n+3)^2(n+4)^2}{1.2.3\,(2n+4)(2n+5)(2n+6)}t^{-3}$$
$$+ \text{etc.}$$

siue in $F(n+2,\ n+2,\ 2n+4,\ t^{-1})$.

20.

Quum in functione U poteſtates u^n, u^{n-2}, u^{n-4} etc. abſint, e radicibus aequationis $U = 0$ binae ſemper erunt magnitudine aequales ſignis oppoſitae, quibus pro valore pari ipſius n adhuc aſſociare oportet radicem ſingularem 0. Inuentis radicibus, valores coëfficientium R, R', R'' etc. ſecundum methodum art. 11. habebuntur per functionem integram ipſius u, quae pro valore impari ipſius n erit formae

$$\gamma u^{n-1} + \gamma' u^{n-3} + \gamma'' u^{n-5} + \text{etc.}$$

pro valore pari autem, ſi excluditur *coëfficiens radici $u = 0$ reſpondens*, formae

$$\gamma u^{n-2} + \gamma' u^{n-4} + \gamma'' u^{n-6} + \text{etc.}$$

Exemplum art. 12. ipſam hanc reductionem exhibet pro $n = 6$. Manifeſto igitur valoribus *oppoſitis ipſius u ſemper reſpondent coëfficientes aequales*. Ceterum in caſu eo, vbi n eſt par, coëfficiens radici $u = 0$ reſpondens facile generaliter a priori aſſignari poteſt. Habebitur hic coëfficiens, ſi in $\dfrac{U'}{\left(\dfrac{dU}{du}\right)}$ ſubſtituitur $u = 0$. Valorem numeratoris U' pro $u = 0$ iam in art. 18. tradidimus, valor denominatoris autem ibinde erit

$$= \pm \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots\ldots (n+1)}{(n+3)(n+5) \ldots\ldots (2n+1)} = \pm \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \ldots\ldots (n+1)(n+1)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \ldots\ldots (2n+1)}$$

adeoque coëfficiens quaeſitus

$$= \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \ldots\ldots n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \ldots\ldots (n+1)}\right)^2$$

21.

Functio integra ipſius u coëfficientes R, R', R'' etc. repraeſentans in eo quem hic tractamus caſu etiam independenter a methodo generali art. 11. erui poteſt ſequenti modo. Differentiando aequa-

aequationem

$$\varphi - \frac{U'}{U} = \frac{U''}{U}$$

ſubſtituendo dein $\frac{d\varphi}{du} = \frac{1}{1-uu}$, ac multiplicando per $UU(uu-1)$, obtinemus

$$(uu-1)\,U'\frac{dU}{du} - U\left(\frac{dU'}{du}.(uu-1)+U\right) = (uu-1)\,UU\,\frac{d\left(\frac{U''}{U}\right)}{du}$$

Termini huius aequationis ad laeuam manifeſto conſtituunt functionem integram ipſius u: neceſſario itaque in parte ad dextram coëfficientes poteſtatum ipſius u cum exponentibus negatiuis ſeſe deſtruere debent.

Sed $\frac{d\frac{U''}{U}}{du}$ producit ſeriem infinitam incipientem a termino

$$-\left(\frac{1.2.3.4\,\ldots\ldots\,(n+1)}{1.3.5.7\,\ldots\ldots\,(2n+1)}\right)^2 u^{-(2n+4)}$$

qua igitur per $(uu-1)UU$ *multiplicata* nihil aliud prodire poterit niſi quantitas conſtans

$$-\left(\frac{1.2.3.4\,\ldots\ldots\,(n+1)}{1.3.5.7\,\ldots\ldots\,(2n+1)}\right)^2$$

Hinc colligimus *)

$$(uu-1)\,U'\frac{dU}{du} + \left(\frac{1.2.3.4\,\ldots\ldots\,(n+1)}{1.3.5.7\,\ldots\ldots\,(2n+1)}\right)^2$$

diuiſibilem eſſe per U, quamobrem functioni fractae $\frac{U'}{\left(\frac{dU}{du}\right)}$, quae coëfficientes R, R', R'' etc. ſuggerit, aequiualebit functio integra

*) Simul hinc petitur demonſtratio, quod U cum $\frac{dU}{du}$ diuiſorem indeterminatum communem habere nequit, neque adeo aequatio $U=0$ radices *aequales*.

$$-\left(\frac{1.3.5.7\ldots\ldots(2n+1)}{1.2.3.4\ldots\ldots(n+1)}U'\right)^2.(uu-1)$$

Loco huius functionis, quae eſt ordinis $2n+2$, manifeſtoque ſolas poteſtates pares ipſius u implicat, adoptari poterit reſiduum ex eius diuiſione per U ortum, quod erit ordinis n, ſeu $n-1$, prout n par eſt ſeu impar. Si vero in caſu priori coëfficientem eum, qui reſpondet radici $u=0$, excludere malumus, loco illius functionis eius reſiduum ex diuiſione per $\frac{U}{u}$ ortum adoptabimus, quod tantummodo ad ordinem $n-2$ aſcendet.

22.

Vt praeſto ſint, quae ad applicationem methodi hucusque expoſitae requiruntur, adiungere viſum eſt, pro valoribus ſucceſſiuis numeri n, valores numericos tum quantitatum a, a', a'' etc., tum coëfficientium R, R', R'' etc. ad ſedecim figuras computatos, vna cum horum logarithmis ad decem figuras.

I. *Terminus vnus*, $n=0$.

$U=u$, $U'=1$, $T=t-\frac{1}{2}$, $T'=1$.

$a=0,5$

$R=1$

Correctio formulae integralis proxime $=\frac{1}{12}L''$.

II. *Termini duo*, $n=1$.

$U=uu-\frac{1}{2}$, $U'=u$

$T=tt-t+\frac{1}{6}$, $T'=t-\frac{1}{2}$

$a=0,2113248654\ 051871$

$a'=0,7886751345\ 948129$

$R=R'=\frac{1}{2}$.

Correctio proxime $=\frac{1}{180}L^{\mathrm{IV}}$

III. *Termini tres*, $n=2$.

$U=u^3-\frac{3}{5}u$, $U'=uu-\frac{4}{15}$

$T=t^3-\frac{3}{2}tt+\frac{3}{5}t-\frac{1}{20}$, $T'=tt-t+\frac{11}{60}$ $a=0,$

$a = 0,\ 1127016653\ 792583$

$a' = 0,\ 5$

$a'' = \overset{0}{\cancel{1}},\ 8872983346\ 207417$

$R = R' = \frac{5}{18}$

$R = \frac{4}{9}$

Correctio proxime $= \frac{1}{2800} L^{\mathrm{vi}}$.

IV. *Termini quatuor*, $n = 3$.

$U = u^4 - \frac{6}{7} uu + \frac{3}{35}$

$U' = u^3 - \frac{11}{21} u$

$T = t^4 - 2t^3 + \frac{9}{7} tt - \frac{2}{7} t + \frac{1}{70}$

$T' = t^3 - \frac{3}{2} tt + \frac{13}{21} t - \frac{5}{84}$

$a = 0,\ 0694318442\ 029754$

$a' = 0,\ 3300094782\ 075677$

$a'' = 0,\ 6699905217\ 924323$

$a''' = 0,\ 9305681557\ 970246$

$R = R''' = 0,\ 1739274225\ 687284$ log. $= 9,\ 2403680612$

$R' = R'' = 0,\ 3260725774\ 312716$ $\quad 9,\ 5133142764$

Horum coëfficientium expreſſio generalis $- \frac{35}{144} uu + \frac{17}{48}$

Correctio proxime $= \frac{1}{44100} L^{\mathrm{viii}}$

V. *Termini quinque*, $n = 4$.

$U = u^5 - \frac{10}{9} u^3 + \frac{5}{21} u$

$U' = u^4 - \frac{7}{9} uu + \frac{64}{945}$

$T = t^5 - \frac{5}{2} t^4 + \frac{20}{9} t^3 - \frac{5}{6} tt + \frac{5}{42} t - \frac{1}{252}$

$T' = t^4 - 2t^3 + \frac{47}{36} tt - \frac{11}{36} t + \frac{137}{75600}$

$a = 0,\ 0469100770\ 306680$

$a' = 0,\ 2307653449\ 471585$

$a'' = 0,\ 5$

$a''' = 0,\ 7692346550\ 528415$

$a^{\mathrm{iv}} = 0,\ 9530899229\ 693320$

$R = R^{\mathrm{iv}} = 0,\ 1184634425\ 280945$ log. $= 9,\ 0735843490$

$R' = R''' = 0,\ 2393143352\ 496832 \qquad 9,\ 3789687142$

$R'' = \frac{64}{225} = 0,\ 2844444444\ 444444 \qquad 9,\ 4539974559$

Expreſſio generalis horum coëfficientium, excluſo R'',

$$-\tfrac{91}{400}uu + \tfrac{1099}{3600}$$

Correctio proxime $= \frac{1}{698544}L^{x}$

VI. *Termini ſex*, $n = 5$.

$U = u^6 - \frac{15}{11}u^4 + \frac{5}{11}uu - \frac{5}{231}$

$U' = u^5 - \frac{34}{33}u^3 + \frac{1}{5}u$

$T = t^6 - 3t^5 + \frac{75}{22}t^4 - \frac{20}{11}t^3 + \frac{5}{11}tt - \frac{1}{22}t + \frac{1}{924}$

$T' = t^5 - \frac{5}{2}t^4 + \frac{74}{33}t^3 - \frac{19}{22}tt + \frac{29}{220}t - \frac{7}{1320}$

$a = 0,\ 0337652428\ 984240$

$a' = 0,\ 1693953067\ 668678$

$a'' = 0,\ 3806904069\ 584015$

$a''' = 0,\ 6193095930\ 415985$

$a^{\text{iv}} = 0,\ 8306046932\ 331322$

$a^{\text{v}} = 0,\ 9662347571\ 015760$

$R = R^{\text{v}} = 0,\ 0856622461\ 895852 \quad \log. = 8,\ 9327894580$

$R' = R^{\text{iv}} = 0,\ 1803807865\ 240693 \qquad 9,\ 2561902763$

$R'' = R''' = 0,\ 2339569672\ 863455 \qquad 9,\ 3691359831$

Coëfficientium expreſſio generalis

$$-\tfrac{77}{800}u^4 - \tfrac{7}{75}uu + \tfrac{23}{96}$$

Correctio proxime $= \frac{1}{11099088}L^{\text{xii}}$

VII. *Termini ſeptem*, $n = 6$.

$U = u^7 - \frac{21}{13}u^5 + \frac{105}{143}u^3 - \frac{35}{429}u$

$U' = u^6 - \frac{50}{39}u^4 + \frac{283}{715}uu - \frac{256}{15015}$

$T = t^7 - \frac{7}{2}t^6 + \frac{63}{13}t^5 - \frac{175}{52}t^4 + \frac{175}{143}t^3 - \frac{63}{286}tt + \frac{7}{429}t - \frac{1}{3432}$

$T' = t^6 - 3t^5 + \frac{535}{156}t^4 - \frac{145}{78}t^3 + \frac{1377}{2860}tt - \frac{223}{4290}t + \frac{323}{240240}$

$a = 0,\ 0254460438\ 286202$

$a' = 0,\ 1292344072\ 003028$

$a'' = 0,$

$a'' = 0,\ 2970774243\ 113015$

$a''' = 0,\ 5$

$a^{\mathrm{iv}} = 0,\ 7029225756\ 886985$

$a^{\mathrm{v}} = 0,\ 8707655927\ 996972$

$a^{\mathrm{vi}} = 0,\ 9745539561\ 713798$

$R = R^{\mathrm{vi}} = 0,\ 0647424830\ 844348$	log. =	$8,\ 8111893529$
$R' = R^{\mathrm{v}} = 0,\ 1398526957\ 446384$		$9,\ 1456708421$
$R'' = R^{\mathrm{iv}} = 0,\ 1909150252\ 525595$		$9,\ 2808401093$
$R''' = \frac{256}{1225} = 0,\ 2089795918\ 367347$		$9,\ 3201038766$

Horum coëfficientium, R''' exclufo, expreffio generalis

$$-\tfrac{1859}{10800}u^4 - \tfrac{1573}{29400}uu + \tfrac{7947}{39200}$$

Correctio proxime $= \frac{1}{1766079366}L^{\mathrm{xiv}}$

23.

Coronidis loco methodi noftrae efficaciam ab oculos ponemus computando valorem integralis

$$\int \frac{dx}{\log x}$$

ab $x = 100\,000$ vsque ad $x = 200\,000$.

I. Ex termino vno habemus $\Delta RA = 8390,394608$

II. Ex terminis duobus fit . . $\begin{cases} \Delta RA = 4271,810097 \\ \Delta R'A' = 4134,144502 \\ \text{Summa} = 8405,954599 \end{cases}$

III. Ex terminis tribus . . . . $\begin{cases} \Delta RA = 2390,672772 \\ \Delta R'A' = 3729,064270 \\ \Delta R''A'' = 2286,599733 \\ \text{Summa} = 8406,236775 \end{cases}$

IV. Ex terminis quatuor . . . $\begin{cases} \Delta RA = 1501,957053 \\ \Delta R'A' = 2763,769240 \\ \Delta R''A'' = 2711,454637 \\ \Delta R'''A''' = 1429,062040 \\ \text{Summa} = 8406,242970 \end{cases}$

V.

V. Ex terminis quinque . . .
$$\left\{\begin{array}{lcr} \Delta RA & = & 1024,879445 \\ \Delta R'A' & = & 2041,833335 \\ \Delta R''A'' & = & 2386,601133 \\ \Delta R'''A''' & = & 1980,509616 \\ \Delta R^{\mathrm{IV}}A^{\mathrm{IV}} & = & 972,419588 \\ \hline \text{Summa} & = & 8406,243117 \end{array}\right.$$

VI. Ex terminis sex . . . . . .
$$\left\{\begin{array}{lcr} \Delta RA & = & 741,912854 \\ \Delta R'A' & = & 1545,757256 \\ \Delta R''A'' & = & 1976,737668 \\ \Delta R'''A''' & = & 1950,466223 \\ \Delta R^{\mathrm{IV}}A^{\mathrm{IV}} & = & 1488,588550 \\ \Delta R^{\mathrm{V}}A^{\mathrm{V}} & = & 702,780570 \\ \hline \text{Summa} & = & 8406,243121 \end{array}\right.$$

VII. Ex terminis septem . . .
$$\left\{\begin{array}{lcr} \Delta RA & = & 561,1213804 \\ \Delta R'A' & = & 1202,0551998 \\ \Delta R''A'' & = & 1621,6290819 \\ \Delta R'''A''' & = & 1753,4212406 \\ \Delta R^{\mathrm{IV}}A^{\mathrm{IV}} & = & 1584,9790252 \\ \Delta R^{\mathrm{V}}A^{\mathrm{V}} & = & 1152,0681116 \\ \Delta R^{\mathrm{VI}}A^{\mathrm{VI}} & = & 530,9690816 \\ \hline \text{Summa} & = & 8406,2431211 \end{array}\right.$$

E calculis clar. Bessel valor eiusdem integralis inuentus est $= 8406,24312$.

DE

APPARENTIIS COLORVM, A POLARITATE LVMINIS PENDENTIBVS

COMMENTATIO

RECITATA IN CONSESSV SOC. REG. SCIENT.

DIE XIV. OCTOBR. MDCCCXV.

A

IO. TOBIA MAYER.

§. I.

1. Si iam in praecedenti quadam praelectione, Sodales, memorabiles quasdam luminis reflexi proprietates Vobis exposui, easque ex polaritate quadam, quae particulis fluidi huius subtilissimi necessario tribuenda sit, haud aegre deduxi, noua iam ab illo tempore innotuerunt Phaenomena, quae, licet quam maxime complicata et curiosa cuilibet videri possint, nihilo minus tamen ex nostra theoria quam liberrime profluant, dummodo lubeat polis certarum quarundam particularum luminis peculiarem adhuc attractionem ad particulas corporum quorundam crystallisatorum adscribere, qua effici possit, vt si hae vel illae particulae luminis, per reflexionem aliquam iam polarisatae, per eiusmodi corpora transeant, adeo axes seu aequatores illarum, a pristino, quem habebant situ, plus minusve dimoueantur.

 2. Ex

2. Ex phaenomenis ſcilicet Cryſtalli Islandici iam nouimus, non omnes radios luminis per eiusmodi Cryſtallum transeuntes, a directione qua incidunt, aequali modo deflecti, ſed dari radios ſeu particulas quasdam luminis, quae in illo corpore, vulgari modo refranguntur, alias contra, quae refractionem inſolitam patiuntur.

3. Si iam attractio cauſa refractionis eſt, vti non licet dubitare, patet quoque, non omnes particulas luminis in Cryſtallum illum incidentes, aequalem attractionem ad corporis huius pellucidi maſſam perpeti poſſe, cum ſi haec attractio verſus omnes particulas prorſus eſſet aequalis, refractio quoque illarum una eademque eſſe deberet. Dantur igitur particulae luminis quae fortius attrahuntur, aliae, in quas maſſa Cryſtalli debilius agit.

4. Si lumen illud examinamus, quod in Cryſtallo refractionem ſolitam ſubit, illud prorſus conuenit cum illo, quod a tabula quadam vitrea reflectitur, dum incidit ſub angulo illo cognito (graduum 35 circiter) ſub quo polariſatur, h. e. particulae luminis quae *illam refractionem ſolitam perpetiuntur* prorſus ſeſe habent, quam illae, quae in tabulam dictam aequatorice inciderent, adeoque ab illa reflecterentur, dum contra, illae particulae, quae refractionem inſolitam ſubeunt, pro illis ſunt habendae, quae cum polis ſuis inciderent, adeoque ob peculiarem adfinitatem ſeu attractionem, quae inter hoſce polos et materiam Cryſtalli obtinet, aliter refrangi debent, quam illae quae cum aequatoribus ſuis inciderent.

5. Igitur per refractionem luminis in Cryſtallo Islandico, illae particulae luminis, quae incidentiam polarem habent, quaſi ſegregantur ab illis, quae habent aequatorialem, ſicut ope prismatis vitrei illa ſpecies luminis, quae minorem habet refrangibilitatem, ſponte ſeſe disiungit ab illa, quae gaudet maiori.

6. Ita

6. Ita quoque lumen, quod exit ex Cryſtallo, in duos eiusmodi faſciculos diuiditur, quorum alter conſtat ex radiis, polariter egredientibus, alter ex radiis qui exeunt aequatorialiter, plano refractionis exiſtente parallelo ſectioni principali Cryſtalli. Priori caſu axes particularum luminis, poſteriori vero aequatores illarum, cum plano refractionis coiincidunt.

§. II.

1. Cum igitur iam phaenomena Cryſtalli Islandici, et complurium aliorum corporum cryſtalliſatorum, nos cogant aſſumere, non omnes particulas luminis actioni corporis eiusmodi aequaliter eſſe ſubiectas, atque cauſam huius actionis diuerſae tam quaerendam eſſe in peculiari quadam conſtitutione interna corporis eiusmodi, quam in luminis particulis ipſis, quarum aliquae ab illa conſtitutione interna magis adficiuntur, quam aliae, ita ſimili modo ex apparentiis quibusdam colorum, qui ſeſe exhibent, dum lumen iam polariſatum per tenues lamellas corporum cryſtalliſatorum transit, atque dein a ſpeculo quodam nigro ad oculum reflectitur, tuto nobis licet concludere, dari attractiones in eiusmodi lamellis, quibus adeo axes ſeu aequatores certarum quarundam particularum luminis, antequam exeunt ex tali lamella, e ſitu ſuo reſpectu plani incidentiae ſeu refractionis dimoueantur, atque hanc ſitus mutationem pro certis quibusdam particulis coloratis luminis albi, ita eſſe comparatam, vt ſi a dicto ſpeculo excipiantur, in certis quibusdam poſitionibus eius, polariter in illud incidant, adeoque abſorbeantur, dum omnes reliquae particulae ſub eadem poſitione ſpeciali maneant aequatoriales adeoque reflecti debeant.

2. Hoc igitur caſu lamella colore quodam tincta apparebit, oculo ante ſpeculum conſtituto, eo ſcilicet colore, quo oculus per

 ſolos

ſolos illos radios reflexos adficeretur, dum altera pars colorata luminis albi, a ſpeculo abſorbebatur.

§. III.

1. Cum ſcilicet iuxta conſenſum omnium experimentorum lumen album haberi debeat pro fluido ſubtili, quod ex variis particulis ſeu radiis heterogeneis, quos coloratos vocamus, compoſitum ſit, fieri omnino poteſt, vt hae particulae a corporis cuiusdam habitu interno, viribus quoque ſeu adfinitatibus admodum diuerſis adficiantur, ita, ut ſi per corpus eiusmodi tranſierunt, pars quaedam luminis transmiſſi, modificationibus praedita eſſe poſſit, quibus reliqua pars prorſus ſit deſtituta.

2. Neſcimus quidem in quo conſiſtat illud diſcrimen inter particulas illas luminis, quas coloratas dicimus, ſed ex phaenomenis ipſis diuerſae refrangibilitatis harum particularum, ad earum diuerſam naturam recte concludimus. Fieri quidem poſſet, vt forſan diſcrepent inter ſe, ratione tantum magnitudinis ſeu figurae, vel vt non omnes vna eademque celeritate moueantur. Interim ex compluribus phaenomenis mihi potius arridet illorum ſententia, qui particulis luminis internam ſeu chemicam quandam diuerſitatem ineſſe ſtatuunt. Ope prismatis hae particulae heterogeneae luminis albi incidentis, pro diuerſa illarum refrangibilitate, cognito more a ſe inuicem ſeparari poſſunt.

3. Inter has igitur dantur aliquae, quae, dum ſeparatim ab aliis oculum adficiunt, illam ſenſationem excitant, quam colorem rubrum vocamus. Aliae, a prioribus diuerſae, organum oculi aliter quoque adficiunt, aliusque coloris ſenſum efficiunt. De hiſce coloribus loqui ſaepe ſolemus, ac ſi lumini ipſo ineſſent, cum tamen non niſi ad ſenſationes illas referri debeant.

debeant. Interim a vulgari illo modo loquendi, quod ſc. lumen album ex radiis rubris, flauis, ceruleis aliisque compoſitum eſſe dicamus, ſub ſignificatione allata nolumus recedere, lumenque album hoc reſpectu ipſum duntaxat conſideramus, tanquam ſenſationem ex omnibus illis, quas radii colorati ſeorſim efficerent, compoſitam.

§. IV.

1. Iam ex diuerſa hac natura et indole particularum luminis, hunc vel illum colorem conſtituentium, haud aegre licet perſpici, dari poſſe corpora, quae pro ratione habitus ſui interni, et in polaritatem dictarum particularum plus minusue agant, aliter e. gr. in polos particularum radii rubri, quam in polos viridis, violacei, aliusque generis luminis, atque hoc experientia ipſa euidentiſſime comprobat.

2. Cogitemus ſc. faſciculum quendam luminis per reflexionem a tabula quadam vitrea ita polariſatum, vt ſimul iuxta directionem verticalem incidat in ſpeculum nigrum tabulae illi vitreae parallelum, ita vero mobile circa axem aliquem verticalem, vt radii incidentes dicti faſciculi cum plano huius ſpeculi eundem ſemper angulum conſtituant, quomodocunque planum dictum ex ſitu illo parallelo dimoueatur, et verſus hanc vel illam plagam mundi dirigatur.

3. His poſitis, ex experimentis in priori mea commentatione exhibitis *a*) patet, caſu, quo ſpeculum dictum tabulae vitrae parallelum eſt, omnes fere particulas luminis, ab hac tabula reflexas aequatorice pertingere in ſpeculum ſubditum, adeo ab hoc ſpeculo reflexionem paſſuras eſſe.

 4. Hoc

a) Vid. Comment. prior de polaritate luminis in Commentationibus Soc. Regiae ſc. ad ann. 1811-1813. ibid. (§. XIV. XVII. XVIII. ſq.)

4. Hoc caſu aequatores harum particularum congruunt cum plano incidentiae ſeu reflexionis tam a tabula illa vitrea quam a ſpeculo dicto, et ſi hocce planum breuitatis gratia vocemus *planum meridiei*, ſuperficiem ſpeculi verſus meridiem ſpectare dicimus (l. c. §. VII. 5. §. IX.)

5. Iam ſpeculum hoc circa axem ſuum verticalem moueatur, ita vt planum eius ſpectet verſus Orientem vel Occidentem vel verſus aliam quandam plagam mundi, tunc patet ex principiis ſupra expoſitis (l. c. §. XVIII. 32.) intenſitatem luminis a ſpeculo ad oculum reflexi, maximam eſſe, ſi ſuperficies ſpeculi ad meridiem vel ſeptentrionem ſpectet, minimam vero, ſi ſpectet vel verſus Orientem vel Occidentem, in aliis vero poſitionibus ſpeculi, intenſitatem luminis ab illo reflexi proxime eſſe in ratione quadrati coſinus anguli azimuthalis, ſub quo ſpeculnm a ſitu eius initiali, quo vergebat ad meridiem, circumactum eſt.

§. V.

6. Iam ante quam faſciculus dictus verticalis luminis polariſati, in hoc ſpeculum incidit, transire eum iubeamus per lamellam aliquam tenuem, aequaliter craſſam, et pellucidam Vitri Moſcovitici, ſeu micae membranaceae *b*) glaciei Mariae *c*) ſimiliumque corporum cryſtalliſatorum, et lamella haec ſitum horizontalem habeat. Hoc caſu lumen per micae lamellam transmiſſum, et a ſpeculo ſubdito ad oculum reflexum, pro variis poſitionibus ſpeculi, non amplius album ſed coloratum apparebit, et colores quos lamella oſtendit in hac vel illa poſitione ſpeculi, ita ſunt comparati, vt exinde liceat concludere, *certas quasdas particulas coloratas luminis albi in ſpeculum incidentis,*

b) Mica lamellis diaphanis latis tenuiſſimis flexilibus; Mica membranacea pellucidiſſima, flexilis, alba. *Wall.*

c) Gypſum lamellare pellucidum, lamellis rhomboidalibus. *Wallerius.*

cidentis, dum tranſierunt per lamellam dictam, ſubiiſſe variationem aliquam reſpectu ſitus aequatorum ſuorum, ita vt ſi aequatores harum particularum antea cum plano meridiei coincidisſent (Comm. I. §. XVII. 9.) *illi poſt transitum per dictam lamellam, iam angulum aliquem cum plano meridiei ſaciant, prorſus ac ſi axes ſeu poli harum particularum quaſi attractionem aliquam perpendicularem ad directionem ſeu lineam quandam determinatam, in ſuperficie huius lamellae ductam, perpeſſi eſſent, qua aequatores dicti ex plano meridiei demoti fuiſſent, dum contra axes ſeu aequatores omnium reliquarum particularum luminis per lamellam transmiſſi, ſitum immutatum in plano meridiei retinuerunt.*

§. VI.

1. Illam portionem coloratam luminis albi, quae in transitu per dictam lamellam, variationem modo explicatam ſubiit, brevitatis gratia littera A denotabo, illa vero, quae nullam variationem ſubiit, deſignetur per B, ita, vt A et B duos quosdam colores ſignificent, qui ſe inuicem quaſi compleant ad lumen album, quod transiit per dictam lamellam.

2. Cogitemus iam per quoduis punctum lamellae, in quod particula quaedam ipſius A vel B incidit, lineam rectam, directioni meridiei, de qua modo dixi, parallelam, atque per idem punctum ducatur parallela lineae illi determinatae (§. V.) ad quam axes particularum ipſius A, ob attractionem ſupra memoratam perpendiculariter ſeſe dirigunt, hae duae lineae angulum aliquem conſtituent, quem vocabo $= \alpha$.

3. Axes particularum ipſius B ad lineas illas meridianas (2) perpendiculariter inſiſtent, axes vero particularum ipſius A angulos rectos faciunt cum lineis, quae cum recta illa determinata (§. V.) parallelismum tenent.

§. VII.

§. VII.

1. Hiſce praemiſſis, ſpeculum, in quod incidunt A et B, primo ſpectet verſus meridiem, iuxta quem particulae ipſius B aequatorialiter incidunt. (§. VI. 3.)

2. In hoc ſitu ſpeculi ab illo reflectuntur hae particulae B.

3. Circumacto dein ſpeculo, vsque dum quadrantem gyrationis totius verſus Orientem vel Occidentem abſoluit, ita vt particulae ipſius B iam polariter incidant (Comm. I. §. XVII. 12.) in hoc ſitu ſpeculi iam abſorbebuntur, et non niſi pars quaedam radiorum ipſius A oculum adficere poteſt.

4. Iam ſpeculum vlterius circumagatur vsque dum diſtet quadrante gyrationis a linea illa determinata, iuxta quam particulae ipſius A aequatorice incidere ſunt intelligendae (§. VI. 2.), atque patebit, iam abſorberi a ſpeculo omnes particulas ipſius A, et non niſi partem quandam ipſius B oculo ſe exhibituram eſſe.

5. Priori caſu (3) lamella tincta apparebit colore A; poſteriori autem (4) colore B.

6. Ex hac theoria admodum ſimplici, formula quaedam deduci poteſt, quis color oculo ſeſe exhibiturus ſit, ſub quacunque alia poſitione ſpeculi, dummodo perpendamus, intenſitatem luminis B a ſpeculo reflexi decreſcere in ratione quadrati coſinus anguli azimuthalis (§. IV. 5.) ſub quo ſpeculum reſpectu lineae meridianae conuerſum eſt, ſimilemque proportionem locum habere pro intenſitate luminis A, ſi azimuthum ſpeculi computemus a linea illa determinata iuxta quam aequatores particularum ipſius A ſitum parallelum nacti ſunt. (§. VI.) Atque haec formula ita eſt comparata, vt omnibus phaenomenis exactiſſime ſatisfaciat, adeoque viciſſim per hunc conſenſum principia ipſa confirmet, ex quibus illa deducta eſt.

§. VIII.

§. VIII.

1. Vt vero haec omnia adhuc magis illustrentur, sit Y (Fig. I.) tabula illa vitrea de qua in priori nostra Commentatione §. IV seq. locuti sumus, et Z speculum illud nigrum, circa axem verticalem versatile, in quod radii per reflexionem a plano ipsius Y polarisati e. gr. wz, iuxta directionem verticalem incidant, sub eodem angulo sub quo radii luminis e. gr. diurni in Y incidentes Sw, per reflexionem iuxta dictam directionem wz polarisati erant, et esse debebit angulus incidentiae ipsorum Sw in Y, et reflexorum wz in Z $= 35° 25'$ circiter.

2. Planum verticale inter radios Sw et wz comprehensum, planum meridiei vocabo. (§. IV. 4.)

3. Casu iam, quo speculum Z tabulae vitrae Y parallelum est, radii wz a Z reflectentur ad oculum O, iuxta directionem zO, ita vt quoque planum wZO cum illo meridiei Swz congruat.

4. Planum ipsius Z hoc casu plano meridiei erit normale, quare speculum Z iam versus meridiem spectare dicimus, et idem valebit, plano ipsius Z circa axem verticalem ru acto, vsque dum dimidium gyrationis integrae absoluit.

5. In hisce positionibus ipsius Z, particulae luminis iuxta directionem wz aequatorialiter in Z incidunt, adeoque reflectuntur. Exiguam illam partem radiorum wz, quae polariter incideret (Comm. I. §. XVIII. 20.) hic non in computam duco.

6. Casu quo superficies speculi Z spectat vel versus Orientem vel Occidentem (absoluto sc. duntaxat quadrante gyrationis integrae) planum wzO plano meridiei Swz ad angulum rectum insistit, et particulae luminis quae antea (5) ad speculum Z aequatorialiter pertingebant, iam ipsi polos suos obuertent, adeoque ab illo absorbebuntur.

7. In poſitionibus intermediis ipſius Z, quantitas luminis a Z reflexi eſt in ratione quadrati coſinus anguli azimuthalis $= \varphi$ quo ſpeculum Z a prima eius poſitione verſus meridiem (4) circum actum eſt h. e. ſi quantitas ſeu intenſitas luminis polariſati wz aequatorialiter ab Y reflexi deſignetur per $\mathfrak{l}'$ (Comm. I. §. XVIII. 22.) erit quantitas huius luminis a Z reflexi $W = \mathfrak{l}' \cos \varphi^2$, atque hoc ex eo colligi poteſt, quod haec quantitas ſeu intenſitas W eadem eſſe debeat, ſiue angulus φ ſit poſitiuus ſiue negatiuus h. e. ſiue planum ſpeculi ſub aequali azimutho verſus plagam orientalem ſiue occidentalem circumagatur, et poſito $\varphi = + 90^\circ$ ſeu $\varphi = - 90^\circ$ iuxta principia hactenus allata (6) omne fere lumen a ſpeculo abſorberi debeat. Comm. I. §. XVIII. 33.

8. Accuratior quidem formula tradita eſt in Commentatione priori §. XIX. ſi ſcilicet lubeat quoque reſpicere ad eam portionem luminis $\mathfrak{l}'$ aequatorice in Z incidentis, quae a Z abſorberi poſſet, ſimiliterque ad illam, quae ab Y polariter ad Z pertingere et a Z forſan reflecti poſſet, h. e. ſi in illa formula omnes omnino terminos in computum ducere placeat. Cum vero a lumine illo, quod aequatorialiter *in Z incidit, exigua* duntaxat quantitas abſorbeatur, ſimiliterque admodum parua ſit illa quantitas luminis polariter in Z incidentis, quae reflexionem patiatur l. c. §. XVIII. 34. in formula l. c. tradita valor ipſius m proxime poni poteſt $= 1000$ et $n = 0$, adeoque $M = 0$ et $N = 1000$, vnde fieret ſimpliciter $W = \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) L \cos \varphi^2$, vbi $\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) L$ deſignat eam quantitatem luminis ab Y aequatorialiter reflexi, quam per $\mathfrak{l}'$ deſignauimus. Formula igitur $W = \mathfrak{l}' \cos \varphi^2$ pro quantitate luminis a Z reflexi, exiſtente azimutho ſpeculi $= \varphi$, ſemper conſiderari poteſt veritati admodum proxima et ad disquiſitiones, quae ſequuntur, prorſus ſufficiens.

§. IX.

§. IX.

1. Iam ponamus, lumen polariſatum wz, antequam pertingit ad ſpeculum Z, transire per tenuem quandam lamellam micae ſeu vitri moſcovitici M (Fig. II.) directioni wz perpendicularem adeoque horizontalem.

2. Secet planum meridiei Swz (§. VIII. 2.) lamellam M in recta $\alpha\beta$, haec erit horizontalis, et lineam meridianam deſignabit, cum qua in plano lamellae alias rectas parallelas ductas eſſe concipiamus.

3. Si iam omnes particulae luminis albi polariſati $wz = \mathfrak{L}'$ prorſus homogeneae eſſent, illae quoque omnes in transitu per lamellam M aequaliter ab attractione eius adficerentur, adeoque oculus in quacunque poſitione ſpeculi Z non niſi lumen album, pro ratione anguli φ duntaxat plus minuſue intenſum, perciperet.

4. Cum vero lumen album $\mathfrak{L}'$ ex radiis heterogeneis coloratis compoſitum ſit, fieri poteſt vt in transitu eius per lamellam M, ob attractionem modo memoratam axes particularum certi cuiusdam generis radiorum coloratorum ipſius $\mathfrak{L}'$, adeoque et aequatores illarum alium ſitum nanciſcantur, quam axes et aequatores reliquarum particularum coloratarum ipſius $\mathfrak{L}'$ qui ab illa attractione non adficerentur.

Cogitemus duntaxat partem aliquam coloratam ipſius $\mathfrak{L}'$, quam vocabo $=$ B ſitum immutatum ſeruare, ita vt aequatores particularum ipſius B etiam tunc, cum transierunt per M, adhuc congruant vel parallelismum teneant cum plano Meridiei Swz, intenſitas huius luminis B a Z reflexi, ſub quolibet azimutho ſpeculi $= \varphi$, erit vt ſupra $= B \cos \varphi^2$, vbi igitur pro $\varphi = 0$, ſeu $\varphi = 180°$ valorem maximum $=$ B obtinebit.

5. Axes vero omnium reliquarum particularum ipſius $\mathfrak{L}'$, quarum quantitatem et colorem vocabo A, exiſtente $A = \mathfrak{L}' - B$, per attractionem dictam ex ſitu eorum priſtino dimoueantur.

 6. Po-

6. Ponamus, dum eiusmodi quaedam particula ipſius A tranſit per M, axem eius per attractionem quandam perpendiculariter dirigi ad lineam quandam rectam $\gamma\delta$ in ſuperficie huius lamellae ductam, vel ad rectam ipſi $\gamma\delta$ parallelam, ductam per punctum in quod incidit illa particula, atque axem dictum per hanc attractionem ex ſitu ſuo priſtino ipſi $\alpha\beta$ perpendiculari, peruenire in ſitum ipſi $\gamma\delta$ perpendicularem, adeoque dimoueri angulo illo $\beta c \delta = \alpha$ (§. VI. 2.) quem $\gamma\delta$ conſtituit cum $\alpha\beta$.

7. Hoc facto patebit, et aequatores omnium particularum ipſius A, poſtquam transierunt per M, non amplius parallelismum tenere poſſe cum meridiana $\alpha\beta$, ſed illos fieri parallelos cum recta $\gamma\delta$ ad quam axes particularum ipſius A dirigebantur.

8. Vt igitur hae particulae ipſius A iam aequatorialiter incidere poſſint in Z, neceſſe eſt, vt ſpeculum Z ex poſitione qua ſpectabat ad meridiem (§. VIII. 2.) ſimiliter dimoueatur angulo azimuthali $= \alpha$, ita vt perueniat in ſitum, quo iam planum verticale per $\gamma\delta$ poſitum ipſi inſiſtat perpendiculariter.

9. In hac poſitione ipſius Z intenſitas radiorum coloratorum ſeu luminis A in Z incidentis et a Z reflexi, per ipſam litteram A debet exprimi, cum hoc caſu valorem maximum obtineat, ſicut quantitas luminis B a Z reflexi eo caſu maximum habet valorem, quo planum meridiei S w z perpendiculare eſt plano ſpeculi. (4)

§. X.

1. Vt vero eo clarius loqui poſſimus de diuerſis poſitionibus azimuthalibus ſpeculi Z, reſpectu lineae meridianae, ſeu alius cuiusdam directionis in ſuperficie lamellae, repreſentet circulus (Fig. III.) lamellam hactenus conſideratam, $\alpha\beta$ (vt in Fig. II.) lineam meridianam iuxta ſenſum antea explicatum, et $\gamma\delta$ lineam illam, cui euadunt paralleli aequatores particularum

ipſius

ipſius A, cum exeunt ex lamella, dum aequatores particularum ipſius B manent paralleli lineae meridianae $\alpha\beta$ (§. IX. 4. 7.)

2. Caſu quo ſpeculum Z ſpectat verſus meridiem, eum repraeſentare poſſumus per lineam m n, ſeu $\mu\nu$, ipſi $\alpha\beta$ perpendicularem, vbi igitur m n, $\mu\nu$, quaſi denotabunt ſectiones plani huius ſpeculi cum plano horizontali lamellae, in quam lumen polariſatum Σ' iuxta directionem verticalem, in planum ſpeculi vero ſub angulo cognito $= 35° 28$ incidere eſt intelligendum.

3 Quatenus circumagendo ſpeculum circa axem ſuum verticalem, varias eius poſitiones verſus hanc vel illam plagam mundi, quaſi computemus a prima hac poſitione m n, ſub hac azimuthum eius vocemus $= 0$.

4. Tunc e. gr. ducta $\omega\varrho$ ipſi $\alpha\beta$ perpendiculari, poſitiones ſpeculi caſu quo vnum vel tres quadrantes gyrationis integrae abſolvit, adeoque vel verſus Orientem vel Occidentem ſpectat, repraeſentabuntur per rectas m′ n′, $\mu' \nu'$, ipſi $\omega\varrho$ perpendiculares. Hoc caſu Azimuthum ſpeculi, reſpectu ſitus eius initialis m n erit $\varphi = 90°$ ſeu $\varphi = 270°$.

5. Apud δ erit azimuthum ſpeculi ſeu $\varphi =$ angulo $\delta c \beta = \alpha$ (§. IX. 6.) apud λ erit illud $=$ angulo $\beta c \lambda$ atque ſic porro. Patet enim hoc caſu ſpeculum circumactum eſſe circa axem ſuum verticalem azimuthaliter angulo ipſi $\beta c \lambda$ aequali, ſicut lineae circulum apud β et λ tangentes reuera ſe quoque ſecarent ſub angulo ipſi $\beta c \lambda$ aequali.

6. Iam ex hactenus traditis liquet, intenſitatem luminis B a ſpeculo Z reflexi, dum habet ſitum apud λ, computandam eſſe iuxta azimuthum eius $\beta c \lambda = \varphi$ *reſpectu lineae meridianae* $\beta\alpha$, cum qua aequatores particularum ipſius B ſitum parallelum habent, intenſitatem vero luminis A a ſpeculo reflexi determinandam eſſe ex azimutho eius $\delta c \lambda$ reſpectu lineae illius $c\delta$,

 tanquam

tanquam meridianae, ad quam aequatores particularum ipſius A ſitum parallelum obtinuerunt. (§. IX. 7.)

7. Sicut igitur intenſitas luminis B a ſpeculo reflexi, dum habet azimuthum $\beta c \lambda = \varphi$, exprimitur per B $\cos \varphi^2$, ita intenſitas luminis A ab illo reflexi, dum habet ſitum apud λ, exprimenda erit per formulam A $\cos \psi^2$, exiſtente angulo $\delta c \lambda = \psi$.

8. Erit igitur intenſitas totalis luminis a ſpeculo reflexi dum habet ſitum apud $\lambda =$ B $\cos \varphi^2 +$ A $\cos. \psi^2$ h. e. ob $\psi = \varphi - \alpha$ (5.) erit haec intenſitas $\mathfrak{J} =$ B $\cos \varphi^2 +$ A $\cos (\varphi - \alpha)^2$.

9. Atque ita per methodum admodum claram formulam nacti ſumus, iuxta quam pro quocunque azimutho ſpeculi, a meridiano primo $\beta \alpha$ computato, non modo intenſitas luminis a ſpeculo reflexi, ſed quoque ſub quo colore ſeſe illud oculo repraeſentabit, reperiri liceat, dummodo ſciamus illam ſpeciem coloris, quam per litteram A deſignauimus, ex qua quoque innoteſcit illa B, quae cum A ſemper lumen album $\mathfrak{L}'$ conſtituit.

10. Similem formulam ſed ex experientia ſolum deductam, inuenit Cl. *Biot* Mem. de l'Inſtitut année 1811. Part. math. p. 149. dum inueſtigat, quinam termini formulae cuidem falſae a Cel. *Malus* datae, adhuc *adiiciendi* ſint, vt obſeruationibus ſatisfaciat. Haud abs re eſſe putaui, oſtendere, quomodo ex principiis a polaritate luminis petitis, iuxta ſenſum, quo illam in priori mea commentatione ſumſi, neceſſario conſequatur, ſi ipſis ſimul iungatur conſideratio heterogeneitatis particularum luminis coloratarum, qua fieri debet, vt non omnes a corporis cuiusdam conſtitutione interna aequali modo adficiantur, atque ſic axes particularum certi cuiusdam generis luminis colorati, tum transeunt per eiusmodi corpus, mutationem aliquam ſitus $= \alpha$ perpeti debeant.

11. Sub eodem colore $\mathfrak{J} =$ B $\cos \varphi^2 +$ A $\cos (\varphi - \alpha)^2$ lamella, per quam transiit lumen illud album $\mathfrak{L}'$, tincta apparebit oculo

oculo debite ante ſpeculum ita conſtituto, vt radii quos a lamella illa per reflexionem a ſpeculo accipit, ſimiliter angulum polariſationis $= 35°$ cum plano ſpeculi circiter conſtituant.

12. Cum experientia reſpectu diuerſorum colorum, ſub quibus lamella dicta pro variis valoribus ipſorum φ et α, oculo ſeſe exhibet, formulae inuentae ad amuſſin reſpondeat, patet et principia illa, e quibus deducta eſt, naturae eſſe conſentanea, adeoque lamellas tenues corporum cryſtalliſatorum reuera ita eſſe comparatas, vt ſi lumen polariſatum per illas transmittatur, axes certi cuiusdam generis radiorum luminis transmiſſi ad lineam aliquam rectam in ſuperficie illarum ductam (vel potius ad planum aliquod verticale iuxta illam lineam planum lamellae ſecans) perpendiculariter ſe dirigant, dum axes omnium reliquarum particularum luminis transmiſſi ſitum immutatum ſeruant. Quomodo vero id fiat, deinceps inueſtigabimus. Sed antequam vlterius progrediemur, neceſſe eſt, vt paucis deſcribamus apparatum, ope cuius formula inventa commode poſſit cum obſeruationibus ipſi comparari.

§. XI.

1. Requiritur ſcilicet vt non modo angulum azimuthalem φ, quo ſpeculum, a ſitu eius initiali (§. X. 2.) computando, quouis caſu circumactum eſt, ſed quoque azimuthum $\beta c \delta = \alpha$ lineae illius $\gamma\delta$ ad quam in ſuperficie lamellae axes particularum luminis A perpendiculariter ſeſe dirigunt, ea qua ſufficit exactitudine liceat determinare.

2. Quod primum attinet ad ſupellectilem pro menſuratione anguli φ, parti ſuperiori P fulcri cui innititur ſpeculum Z (vid. §. V. 2. Commentationis 1^{mae}) adiunxi Indicem horizontalem e (Fig. IV.) in plano quod ad ſuperficiem ſpeculi normale cogitetur.

3. Parti

3. Parti inferiori dicti fulcri per quam transit cochlea π' (comparentur ſemper inter ſe figurae huius et prioris commentationis) horizontaliter adfixus eſt diſcus circularis ligneus R, diametri quinque circiter pollicum, cuius peripheria a quinque ad quinque gradus diuiſa eſt, ita, vt ſi ſpeculum reſpiciat verſus meridiem, recta o w per 0° et 180° ducta, adeoque et index e ipſi imminens, ſimiliter verſus meridiem ſpectet. Soluta igitur cochlea π', circumagendoque ſpeculum, index e pro quolibet ſitu ſpeculi reſpectu plani meridiei o w, azimuthum eius $= \varphi$ ſuper diuiſionem ſubditam notabit. Gradus ſingulos, iuxta oculi iudicium determinaſſe ſufficit.

4. Quod vero ſpectat ad ſupellectilem, cui horizontaliter immittenda eſt lamella quaedam micae ſeu alius corporis cryſtalliſati, per quam radii polariſati transire debent, antequam pertingunt ad ſpeculum dictum, conſtat illa ex vitro tenui plano et polito, diametri aliquot pollicum, quod circumdatum eſt annulo orichalceo a b c d (Fig. V.) mobili intra alium annulum e f g h, cuius margo ſuperior in gradus ſingulos vel in quinos graduum diuiſus eſt.

5. Margini ſuperiori annuli a b c d apud c firmiter adfixus eſt index, cum hoc annulo ipſo mobilis, ſuper peripheriam diuiſam annuli exterioris e f g h. Apud e, a latere ipſius e f g h, firmiter exit bacillum orichalceum, quod vti videre eſt (Fig. VI.) ope cochleae firmari poteſt ad axem per fulcrum L M tabulae vitreae Y (Fig. II. Comment. I^{mae}) transmiſſum, vt haec ſupellex dum ſuper baſi ſua vitrea lamellam dictam recepit, non modo in ſitu horizontali, ſed, ſi placet, et in alio obliquo retineri poſſit. Diameter a c per initium diuiſionis tranſiens ſemper iacere debet in plano, tabulae vitreae Y normali, ſeu quod idem eſt, in plano meridiei.

6. Pa-

6. Patet igitur ope annuli abcd circa centrum ſuum mobilis, lamellam dictam baſi vitreae impoſitam, in proprio ſuo plano circumagi poſſe, et per arcum ab indice annuli abcd deſcriptum, cuiuscunque lineae in ſuperficie huius lamellae ductae motum azimuthalem reſpectu lineae meridianae determinari poſſe, quem in finem iuuat ſuper dicta baſi vitrea ipſam quandam meridianam duxiſſe, cui quolibet caſu haec vel illa linea in ſuperficie lamellae ducta, imponi poſſit.

§. XII.

Hiſce praemiſſis iam reſolui poteſt ſequens

Problema

Si per lamellam quandam micae ſeu alius corporis cryſtalliſati, baſi vitreae (XI. 6.) pro lubitu impoſitam, lumen a tabula vitrea Y polariſatum tranſeat, et in ſpeculum ſubditum Z incidat, a quo dein per reflexionem ad oculum peruenit, determinare poſitionem lineae illius (IX. 6.) ad quam axes particularum luminis colorati A (IX. 5.) perpendiculariter diriguntur h. e. angulum α.

Solutio. 1. Circumagatur ſpeculum Z e poſitione initiali, qua tabulae vitreae Y parallelum eſt, atque perueniet ad azimutha quaedam, ſub quibus lamella dicta omni prorſus colore deſtitutam h. e. albam, oculo ante ſpeculum conſtituto ſeſe praeſentabit.

2. Notetur iuxta methodum traditam azimuthum minimum ſpeculi, ſub quo lamella apparet clara ſeu alba, et erit angulus α duplum azimuthi obſeruati.

3. *Dem.* Iuxta formulam noſtram

$$\mathfrak{J} = B \cos\varphi^2 + A \cos(\varphi - \alpha)^2$$

lamella dicta apparebit alba, quocunque caſu, vbi eſt

$$\cos\varphi^2 = \cos(\varphi - \alpha)^2$$

tunc enim erit color lamellae ſeu

$$\mathfrak{J} = B \cos\varphi^2 + A \cos\varphi^2 = (B + A)\cos\varphi^2$$

Sed

Sed B + A nil ſignificat niſi lumen album, ergo et $(B+A) \cos \varphi^2$ eiusmodi lumen erit. Lamella igitur apparebit alba, et intenſitas huius albedinis per ipſam formulam inuentam $(B+A) \cos \varphi^2$ exprimetur.

4. Iam vero eſt, exiſtente $\cos \varphi^2 = \cos(\varphi - \alpha)^2$

$$\cos(\varphi - \alpha)^2 - \cos \varphi^2 = 0$$

h. e.

$$[\cos(\varphi - \alpha) + \cos \varphi]\,[\cos(\varphi - \alpha) - \cos \varphi] = 0$$

ſeu

$$2 \cos \frac{2\varphi - \alpha}{2} \cos \tfrac{1}{2}\alpha \,.\, 2 \operatorname{Sin} \frac{2\varphi - \alpha}{2} \,.\, \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}\alpha = 0$$

h. e.

$$\operatorname{Sin}(2\varphi - \alpha) \operatorname{Sin} \alpha = 0.$$

5. Vt igitur lamella appareat alba, quaecunque ſit poſitio lineae illius de qua problema noſtrum loquitur verſus lineam meridianam, h. e. quicunque ſit angulus α, eſſe debebit ſimpliciter

$$\operatorname{Sin}(2\varphi - \alpha) = 0$$

h. e. $2\varphi - \alpha = n.180^\circ$ exiſtente n numero quodam integro. Ergo

$$\varphi = n.\,90^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha$$

vbi pro

$n = 0$ erit $\varphi = \tfrac{1}{2}\alpha$

$n = 1$; $\varphi = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha$

$n = 2$; $\varphi = 180^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha$

$n = 3$; $\varphi = 270^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha$.

6. Cognito ergo azimutho minimo ſcilicet $\varphi = \tfrac{1}{2}\alpha$, ſub quō lamella apparet alba, etiam reliqua dantur azimutha, ſub quibus ſeſe ſiſtet albam.

7. Hoc azimuthum minimum $\varphi = \tfrac{1}{2}\alpha$ ex obſeruatione cognitum vocetur β, atque erit $\beta = \tfrac{1}{2}\alpha$ h. e. $\alpha = 2\beta$.

§. XIII.

§. XIII.

Obferuatio.

1. Si adhibeatur loco lamellae cuiusdam micae, tenuis lamella vitri Mariae, feu Gypfi fpathofi diaphani, admodum pellucida, in illa facile obferuantur fiffurae parallelae fubtiliffimae, per totam fuperficiem lamellae excurrentes ita, vt nifi lamella caute tractetur, illa quoque facile frangatur iuxta lineam eiusmodi parallelam. Cafu quo in problemate praecedenti lamella fefe oftendit albam, facile deprehendetur, fiffuras illas parallelas inclinatas effe ad lineam meridianam eodem angulo β, circa quem in dicto problemate fpeculum conuertebamus. Si enim fpeculum maneat in fitu modo inuento, h. e. in azimutho β, lamella vero dicta ex fitu fuo dimoueatur, vsque dum fiffurae eius congruant cum directione meridiei in *bafi vitrea* (§. XI. 6.) ducta, id quod haud difficile erit factu, neceffe erit, vt iam annulum abcd circa centrum agamus angulo $= \beta$, vt lamella rurfus in priftinum fitum, fub quo alba apparebat, reftituatur.
2. Item, fi lamella maneat in illo fitu, quo alba apparebat, annulus abcd vero circumagatur, vsque dum fiffurae dictae in plano meridiei appareant, index annuli arcum defcribet, azimutho fpeculi fupra memorato β aequalem.
3. Ex hac obferuatione licet fubfumi, etiam lamellas aliorum corporum cryftallifatorum, fi colores in lumine polarifato oftendunt, eiusmodi fiffuris effe praeditas, licet faepe tam exiles fint, vt vix animaduerti poffint e. gr. in lamellis micae aliisque fimilibus.

§. XIV.

Corollarium.

1. Directio igitur illa $\gamma\delta$ in fuperficie lamellae (Fig. II. vel III.) ad quam fefe perpendiculariter dirigunt axes particularum lumi-

 nis

nis colorati A (§. X.), cum linea meridiana $\alpha\beta$ femper conftituit angulum α duplum illius $= \beta$ quem directio fiffurarum dictarum cum linea meridiana faceret.

2. Si igitur lamella noftra ita ponatur fuper bafin vitream (§. XII.) vt directio fiffurarum fuarum faciat angulum quendam $= \beta$ cum linea meridiana, ob $\alpha = 2\beta$, fub quolibet azimutho fpeculi $= \varphi$, lamella tincta apparebit colore

$$\mathfrak{J} = B \cos \varphi^2 + A \cos(\varphi - 2\beta)^2.$$

3. Igitur pro $\varphi = \beta$; feu $90° + \beta$ feu $180° + \beta$ etc. lamella fefe oftendet in lumine albo $= (B + A) \cos. \varphi^2$; cuius intenfitas fubftituendo loco φ dictos valores, quocunque cafu determinari poteft.

§. XV.

Corollarium.

1. Ex hactenus traditis vix licet dubitari, actionem lamellae, qua axes particularum luminis colorati A, ex fitu fuo dimouentur, attractioni cuidam effe adfcribendam, quam hae particulae, feu potius earum poli ad fuperficiem internam fiffurarum dictarum patiuntur.

2. Cogitemus fcilicet particulam quandam polarifatam ipfius A, cuius poli fint p et π (Fig. VII.), iuxta directionem verticalem transire per duas eiusmodi fiffuras horizontales gd, ef infinite fibi proximas, quae lineam meridianam $\alpha\beta$ in fuperficie lamellae feu in bafi vitrea, cui incumbit, ductam, fub angulo $dgf = gfe = \beta$ fecent, atque facile perfpicietur, fi illi poli continue attrahantur ad fuperficiem internam fiffurarum dictarum, axem $p\pi$ illius particulae, lineae meridianae $\beta\alpha$ perpendicularem (§. X.) ex fitu fuo dimoueri, et quafi circa centrum fuum c gyraturum effe per totum illud temporis fpatiolum, quo particula illa per lamellae craffitudinem fertur, ita vt fi $p\pi$ fitum axis repraefentet, dum particula intrat in lamel-

lamellam, $p'\pi'$ vero situm eius dum exit ex lamella, hae duae lineae $p\pi$, $p'\pi'$, vel $c\pi$, $c\pi'$ angulos aequales constituent cum directione ct, ipsi fe vel dg perpendiculari.

3. Repraesentat scilicet πp quasi pendulum, quod circa suam centrum c gyratur, dum p et π continue attrahuntur ad superficiem internam fissurarum dg et ef, quae vis attrahens quasi comparari potest cum grauitate naturali, qua pendulum vulgare, ad superficiem terrae sollicitatur.

4. Si illud pendulum $p\pi$ seu $c\pi$ peruenit ex situ initiali in situm ct, ipsi ef perpendicularem, illud dimidium quasi oscillationis confecit, sicut pendulum vulgare eo momento, quo situm verticalem habet. Ex hoc situ dein rursus fertur in $c\pi'$, quo casu totam oscillationem absoluit, et ratione motus gyratorii pro momento quasi ad statum quietis peruenisse est censendum.

5. Cum vero particula luminis eo momento, quo lamellam deserit, ab illa attractione, libera euadat, axis eius quoque permanebit in situ $c\pi'$ seu $p'\pi'$, quem modo nactus est, atque sic illa particula cum situ variato axis sui ad speculum subditum fertur.

6. Iam facile liquet, angulum πct in triangulo rectangulo, quod nasceretur, prolongata $c\pi$ vsque ad fe, fore aequalem angulo cft in triangulo rectangulo cft, h. e. fore $\pi ct = gfe = \beta$, adeoque $\pi' c\pi = 2\beta$; h. e. axem particulae luminis dictae, adeoque et aequatorem eius, dum transiit per illam lamellam, dimotum esse angulo $\pi' c\pi = 2\beta$ duplo illius quem fissurae dictae gd vel fe cum linea meridiana facerent, seu quod idem est, axis particulae luminis dum exit ex lamella, quasi perpendiculariter dirigitur ad lineam rectam $\gamma\delta$, quae cum meridiana $\beta\alpha$ constituit angulum α seu $\gamma c \alpha = \delta c f = 90^\circ - f c\pi' = \pi' c\pi = 2\beta$ vt supra diximus.

§. XVI.

1. Sufficit hic paucis duntaxat indigitasse, quomodo axes adeoque et aequatores particularum certi cuiusdam generis luminis,

 dum

dum transeunt per corpora peculiaris cuiusdam constitutionis internae (e. gr. fissurarum dictarum) qua poli illarum particularum vi quadam attractiua afficiuntur, vario modo ex situ suo possint dimoueri, dum axes aliarum particularum luminis e. gr. ipsius B, quae nullis eiusmodi attractionibus obediunt, situm inuariatum seruant.

2. Interim patet formulas inuentas (§. XII.) locum habere, quomodocunque etiam comparata sit constitutio illa interna, qua axes particularum certi cuiusdam generis luminis colorati ex situ suo initiali, quo incidunt, dimouentur, dummodo omnes aequalem situs mutationem patiuntur, quod pro particulis vnius eiusdemque generis semper assumi licet, cum nulla adsit ratio, cur eiusmodi quaedam particula ab illa constitutione interna aliter adficeretur, quam alia, adeoque angulus α non pro omnibus particulis vnus idemque sit. Ita semper pro azimutho quodam speculi hae particulae ob incidentiam aequatorialem ad oculum reflecti possunt, dum particulae alius cuiusdam generis luminis incidentis sub eodem azimutho polariter incidant, adeoque a speculo absorberi debeant. Cognito dein per *experientiam azimutho* minimo speculi $= \beta$, sub quo color albus sese oculo sistit, per formulam superius traditam, pro quocunque alio azimutho speculi $= \varphi$, reperiri potest, quis color oculo sese repraesentaturus sit, cognito duntaxat eo genere luminis colorati, quod per A designauimus, cum B semper complementum faciat ipsius A ad lumen album. Hinc vtile erit sequens

§. XVII.

Problema.

Cognito per experientiam speculi azimutho minimo $= \beta$ sub quo lamella (§. XII.) alba apparet, reperire azimuthum speculi, sub quo lamella vel solo colore A, vel solo B tincta apparebit.

Solutio

Solutio. 1. Vt ſolo colore B tinctam ſeſe exhibeat, in formula ſupra inuenta eſſe debebit $\cos(\varphi - 2\beta)^2 = 0$; h. e. $\varphi - 2\beta =$ multiplo impari quadrantis. Cum igitur $2n + 1$ numerum imparem deſignet, eſſe debebit

$$\varphi - 2\beta = (2n + 1)\, 90^\circ$$

ſiue

$$\varphi = (2n + 1)\, 90^\circ + 2\beta$$

vbi ſuperfluum eſt $2n + 1$ maiorem ſumere ternario.

Igitur azimuthum quaeſitum erit vel

$$\varphi = 90^\circ + 2\beta$$

vel $\varphi = 270^\circ + 2\beta$.

Et intenſitas coloris B, ſub quo ſeſe lamella oſtendit, erit

$$\mathfrak{I} = B \cos\varphi^2 = B \operatorname{Sin} 2\beta^2.$$

2. Vt lamella duntaxat appareat ſub colore A, eſſe debebit iuxta formulam noſtram $\cos\varphi^2 = 0$, ergo

$$\varphi = (2n + 1)\, 90^\circ \quad \text{h. e.}$$

$$\varphi = 90^\circ$$

vel $\varphi = 270^\circ$.

Et intenſitas coloris A oculo ſeſe exhibens erit

$$\mathfrak{I} = A \cos(90^\circ - 2\beta)^2$$
$$= A \cos(270^\circ - 2\beta)^2$$
$$= A \operatorname{Sin} 2\beta^2.$$

3. Bini valores inuenti $B \operatorname{Sin} 2\beta^2$ et $A \operatorname{Sin} 2\beta^2$, ſummam $(B + A) \operatorname{Sin} 2\beta^2$ conſtituunt, vbi $B + A$ nil niſi lumen album deſignat.

4. Si igitur ſpeculum iuxta azimutha inuenta collocetur, experientia docebit, cuiusnam generis luminis colorati futuri ſint A vel B.

§. XVIII.

Scholion.

1. Ea, quae hiſce Problematibus expoſita ſunt, vno obtutu exhibetur in (Fig. VIII.) vbi circulus $A\alpha A'\beta$ repraeſentat peripheriam lamellae, quam ſimplicitatis gratia hic circularem aſſumo, vt azimutha ſpeculi eo melius in illa denotari poſſint.

ſint. $\beta\alpha$, vt hactenus, lineam meridianam repraeſentat, et $\beta c a$ azimuthum minimum ſpeculi $= \beta$, ſub quo lamella apparet alba, quemadmodum id in hac ipſa directione notatum eſt.

2. Sumto azimutho $\beta c A$, ſeu arcu $\beta A = 90^\circ$, ſimiliterque arcu $\beta A \alpha A' = 270^\circ$, haec azimutha ſunt illa ſub quibus lamella tincta apparet colore A (§. XVII. 2.)
3. Sit angulus $\beta c \delta = \alpha = 2\beta$ et diameter BB' ipſi $\gamma\delta$ perpendicularis, erit et angulus $BcA = B'cA' = 2\beta$, adeoque azimuthum ſeu arcus $\beta AB = 90^\circ + 2\beta$; et $\beta A \gamma B' = 270^\circ + 2\beta$; h. e. puncta B et B′ reſpondebunt azimuthis, ſub quibus lamella duntaxat apparebit tincta colore B (§. XVII. 1.)
4. Ducto denique diametro $a'a'''$ ipſi aa'' perpendiculari, erunt azimutha punctorum a, a', a'', a''' iuxta ordinem β; $90^\circ + \beta$; $180^\circ + \beta$; $270^\circ + \beta$ adeoque illa azimutha ſub quibus lamella ſeſe ſiſtit albam, (§. XIV.) vbi pro azimuthis β et $180^\circ + \beta$ intenſitas huius albedinis exprimetur per $(B + A) \cos\beta^2$, pro azimuthis vero $90^\circ + \beta$ et $270^\circ + \beta$ per $(B + A) \sin\beta^2$ (§. XIV. 3.)
5. Sub omnibus reliquis azimuthis color ſub quo lamella ſeſe exhibet, ex coloribus *B* et *A* compoſitus eſt iuxta proportionem, quae datur per formulam

$$\mathfrak{I} = B \cos\varphi^2 + A \cos(\varphi - \alpha)^2$$

ſeu

$$\mathfrak{I} = B \cos\varphi^2 + A \cos(\varphi - 2\beta)^2.$$

§. XIX.

Corollarium.

Exiſtente in hiſce formulis β ſeu $\frac{1}{2}\alpha = 0$, h. e. collocata lamella ita ſuper baſi ſua vitrea, vt diameter aa''' coincidat cum linea meridiana $\beta\alpha$, illa non modo ſub azimutho $\varphi = \beta = 0$, ſed quoque ſub omnibus aliis azimuthis ſpeculi, alba apparebit. Idem valebit, ſi fuerit $\beta = 90^\circ$, ſiue 180° ſiue 270°. Nam pro omnibus hiſce caſibus habemus

$$\mathfrak{I} = B \cos\varphi^2 + A \cos\varphi^2 \text{ (§. XVIII. 6.)}$$
$$= (B + A) \cos\varphi^2$$

quod

quod femper lumen album fignificat, quae vero albedo pro $\varphi = o$, feu $\varphi = 180°$ valorem maximum $= B + A$, pro $\varphi = 90°$ feu $\varphi = 270°$ valorem minimum $= o$ adipifcitur, ita vt lamella pofterioribus binis cafibus obfcura feu nigra apparitura fit.

§. XX.

Corollarium.

1. Exiftente in formula generali

$$\mathfrak{J} = B \cos \varphi^2 + A \cos (\varphi - 2\beta)^2$$

azimutho $\varphi = o$; h. e. pofito fpeculo ita vt verfus meridiem fpectet, erit

$$\mathfrak{J} = B + A \cos 2\beta^2.$$

Si iam fub hoc azimutho fpeculi $\varphi = o$, fola lamella circumagatur, illa apparebit pro variis pofitionibus lineae a a'' [h. e. directionis fiffurarum fupra (§. XIII.) dictarum] verfus lineam meridianam, feu quod idem eft, pro variis valoribus ipfius β, fequenti modo colorata

pro $\beta = o$; alba
$\beta = 45°$; tincta colore B
$\beta = 90°$; alba
$\beta = 90° + 45°$; *tincta colore B*
$\beta = 180°$; alba.

atque fic porro.

Haec omnia cum obferuationibus exactiffime congruunt.

2. Eodem modo ponendo $\varphi = 90°$ et circumagendo dein lamellam in proprio fuo plano, lamella duntaxat apparebit fub colore

$$\mathfrak{J} = A \cos (90° - 2\beta)^2$$
$$= A \sin 2\beta^2$$

Igitur pro

$\beta = o$ erit $\mathfrak{J} = o$ h. e. lamella apparebit obfcura f. nigra.
Pro $\beta = 45°$ erit tincta colore A
$\beta = 90°$; rurfus apparebit nigra

atque fic porro.

§. XXI.

1. Ita iuxta formulam generalem, nisi breuitati esset consulendum, adhuc complures alios casus speciales adferre possem, qui omnes tam bene obseruationibus ipsis respondere deprehenduntur, vt vice versa per hunc consensum principia ipsa, e quibus formula deducta est, videantur esse corroborata.

2. Quisnam vero color his vel illis casibus sub B vel A intelligendus sit, a priori nequit determinari. An e. gr. in (§. XX. 2.) A futurus sit violaceus pro data quadam lamella, duntaxat per experientiam cognosci potest. Cognito vero A, per se quoque habetur B, cum B semper complementum faciat ipsius A ad lumen album.

3. Pro uno eodemque genere lamellarum h. e. pro lamellis ex vno eodemque corpore crystallisato desumtis iuxta Cel. *Biot* *) videtur quidem assumi posse, illum colorem, quem per A designauimus [qui igitur sese sistit pro $\varphi = 90°$ et $\beta = 45°$ (§. XX. 2.)] duntaxat pendere a crassitie lamellae ita, vt si haec crassities augeatur vel minuatur, etiam color ipsius A varietur.

4. Interim iuxta meam *experientiam per diminutionem crassitudinis vnius eiusdemque lamellae* nunquam efficere potui, vt colorem quendam ostenderet sub dictis azimuthis, quem antea non ostendisset. E. gr. si sub certa quadam crassitie illud A sese ostendisset violaceum (= ceruleo + rubro), per diminutionem crassitudinis efficere quidem potui, vt A transierit in ceruleum, vel rubicundum, in violaceum fortiorem vel debiliorem, verum nunquam in flauum s. viridem, ad quem producendum semper alia lamella a corpore illo crystallisato seiungi oportebat, ita, vt praeter crassitudinem lamellae, et peculiaris quaedam constitutio interna, ab illa prioris lamellae forte admodum parum diuersa, requiri videatur, ad hunc vel illum colorem

*) Memoires de l'Institut. Ann. 1811. Classe Mathem. p. 158 sq.

colorem A producendum h. e. ad axes vel aequatores particularum certi cuiusdam generis radiorum coloratorum A dimovendos.

5. Interim ad colorem quendam A producendum, lamella neque excedere debet craſſitudinem aliquam, neque nimis tenuis eſſe debet. Priori caſu conſtare poſſet ex pluribus lamellis ſuper ſe inuicem poſitis, quarum fiſſurae (§. XIII.), vario modo ſe inuicem ſecarent adeoque non parallelae manerent, poſteriori vero caſu nimia tenuitas lamellae ad axes particularum ipſius A dicto modo dimouendas, forte non ſatis valida eſſe poſſit. Quare certa et determinata quaedam craſſities neceſſaria eſſe videtur, colorem A ſub dictis circumſtantiis viuidiſſimum efficere.

6. Lamellae, quibus vti ſoleo experimentis meis, ſi conſtant ex mica, craſſitiem habent $\frac{1}{5}$ circ. lineae pariſienſis. Tunc colores admodum viuidos oſtendunt. Vt vero nanciſcamur lamellam, quae per *totam ſuam ſuperficiem* vnum eundemque colorem exhibeat, ſumatur lamella ſatis magna e. gr. complures pollices quadratos continens, quae lumini polariſato expoſita, in proprio ſuo plano circumagatur, vsque dum viuidiſſimis coloribus tincta appareat. Tunc ex ea parte ſuperficiei, vbi vnus idemque color ſeſe oſtendit (nam plerumque complures apparent) exſcindatur lamella minor, quadratica vel circularis, experimentis deſtinata.

§. XXII.

1. Ad inſigniores apparentias colorum, a polaritate luminis pendentes, ſine dubio referri quoque debent illae, quae in cylindris, vel cubis vitreis politis obſeruantur, ſi lumini polariſato in ſupellectile ſupra deſcripta eodem modo exponantur, quam lamellae hactenus conſideratae. Collocemus ſc. ſuper baſin vitream (§. XI. 4.) horizontalem, loco lamellae tenuis, cylindrum diametri et altitudinis 1 vel $1\frac{1}{2}$ pollicum, ita vt lu-

men diurnum per tabulam vitream Y polarifatum, per hunc cylindrum tranfeat, antequam ad fpeculum fubditum Z pertingat, atque obferuabimus cafu, quo fpeculum verfus meridiem vel feptentrionem fpectat, igitur fub azimutho $\varphi = 0$, vel $\varphi = 180°$, nil nifi lumen album fuper toto illo fpatio bafeos huius cylindri quod confine eft diametris $\alpha\beta$, ab (Fig. IX.) quarum alter $\alpha\beta$ eft in directione meridiei, alter vero ab in directione ad priorem $\alpha\beta$ perpendiculari.

2. In aliqua vero diftantia ab illis diametris maculas coloratas obferuabimus in m, n, q, r, quarum centra cadunt in diametros $\varepsilon\varphi$, ef, cum prioribus $\alpha\beta$, ab, angulum graduum 45 conftituentes. A centris harum macularum verfus illarum peripheriam lumen coloratum decrefcit vsque ad albedinem dictam, quae inter illas maculas quafi crucem albam feu pellucidam $\alpha\beta$ ab format.

3. Interdum maculae illae in egregio colore ceruleo cernuntur, qui verfus peripheriam eius fenfim in colorem aurantium vel fubfufculum tranfit. Plerumque vero duntaxat apparent flauefcentes, interdum tinctae colore admodum debili. Inter fex eiusmodi Cylindros vnum duntaxat inueni, qui maculas illas ceruleas oftendiffet.

4. Iam fpeculum Z circumagatur, vsque dum quadrantem gyrationis vel tres quadrantes defcripfit, adeoque vel verfus occidentem vel orientem fpectet. In hoc fitu fpeculi, crux illa alba vel pellucida, in nigram vel obfcuram abit, et maculae illae fefe oftendunt in colore, qui illum complet ad album, quo antea apparebant tinctae.

In pofitionibus fpeculi intermediis hae apparentiae plus minusue fe inuicem confundunt.

5. Similia phaenomena obferuantur in cubis vitreis, lumini polarifato expofitis, aliisque maffis vitreis paululum craffis quemadmodum vberius videre licet in Cel. *Schweiggeri* Annalibus phyfico-

ſico-chemicis (T. VII. §. 259.) vbi haec egregia phaenomena, a Cel. D. *Seebek* primum obſeruata, non modo deſcripta ſed etiam figuris coloratis illuſtrata ſunt.

6. Nullum plane eſt dubium, et has apparentias a polaritate luminis eſſe oriundas, cum lumen illud album iuxta figuram crucis (2), euaneſcat ſeu in nigrum transeat (3) peracto quadrante gyrationis, ſimiliterque color macularum in complementarium ad albedinem abeat. Sed ad conſtructionem mathematicam horum phaenomenorum mihi videtur, lineas illas attrahentes quibus axes particularum certi cuiusdam generis radiorum e. gr. ipſius A (§. XVI.) ex ſitu ſuo dimouentur, non ponendas eſſe inter ſe parallelas, quemadmodum in phaenomenis lamellarum ſupra expoſitis, ſed potius conuergentes, a peripheria $a\alpha\beta b$ verſus centrum baſeos, ſeu potius verſus axem Cylindri, quaſi ac ſi iuxta totam longitudinem Cylindri, forte per inaequalem vitri refrigeſcentiam, fiſſurae ſubtiliſſimae, oculo prorſus euaneſcentes et verſus axem Cylindri conuergentes, illis lamellarum ſupra memoratis ſimiles, ſeſe formaſſent.

7. Sic igitur per fiſſuras iuxta directionem diametrorum $\alpha\beta$, a b, poſitas, lumen polariſatum incidens exiſtente azimutho ſpeculi $\varphi = 0$, inuariatum tranſiet, et album apparebit, ſicut in phaenomenis lamellae (§. XX. 1.) pro $\beta = 0$, et $\beta = 90°$. Illic vero, vbi fiſſurae e. gr. $\varphi\varepsilon$ vel fe, cum directione meridiei $\alpha\beta$ angulum $= 45°$ conſtituunt, particulae certi cuiusdam generis luminis e. gr. ipſius A, per has fiſſuras transeuntes, ſeſe habebunt quam illae, quae per lamellam dictam tranſirent pro $\beta = 45°$ h. e. iuxta poſitionem diametrorum $\varepsilon\varphi$, ef, obſeruari debet lumen quoddam coloratum B, dum particulae ipſius A a ſpeculo abſorbentur. Poſtquam ſpeculum quadrantem gyrationis abſoluit, igitur pro $\varphi = 90°$, lumen album abit in nigrum (vnde crux illa nigra) et color macularum tranſit in complementarium ipſius B ad lumen album, h. e. in A, prorſus vt in lamella (§. XX. 2.) pro $\beta = 45°$.

8. Fiſ-

8. Fiſſurae dictae, a peripheria Cylindri duntaxat ad aliquam profunditatem, et non vsque ad axem eius ipſum ſeſe extendere videntur forſan vt (Fig. X.) vbi eiusmodi fiſſuras ſuper baſin cylindri repraeſentaui.

9. Si in officinis vitriariorum eiusmodi Cylindri vel cubi vitrei non admodum caute et lente refrigerantur, facile fieri poteſt, vt ob inaequalitatem caloris adeoque et vis expanſiuae partium vitri internarum et externarum, eiusmodi corpora conſtitutionem quandam internam nanciſcantur, quae cum fiſſuris lamellarum ſupra memoratis quodammodo comparari poſſit, eo ſolum diſcrimine, vt eiusmodi fiſſurae non ſitum inter ſe parallelum obtinere poſſint, ſed verſus axem vitri, ex quo quaſi vis illa expanſiua partium calidiorum exit, conuergere debeant. Vbi in vitro nulla eiusmodi diſpoſitio interna datur, ceſſat quoque illa eius actio in radios luminis, qua phaenomena dicta naſcerentur, atque hoc tanto magis comprobari videtur, per obſeruationem Cl. *Seebek*, apparentias ſcilicet illas colorum in cylindris et cubis vitreis prorſus fere euaneſcere, ſi haec corpora admodum lente refrigerata fuerint.

10. Ita ſimiliter neque aqua neque alia fluida eiusmodi apparentias producunt, ſi in vaſis cylindricis vel cubicis, cum baſibus vitreis, lumini polariſato expoſita fuerint. Quam primum vero aqua congelata eſt, plus minusue phaenomena quaedam colorum ſeſe oſtendere incipiunt. In lamellis glacialibus, licet non omnibus, lumini polariſato expoſitis, interdum egregios colores vidi.

11. Adhuc multa phaenomena ſingularia proferre poſſem, quae ſeſe oſtendunt, ſi lumini polariſato exponantur plures cylindri vel cubi vitrei, ſuper ſe inuicem poſiti, vel quoque ſi lumen tranſiens non per reflexionem a ſpeculo, ſed per refractionem in cryſtallo Islandico ad oculum perueniat; Sed limites circumſcripti huius commentationis me monent, vt ipſi iam finem imponam.

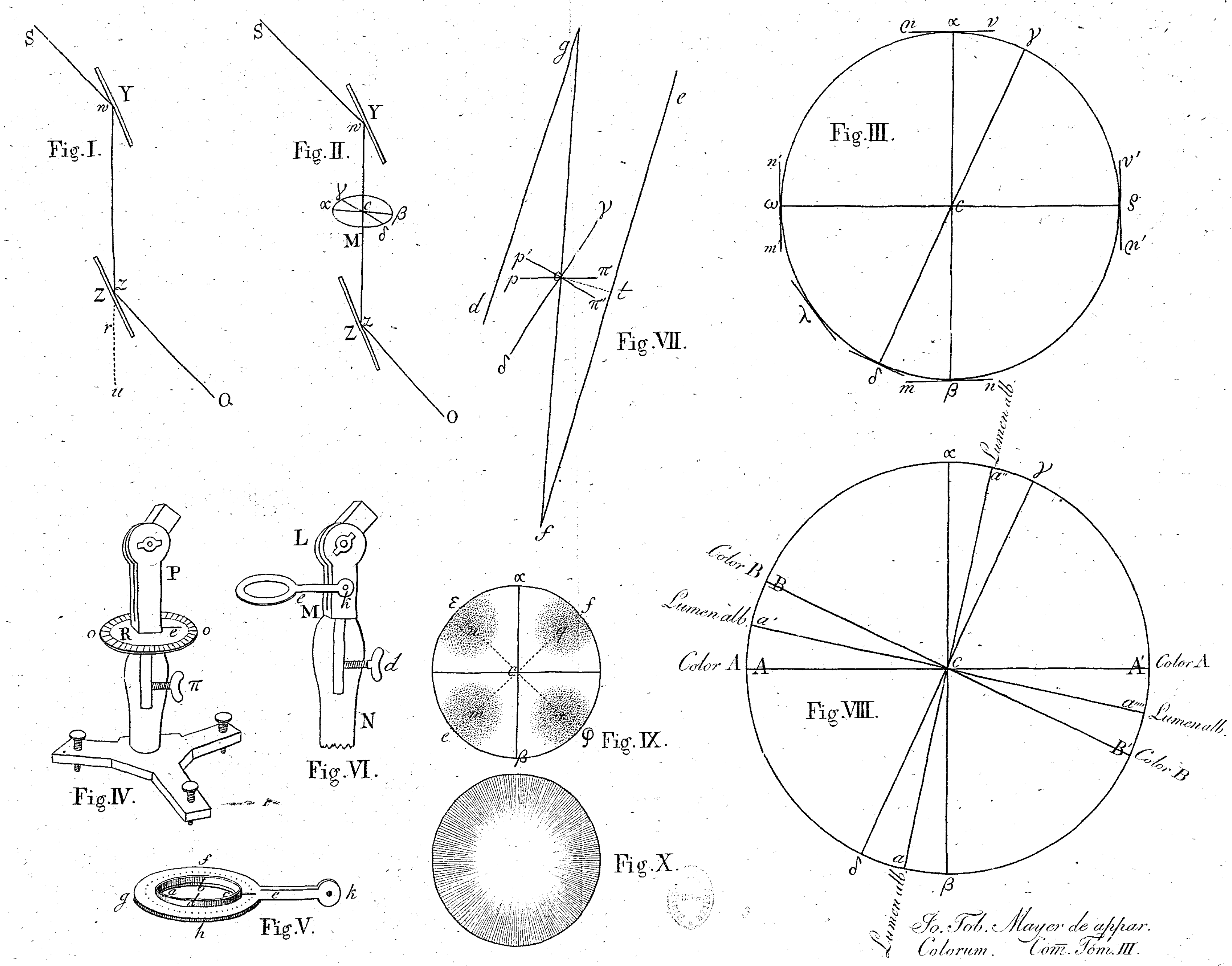
Fig. I.
Fig. II.
Fig. III.
Fig. IV.
Fig. V.
Fig. VI.
Fig. VII.
Fig. VIII.
Fig. IX.
Fig. X.
Lumen alb.
Color A
Color B
Lumen alb.
Jo. Tob. Mayer de appar.
Colorum. Com. Tom. III.