Sur une classe particulière de fonctions entières et de fractions continues.

(Par E. B. CHRISTOFFEL, à Strassburg.)

Les belles recherches, que Mr. HERMITE a publié dans le Journal de Mr. BORCHARDT (t. 79, p. 324) et dans le dernier cahier des Annales fondées par CLEBSCH (t. 10, p. 287) m'ont fait penser qu'il y aura peut-être quelque intérêt de présenter brièvement une suite de théorèmes sur un genre de questions, dont j'ai traité le cas le plus simple dans un ancien Mémoire (Journal de Mr. BORCHARDT, t. 55, p. 61) sur la méthode de GAUSS pour l'intégration approchée numérique.

Ce qui suit se rattache encore à l'intégration numérique (prop. VII), mais d'un point de vue très-étendu; aussi l'un des exemples, que j'indiquerai à la fin de cette communication, fera voir qu'entre les fonctions, dont je vais démontrer l'existence et les principales propriétés, il y a des espèces, qui sont dignes d'être étudiées même sous un point de vue purement analytique.

Posons l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\lambda(x) dx}{u-x} = L(u),$$

le module de u surpassant l'unité, et $\lambda(x)$ désignant une fonction de x , soumise aux deux conditions:

A) d'admettre l'intégration entre les limites -1 et $+1$,

B) de rester réelle entre ces limites sans y changer de signe.

Ces conditions remplies, la fonction $\lambda(x)$ peut-être choisie arbitrairement. Mon ancien Mémoire suppose $\lambda(x) = 1$.

Maintenant soit

$$\Pi_n(x)$$

une fonction entière de x , du degré n ,

$$P_n(u) = \int_{-1}^1 \frac{\Pi_n(u) - \Pi_n(x)}{u - x} \lambda(x) dx$$

$$X_n(u) = \int_{-1}^1 \frac{\Pi_n(x) \lambda(x) dx}{u - x},$$

donc

$$\Pi_n(u) L(u) = P_n(u) + X_n(u).$$

Evidemment la fonction $P_n(u)$ est entière et du degré $n - 1$, et comme les développements de $L(u)$, $X_n(u)$ suivant les puissances de la variable u ne peuvent contenir que les termes en $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{u^2}$, $\dots$, p. e.

$$L(u) = \frac{A}{u} + \frac{A_1}{u^2} + \frac{A_2}{u^3} + \dots,$$

on voit qu'en formant le produit de la fonction entière $\Pi_n(u)$ avec le développement de $L(u)$, $P_n(u)$ en sera la partie entière et $X_n(u)$ le reste. Il est bon d'observer que dans le développement de $\Pi_n(u)L(u)$ le coefficient de $\frac{1}{u}$ est toujours

$$= \int_{-1}^1 \Pi_n(x) \lambda(x) dx.$$

Ayant égard aux conditions pour la fonction $\lambda(x)$ et aux notations précédentes, on peut énoncer les théorèmes suivants :

I. La condition, que dans le développement de la fonction $X_n(u)$ les $n + 1$ premiers termes disparaissent, donne identiquement $\Pi_n = 0$, $P_n = 0$, $X_n = 0$.

Ou autrement: le déterminant des $n + 1$ premiers coefficients dans le développement de la fonction $X_n(u)$, pris suivant les coefficients de $\Pi_n(u)$, est différent de zéro.

II. On peut demander une fonction entière Π_n du degré n telle, que dans le développement de la fonction correspondante X_n seulement les n premiers termes disparaissent. La fonction Π_n existe toujours, elle est déterminée à un facteur constant près, et son degré est précisément le nombre proposé n .

Soit

$$\Pi_n(u) = a_n u^n + a'_n u^{n-1} + a''_n u^{n-2} + \dots$$

cette fonction, et soient

$$P_n(u) = b_n u^{n-1} + b'_n u^{n-2} + \dots$$

$$X_n(u) = \frac{B_n}{u^{n+1}} + \frac{B'_n}{u^{n+2}} + \dots$$

les fonctions correspondantes. Le coefficient a_n reste arbitraire; lorsqu'on en dispose convenablement, les trois fonctions Π_n , P_n , X_n sont complètement déterminées.

Par cette proposition, chaque fonction $\lambda(x)$ qui vérifie les conditions A), B), donne naissance à une suite indéfinie de fonctions entières Π_0 , Π_1 , Π_2 ,... avec les fonctions correspondantes P et X , qui ont les propriétés suivantes:

III. Lorsque m , n désignent deux nombres inégaux entiers et positifs, on a

$$\int_{-1}^1 \Pi_m(x) \Pi_n(x) \lambda(x) dx = 0$$

et pour $m = n$

$$\int_{-1}^1 [\Pi_n(x)]^2 \lambda(x) dx = a_n B_n.$$

IV. Toute fonction entière $F(u)$ peut être développée dans la forme

$$F(u) = C_0 \Pi_0(u) + C_1 \Pi_1(u) + C_2 \Pi_2(u) + \dots$$

et cela d'une seule manière. Lorsque le développement du produit $F(u)L(u)$ ne contient pas les termes en $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{u^2}$,... $\frac{1}{u^v}$, on a $C_0 = 0$, $C_1 = 0$,... $C_{v-1} = 0$.

V. L'équation

$$\Pi_n(u) = 0$$

n'admet que des racines simples, qui sont toutes réelles, comprises entre les limites -1 et $+1$, et différentes de ces limites.

VI. Soient

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$$

les racines de cette équation, et de même

$$\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{n-1}$$

les racines de l'équation précédente $\Pi_{n-1}(u) = 0$. Ces racines convenablement rangées, on aura l'inégalité

$$-1 < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \dots < \beta_{n-1} < \alpha_n < 1.$$

VII. L'équation

$$\int_{-1}^1 F(x) \lambda(x) dx = \sum_z F(z) \frac{P_n(z)}{\Pi'_n(z)},$$

approchée en général, est exacte pour toute fonction entière $F(x)$, dont le degré ne surpasse pas le nombre $2n-1$.

VIII. Entre les fonctions entières Π , P subsistent les relations identiques

$$\begin{aligned} \Pi_{n-1}(u)P_n(u) - \Pi_n(u)P_{n-1}(u) &= a_n B_{n-1}, \\ \frac{\Pi_n(x)\Pi_{n-1}(y) - \Pi_n(y)\Pi_{n-1}(x)}{x-y} &= a_n B_{n-1} \sum_0^{n-1} \frac{\Gamma_m(x)\Pi_m(y)}{a_m B_m}. \end{aligned}$$

IX. Lorsque le module de u surpasse l'unité, on a le développement en fraction continue

$$L(u) = \frac{L_0}{u - \mathfrak{A}_0} - \frac{L_1 : L_0}{u - \mathfrak{A}_1} - \frac{L_2 : L_1}{u - \mathfrak{A}_2} - \dots$$

et faisant, pour en former les réduites,

$$\begin{aligned} Z_0 &= 0 & Z_1 &= L_0 & Z_{n+1} &= (u - \mathfrak{A}_n)Z_n - \frac{L_n}{L_{n-1}} Z_{n-1} \\ N_0 &= 1 & N_1 &= u - \mathfrak{A}_0 & N_{n+1} &= (u - \mathfrak{A}_n)N_n - \frac{L_n}{L_{n-1}} N_{n-1} \end{aligned}$$

on a

$$\Pi_n(u) = a_n N_n, \quad P_n(u) = a_n Z_n.$$

Dans ces formules on doit mettre

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_0 &= \frac{A_1}{A_0}, & \mathfrak{A}_n &= \frac{a'_n}{a_n} - \frac{a'_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{a'_n}{a_n} + \frac{B'_n}{B_n} \\ L_0 &= \frac{B_0}{a_0} = A_0, & L_n &= \frac{B_n}{a_n}. \end{aligned}$$

La prop. I peut-être démontrée ou par la méthode de mon ancien Mémoire, ou en formant le déterminant en question. On le trouve

$$= \frac{1}{(n+1)!} \left(\int_{-1}^1 \right)^{n+1} [\Pi(x x_1 \dots x_n)]^2 \lambda(x) \lambda(x_1) \dots \lambda(x_n) dx dx_1 \dots dx_n,$$

ce qui est bien différent de zéro, λ ne changeant pas de signe pendant l'intégration. De là découlent immédiatement les prop. II et IV.

Dans la prop. III la première intégrale est le coefficient de $\frac{1}{u}$ dans le développement de $\Pi_m(u)\Pi_n(u)L(u) = \Pi_m(u)[P_n(u) + X_n(u)]$, donc $= 0$ pour $m < n$, ce qui suffit pour démontrer la formule pour m différent de n ; la même observation donne sa valeur pour $m = n$.

Quant au théorème V on démontre d'abord que, a_n étant choisi réel, les autres coefficients de Π_n sont réels aussi. Pour cela on décompose $\Pi_n(u)$ en $\psi + i\chi$, ψ et χ ayant les coefficients réels; χ sera donc d'un degré inférieur à n . Les coefficients de $L(u)$ étant réels, les termes en $\frac{1}{u}, \frac{1}{u^2}, \dots, \frac{1}{u^n}$ disparaissent non seulement du développement de $\Pi_n \cdot L$, mais aussi dans $\chi \cdot L$. Par conséquent on a $\chi = 0$ identiquement, prop. I.

Pour achever la démonstration du théorème V, des prop. III et IV nous tirons l'équation

$$\int_{-1}^1 y \Pi_n(x) \lambda(x) dx = 0 \quad (y)$$

pour toute fonction entière y de x d'un degré inférieur à n .

Lorsqu'on suppose l'équation $\Pi_n(x) = 0$ avoir des racines α égales à une des limites -1 et $+1$, ou non comprises entre elles, soit z le produit de tous les facteurs $x - \alpha$ correspondants de $\Pi_n(x)$. Alors dans l'équation (y) on peut prendre

$$y = \frac{\Pi_n(x)}{z};$$

mais c'est une contradiction, le produit $y \Pi_n \lambda = \frac{\Pi_n^2}{z} \cdot \lambda$ restant réel et ne changeant pas de signe pendant l'intégration.

Lorsque α serait racine multiple de Π_n , comprise entre les limites -1 et $+1$, on prendrait

$$y = \frac{\Pi_n(x)}{(x - \alpha)^2},$$

pour tomber dans la même contradiction. Par conséquent l'équation $\Pi_n = 0$ a toutes ses racines réelles, différentes entre elles et des limites -1 et $+1$ et comprises entre ces limites.

La prop. VII est évidente par la théorie des intégrations numériques.

La première formule du th. VIII se déduit en chassant $L(u)$ des deux équations

$$\begin{aligned} \Pi_n(u)L(u) &= P_n(u) + X_n(u) \\ \Pi_{n-1}(u)L(u) &= P_{n-1}(u) + X_{n-1}(u), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\Pi_{n-1}(u)P_n(u) - \Pi_n(u)P_{n-1}(u) = \Pi_n(u)X_{n-1}(u) - \Pi_{n-1}(u)X_n(u);$$

l'expression à droite étant après cela fonction entière de u , il n'en reste que le terme $a_n B_{n-1}$, les autres termes devant se détruire. Cette formule fait voir, que pour le th. VII la connaissance de la fonction P_n n'est pas nécessaire.

La seconde formule du th. VIII se démontre aisément par la méthode de mon ancien Mémoire ou par les formules récurrentes auxquelles nous passerons de suite; dans ce dernier cas on doit chasser le dénominateur $x - y$. En faisant dans cette formule $y = x$ et mettant pour x deux racines consécutives de l'équation $\Pi_n = 0$, on prouve que les valeurs correspondantes de $\Pi_{n-1}(x)$ sont de signes opposées. En effet, dans la formule

$$\Pi'_n(x)\Pi_{n-1}(x) = a_n B_{n-1} \sum_0^{n-1} \frac{[\Pi_m(x)]^2}{a_m B_m},$$

qu'on trouve pour une racine α , on peut supposer tous les a positifs, alors les B le seront aussi, prop. III où l'on supposera λ positif pour un instant. La quantité à droite étant donc positive, les deux facteurs à gauche ont le même signe. Mais Π'_n changeant de signe d'une racine α à l'autre, la même chose a lieu pour Π_{n-1} , prop. VI.

Pour démontrer enfin le th. IX nous remarquons d'abord, que le développement de $u\Pi_n(u)L(u)$ manque des termes en $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{u^2}$, $\dots$, $\frac{1}{u^{n-1}}$, donc le produit $u\Pi_n(u)$, ordonné suivant les fonctions Π , ne donne que les trois derniers termes. Ainsi on est conduit aux formules

$$\begin{aligned} u\Pi_n &= \alpha\Pi_{n+1} + \beta\Pi_n + \gamma\Pi_{n-1} \\ uP_n &= \alpha P_{n+1} + \beta P_n + \gamma P_{n-1} \\ uX_n &= \alpha X_{n+1} + \beta X_n + \gamma X_{n-1}. \end{aligned}$$

En égalant les coefficients, dans la première de u^{n+1} et de u^n , dans la dernière de $\frac{1}{u^n}$ et $\frac{1}{u^{n+1}}$, on trouve

$$\alpha = \frac{a_n}{a_{n+1}}, \quad \gamma = \frac{B_n}{B_{n-1}}, \quad \beta = \frac{a'_n}{a_n} - \frac{a'_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{B'_n}{B_n} - \frac{B'_{n-1}}{B_{n-1}}.$$

Pour la seconde valeur de $\beta = \mathfrak{A}_n$, donnée dans le th. IX, il faut recourir à la formule

$$\Pi_n X_{n-1} - \Pi_{n-1} X_n = a_n B_{n-1};$$

le coefficient de $\frac{1}{u}$ donne $a_n B'_{n-1} + a'_n B_{n-1} = 0$.

Des formules récurrentes pour les fonctions X_n , savoir

$$(u - \alpha_0)X_0 = \frac{\alpha_0}{a_1}X_1 + \frac{\alpha_0}{a_1}A$$

$$(u - \alpha_n)X_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}X_{n+1} + \frac{B_n}{B_{n-1}}X_{n-1}$$

on passe immédiatement au développement de $L(u) = \frac{X_0}{a_0}$ en fraction continue.

Pour en démontrer la convergence, lorsque $\text{mod } u > 1$, nous avons

$$L(u) - \frac{P_n(u)}{\Pi_n(u)} = \frac{X_n(u)}{\Pi_n(u)}.$$

Mais comme les racines de l'équation $\Pi_n = 0$ sont toutes comprises entre les limites -1 et $+1$, les fonctions $\frac{P_n}{\Pi_n}$ et $\frac{1}{\Pi_n}$ peuvent être développées suivant les puissances descendantes de u , toutefois qu'on a $\text{mod } u > 1$. Alors le développement de $\frac{X_n}{\Pi_n}$ commencera par le terme $\frac{B_n}{a_n u^{2n+1}}$, par conséquent le développement de $\frac{P_n}{\Pi_n}$ a les $2n$ premiers termes communs avec la série L . Soit donc

$$L(u) = \frac{A}{u} + \frac{A_1}{u^2} \cdots + \frac{A_{2n-1}}{u^{2n}} + \rho$$

$$\frac{P_n(u)}{\Pi_n(u)} = \frac{A}{u} + \frac{A_1}{u^2} \cdots + \frac{A_{2n-1}}{u^{2n}} + \sigma;$$

les deux développements étant convergents, il suit que les restes ρ et σ , et de même la quantité

$$\frac{X_n}{\Pi_n} = \rho - \sigma$$

convergent vers zéro, lorsque n croit indéfiniment. Donc nous avons pour $n = \infty$

$$\lim \frac{P_n(u)}{\Pi_n(u)} = L(u),$$

ce qui démontre la convergence de la fraction continue pour toute valeur de u , dont le module surpasse l'unité.

Ajoutons quelques exemples.

Ex. 1. Prenant $\lambda(x) = 1$, on retombe sur les résultats de mon ancien

Mémoire (p. 68)

$$\Pi_n(x) = \mathfrak{F}_n(x)$$

$$P_n(x) = R_n(x) = 2 \left| \frac{2n-1}{1 \cdot n} \mathfrak{F}_{n-1} + \frac{2n-5}{3 \cdot n-1} \mathfrak{F}_{n-3} + \frac{2n-9}{5 \cdot n-2} \mathfrak{F}_{n-5} + \dots \right|,$$

$\mathfrak{F}_n$ étant la fonction de LEGENDRE.

Ex. 2. Soit $\lambda(x) = x$; la condition B) n'est pas vérifiée. Aussi on trouve

$$\Pi_{2m}(x) = \Pi_{2m+1}(x) = \frac{1}{x} \mathfrak{F}_{2m+1}(x);$$

donc pour n impair Π_n n'est pas du degré n .

Ex. 3. Soit $\lambda(x)$ la valeur absolue de x , on trouve

$$\Pi_{2m}(x) = \mathfrak{F}_m(2x^2 - 1)$$

$$\Pi_{2m+1}(x) = \frac{1}{2x} [\mathfrak{F}_m(2x^2 - 1) + \mathfrak{F}_{m+1}(2x^2 - 1)].$$

Ex. 4. Pour $\lambda(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$, a réel, on a $\Pi_0(x) = 1$, $\Pi_1(x) = x$,

$$\Pi_{n+2}(x) = \begin{vmatrix} \mathfrak{F}_{n+2}(x) & R_{n+2}(ai) + 2i \mathfrak{F}_{n+2}(ai) \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{a} \\ \mathfrak{F}_n(x) & R_n(ai) + 2i \mathfrak{F}_n(ai) \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{a} \end{vmatrix}.$$

Ex. 5. Dans le Journal de Mr. BORCHARDT (t. 63, p. 152) Mr. MEHLER s'est déjà occupé du cas qui résulte en prenant

$$\lambda(x) = (1-x)^{\alpha-1} (1+x)^{\beta-1}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0;$$

le cas spécial $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, traité par des considérations directes, fait l'objet de la communication élégante de Mr. HERMITE, Ann. de CLEBSCH, t. 10.

La question posée par Mr. MEHLER se traite facilement par les méthodes de mon ancien Mémoire.

On trouve les équations différentielles

$$\frac{d}{dx} \left| \frac{x^2-1}{\lambda} \frac{d\lambda \Pi_n}{dx} \right| = (n+1)(n+\alpha+\beta-2) \Pi_n$$

$$\lambda \frac{d}{dx} \left| \frac{x^2-1}{\lambda} \frac{dX_n}{dx} \right| = (n+1)(n+\alpha+\beta-2) X_n$$

$$\lambda \frac{d}{dx} \left| \frac{x^2-1}{\lambda} \frac{dP_n}{dx} \right| = (n+1)(n+\alpha+\beta-2) P_n - 2(\alpha+\beta-1) A \frac{d\Pi_n}{dx},$$

étant

$$A = 2^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma \alpha \Gamma \beta}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

L'expression de Π_n est la suivante (voir le Mémoire de Mr. MEHLER)

$$\Pi_n(x) = \frac{d^n (x^2 - 1)^n \lambda(x)}{2^n n! \lambda(x) dx^n}.$$

Lorsque $\alpha + \beta = 1$, ce qui suit souffre, pour $n = 0$, une légère modification. Mettant à côté ce cas, on obtient

$$\begin{aligned} (x - \mathfrak{A}_n) \Pi_n &= \frac{a_n}{a_{n+1}} \Pi_{n+1} + \frac{B_n}{B_{n-1}} \Pi_{n-1}, \\ \mathfrak{A}_n &= \frac{\beta - \alpha \cdot x + \beta - 2}{\alpha + \beta + 2n - 2 \cdot \alpha + \beta + 2n} \\ \frac{a_n}{a_{n+1}} &= 2 \cdot \frac{n+1 \cdot \alpha + \beta + n - 1}{\alpha + \beta + 2n - 1 \cdot \alpha + \beta + 2n} \\ \frac{B_n}{B_{n-1}} &= 2 \cdot \frac{\alpha + n - 1 \cdot \beta + n - 1}{\alpha + \beta + 2n - 2 \cdot \alpha + \beta + 2n - 1}. \end{aligned}$$

Par là on connaît encore le développement de

$$L(u) = \int_{-1}^1 \frac{(1-x)^{\alpha-1} (1+x)^{\beta-1}}{u-x} dx$$

en fraction continue pour $\text{mod } u > 1$, parceque, dans le th. IX on a $L_0 = A$,

$$\frac{L_{n+1}}{L_n} = \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \frac{B_{n+1}}{B_n}.$$

Ex. 6. Soit enfin

$$\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \cdot 1-k^2 x^2}, \quad 0 < k < 1,$$

et

$$w = \int_0^x \lambda(x) dx;$$

nous trouvons le résultat mémorable, qu'il existe une suite de fonctions $\Pi_n(x)$ doublement périodiques de w , qui donnent la relation

$$\int_{-K}^K \Pi_m(x) \Pi_n(x) dw = 0$$

toutefois que les entiers m, n sont inégaux, K désignant comme à l'ordinaire l'intégrale entière ou la valeur réelle de w pour $x = 1$.

Du reste on voit bien que dans tout ce qui précède, les limites -1 et $+1$ de l'intégration ne sont choisies que pour simplifier les formules et l'énoncé de quelques propositions. Si $\lambda(x)$ admet l'intégration de $x=a$ jusqu'à $x=b$, et que $\lambda(x)$ reste réel entre ces limites sans y changer de signe, tous ces résultats sont applicables au cas, où l'on prendrait

$$L(u) = \int_a^b \frac{\lambda(x) dx}{u-x},$$

avec les modifications convenables. Par conséquent le dernier exemple donne encore lieu à une seconde série de fonctions Π_n de w , en prenant $a=1$, $b=\frac{1}{k}$ au lieu des limites -1 et $+1$.

Strassburg, 7 juin 1876.