Συλλογισμός

Syllogismos

History and Epistemology for Mathematics Education

Storia ed Epistemologia per la Didattica della Matematica

Libri e idee *(a cura di G.T. Bagni)*

Appunti di storia per la didattica della matematica

Capitolo 4
Manuali di Calcolo infinitesimale

4.1. Le radici storiche dell'Analisi matematica

4.1.1. L'Antichità e il metodo di esaustione

È sufficiente sfogliare un manuale scolastico per rendersi conto che l'Analisi infinitesimale può basarsi sul moderno concetto di limite e, attraverso questo, sui procedimenti classici di derivazione e di integrazione; com'è noto, tali concetti furono introdotti nel XVII secolo e progressivamente precisati[1]. Tuttavia se la storia del limite sembra essere abbastanza recente, non pochi procedimenti,

[1] Anticipiamo che una prima rigorizzazione della nozione di limite fu opera di Augustin Louis Cauchy, autore del *Cours d'analyse* (1821); con l'opera di Cauchy l'Analisi raggiunse una sistemazione vicina a quella attualmente presente nei nostri libri scolastici (si veda: Cauchy, 1884-1897); tra il XIX ed il XX secolo, la definitiva sistemazione del concetto di limite fu infine resa possibile dallo sviluppo della topologia.

fino dall'Antichità, rivelano la considerazione di questioni infinitesimali[2].

Come vedremo nel presente paragrafo, tuttavia, non è semplice precisare l'importanza da attribuire a tali procedimenti. Ad esempio, al moderno passaggio al limite viene spesso affiancato il metodo di esaustione[3] che fu introdotto da Eudosso e quindi teorizzato negli *Elementi* euclidei. Un simile accostamento necessita però di molta cautela: le dimostrazioni per esaustione infatti non sono equivalenti ad un moderno passaggio al limite;

[2] "Chi volesse risalire alle origini dei metodi infinitesimali dovrebbe arrivare a quel periodo della filosofia greca, ove si son gettate le basi logiche della Geometria, verso il 400 a.C." (Castelnuovo, 1938, p. 29). Ma riferendosi alla preistoria del Calcolo infinitesimale, N. Bourbaki scrive: "I Greci non possedettero né immaginarono niente di simile. Essi senza dubbio conobbero, non foss'altro per rifiutarsi di usarlo, un Calcolo algebrico, ossia quello dei babilonesi, di cui una parte della loro Geometria era probabilmente soltanto una trascrizione; è tuttavia nell'ambito dell'invenzione geometrica che si sviluppa la loro creazione matematica forse più geniale: il metodo per trattare quei problemi che per noi competono al Calcolo integrale. Eudosso, trattando del volume del cono e della piramide, ne aveva dato i primi modelli che Euclide ci ha più o meno fedelmente tramandato" (Bourbaki 1963, p. 171). Ci associamo a M. Kline, che scrive: "Anche se, in una certa misura, forniva una risposta a problemi che erano stati già affrontati dai Greci, il Calcolo infinitesimale venne creato soprattutto per trattare i principali problemi del XVII secolo" (Kline, 1991, I, p. 399. Inoltre: Kline, 1982 e 1985).

[3] Così N. Bourbaki ricorda il procedimento di esaustione: "Senza far uso di particolari artifici, il principio di esaustione è il seguente: con una decomposizione in 'somme di Riemann' si ottengono degli estremi superiori ed inferiori per la quantità studiata, estremi che vengono confrontati direttamente con l'espressione prevista per tale quantità, oppure con gli estremi corrispondenti per un problema analogo già risolto"; egli osserva che una presentazione formalmente analoga venne data da Archimede per la tangente alla spirale (Archimede, 1913-1915, II, 62-76), "risultato isolato, ed il solo che si possa citare come antica fonte del «Calcolo differenziale», oltre alla determinazione relativamente facile delle tangenti alle coniche ed a qualche problema sui massimi e sui minimi". Inoltre: "Se per quanto concerne l'integrazione, un immenso campo di ricerche si apriva ai matematici greci, non solo per la teoria delle aree e dei volumi, ma anche per la statica e l'idrostatica, essi, mancando l'impulso di problemi di cinematica, non ebbero l'occasione di affrontare seriamente la differenziazione" (Bourbaki, 1963, p. 173).

nell'Antichità erano utilizzate, sempre abbinate ad una dimostrazione per assurdo, per conferire rigore ai risultati individuati, in precedenza, attraverso tecniche intuitive.

L'esame delle caratteristiche del procedimento di esaustione, una delle massime conquiste della Matematica greca, e l'influenza che tale metodo esercitò nella fase che vide il sorgere della moderna Analisi possono apportare contributi significativi alla riflessione critica sui fondamenti (Giusti, 1983, p. 255)[4].

Il metodo di dimostrazione introdotto da Eudosso di Cnido (400-347? a.C.)[5] era basato sulla proprietà secondo la

---

[4] Una ricerca delle radici storiche dei concetti infinitesimali deve innanzitutto considerare Anassagora di Clazoméne (500?-428 a.C.). Un suo frammento contiene alcuni spunti molto interessanti che lo collocano tra i primi pensatori che accettarono la sfida dell'infinitamente piccolo (e dell'infinitamente grande): "Rispetto al piccolo non vi è un ultimo grado di piccolezza, ma vi è sempre un più piccolo, essendo impossibile che ciò che è cessi di essere per divisione" (Geymonat, 1970, I, p. 88). L'interpretazione di questo celebre frammento può portare, secondo alcuni studiosi, all'intuizione di un procedimento modernamente esprimibile mediante un limite: in esso viene infatti introdotta una quantità che può essere diminuita indefinitamente (ovvero un numero indefinito di volte), pur senza mai giungere ad annullarsi. Il fatto che la grandezza considerata non sembri soggetta ad una variazione continua, ma discreta, suggerisce di collegare l'intuizione di Anassagora al limite di una successione numerica convergente a zero (piuttosto che di un'analoga funzione di variabile reale: Dupont, 1981, I). La prosecuzione del frammento è interessante: "Così vi è sempre qualcosa di più grande di ciò che è grande": un'interpretazione analoga alla precedente porta all'intuizione di un limite infinito.

[5] Ricordiamo appena che prima di Eudosso sarebbe interessante ricordare altri pensatori. E. Rufini, riprendendo in parte una tesi del proprio maestro F. Enriques (Enriques & De Santillana, 1932, p. 107), indica nell'impostazione della scuola eleatica un primo passo verso l'introduzione dei metodi infinitesimali: "Nell'opera di Parmenide si afferma... per la prima volta il concetto razionale del punto, della linea e della superficie; la sua critica tende in sostanza a stabilire che gli enti geometrici non possono definirsi che per astrazione, con un procedimento indefinito di idealizzazione, come limiti del sensibile. Ora questa affermazione costituisce il primo riconoscimento del carattere infinitesimale dei concetti fondamentali della Geometria, e quindi può riguardarsi come il primo acquisto dell'Analisi infinitesimale" (Rufini, 1926, p. 23). La posizione di Rufini sembra fare riferimento ad una questione filosofica, epistemologica, più che essere collegato alle tecniche dell'Analisi

quale se da una grandezza si sottrae una parte non inferiore alla sua metà e se tale processo di sottrazione viene continuato, alla fine resterà una grandezza inferiore a qualsiasi grandezza assegnata omogenea all'iniziale.

Ricordiamo innanzitutto l'esposizione euclidea della questione: riportiamo l'enunciato originale di tale proprietà presentato negli *Elementi* di Euclide:

Proposizione 1 del X libro degli *Elementi*. (Assumendosi come) date due grandezze diseguali, se si sottrae dalla maggiore una grandezza maggiore della metà, dalla parte restante un'altra grandezza maggiore della metà, e così si procede successivamente, rimarrà una grandezza che sarà minore della grandezza minore (inizialmente) assunta (Euclide, 1970, p. 596).

Nella dimostrazione di tale proprietà è essenziale il ruolo del postulato di Eudosso (Loria, 1929-1933, p. 40; Arrigo & D'Amore, 1992, pp. 50-51):

Postulato di Eudosso (1). Date due grandezze omogenee, A, B, con A<B, esiste un numero naturale *n* tale che *n*A>B. Analogamente, date due grandezze omogenee, A, B, con A<B, esiste un numero naturale *n* tale che B/*n*<A.

L'ovvietà di tale postulato è soltanto apparente: non tutte le classi di grandezze omogenee sono anche archimedee, ovvero sono tali da rispettare il postulato di Eudosso (Euclide, 1970, p. 297), che così appare negli *Elementi*:

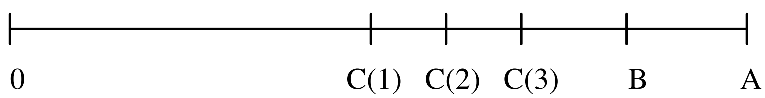
---

infinitesimale. Particolarmente significativo è il ruolo di Zenone d'Elea (490-430 a.C.), seguace e forse figlio adottivo di Parmenide, riconosciuto da molti studiosi come uno dei precursori dei metodi infinitesimali: "Ma ritorniamo allo scopo principale della critica di Zenone, per rilevarne il più profondo significato matematico. I paradossi che il filosofo mette in luce sono quelli che si trovano sulla via dell'Analisi infinitesimale. La riflessione che riconosce l'idealità degli enti geometrici scopre, insieme al regno del pensiero, il mondo dell'infinito" (Enriques & de Santillana, 1936, p. 54; Brunschvigc, 1929).

Definizione 4 del V libro degli *Elementi* (postulato di Eudosso in forma euclidea). Si dice che hanno fra loro rapporto (o ragione) le grandezze le quali possono, se moltiplicate, superarsi reciprocamente (Euclide, 1970, p. 298).

Negli *Elementi*, dunque, tale postulato è una definizione: Euclide si dichiarava a conoscenza che, considerate due grandezze (omogenee e non nulle), può esistere oppure no un multiplo della minore che superi la maggiore[6].

Descriveremo ora la tecnica eudossiana sulla base dell'uso che ne proporrà Archimede. Si voglia dimostrare per esaustione l'uguaglianza delle grandezze omogenee 0A, 0B. Procediamo attraverso la riduzione all'assurdo e ammettiamo che sia 0A>0B (Archimede, 1974, pp. 17-18; Frajese, 1969, pp. 266-273)..

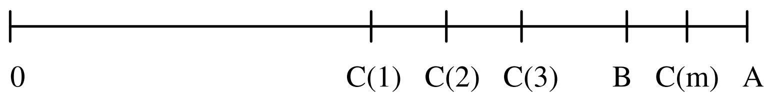


Si immagina quindi che esista la successione 0C(1), 0C(2), 0C(3), ... di grandezze omogenee con le date 0A, 0B, i cui termini siano minori di entrambe le grandezze 0A, 0B. Tale successione deve essere indefinitamente prolungabile (qui emerge il ruolo essenziale dell'infinito). I termini della successione siano inoltre tali da approssimare tanto bene quanto si vuole la grandezza 0A, ovvero quella delle due date supposta maggiore[7]. A questo punto, comunque si fissi la differenza 0A-0B delle grandezze, è possibile (essendo l'approssimazione dei termini della successione ad 0A a

[6] Ad esempio, l'insieme costituito dagli angoli rettilinei e curvilinei (compresi gli angoli di contingenza) non è una classe di grandezze archimedee (Euclide, 1970, pp. 228-231).

[7] Si ammette dunque che una grandezza possa indefinitamente approssimare una grandezza omogenea data (ricordiamo il frammento di Anassagora citato nella nota 4).

piacere) trovare un elemento 0C(m) della successione che differisca da 0A meno di 0A-0B. Pertanto sarebbe 0C(m)>0B, contro l’ipotesi che voleva tutti i termini della successione minori di 0A e di 0B.



Con ciò risulta provato che è impossibile che sia: 0A>0B. In modo del tutto analogo si prova che è impossibile che sia: 0A<0B[8].

4.1.2. Archimede e l’eredità della Matematica antica

Senza dubbio Archimede di Siracusa (287-212 a.C.) fu uno degli scienziati più importanti del mondo greco e di tutta la storia del pensiero umano[9]. Educato ad Alessandria, si

---

[8] L’applicazione del metodo di esaustione è sempre abbinata ad una ‘reductio ad absurdum” (Frajese, 1969, pp. 266-273). Riportiamo uno schema che consente l’applicazione del metodo (proposto da E. Carruccio). Siano G e G’ due grandezze omogenee e si voglia provare: G = G’. Siano A, B, A’, B’ grandezze variabili omogenee con G e G’. Sia (per ogni scelta di esse): A = A’, B = B’, A < G < B, A’ < G’ < B’. Ammettiamo di poter scegliere le grandezze A, A’, B, B’ in modo da rendere arbitrariamente piccola la: B-A = B’-A’. Ovvero, per ogni grandezza e omogenea con A, A’, B, B’, ammettiamo che sia possibile determinare le A, A’, B, B’ tali che: B-A = B’-A’ < e. Ciò è sufficiente, come vedremo, per provare la tesi, ovvero per dimostrare che: G = G’. Supponiamo infatti per assurdo che sia: G < G’, in modo che sia: G’-G = e, essendo e una grandezza costante omogenea con G, G’. Per l’ipotesi, sappiamo che: A < G < G’ < B e dunque: B-A > G’-G = ε che contrasta con l’ipotesi che vuole B-A < e (arbitraria). Analogamente dimostriamo che è impossibile che sia G > G’ (Carruccio, 1972, pp. 167-168).

[9] Scrive E.T. Bell: “Archimede, la più grande intelligenza dell’antichità, è moderno sino al midollo. Egli e Newton si sarebbero capiti perfettamente ed è possibile che, se Archimede fosse vissuto tanto da poter seguire un corso universitario di Matematica e di fisica, avrebbe perfettamente compreso Einstein, Bohr e Dirac. Di tutti gli antichi, Archimede è il solo che ragioni abitualmente con l’assoluta libertà che si permettono oggi i grandi matematici... Archimede, solo fra tutti i Greci, aveva una statura ed una forza sufficienti per superare facilmente gli ostacoli che trovava sulla strada del

occupò di molti settori della Matematica del tempo; a lui è dovuto il perfezionamento applicativo del metodo di esaustione, unito, come vedremo, all'intuizione di alcuni risultati di carattere infinitesimale[10].

In effetti, la ricerca archimedea è considerata il punto culminante della storia dei procedimenti infinitesimali nell'Antichità: Archimede calcolò aree, volumi e baricentri impiegando tecniche geniali, straordinariamente simili al moderno integrale definito. Ad esempio, spesso egli considerava le figure piane costituite da fili pesanti paralleli (anticipando di diciotto secoli il metodo degli indivisibili di Cavalieri), dei quali studiava meccanicamente l'equilibrio (Archimede, 1974).

Il ruolo essenziale del metodo di esaustione nel contesto della ricerca geometrica archimedea era quello di confermare e di garantire i risultati intuiti con metodi empirici[11], ovvero di conferire il definitivo rigore alle loro dimostrazioni (D'Amore & Matteuzzi, 1976, pp. 52-53)[12].

La dimostrazione per esaustione divenne dunque la classica dimostrazione archimedea: nell'opera del

progresso matematico" (Bell, 1991, pp. 18-19). E M. Kline conferma: "Archimede era dotato di un'elevata intelligenza, di una grande ampiezza d'interessi, sia pratici sia teorici, di un'eccellente abilità meccanica... Nella stima popolare le sue invenzioni oscurarono i suoi risultati matematici, sebbene egli sia considerato, assieme a Newton ed a Gauss, come uno dei tre più grandi matematici di tutti i tempi" (Kline, 1991, I, p. 124).

[10] Archimede ottenne rilevanti risultati nell'approssimazione di pi (a lui è dovuta la limitazione 3+10/71 < pi < 3+1/7). P. Freguglia riporta un'accurata descrizione del procedimento archimedeo per approssimare pi (Freguglia, 1982, pp. 60-70).

[11] In generale, non siamo sempre a conoscenza di questi metodi intuitivi impiegati da Archimede; riportiamo un'annotazione di A. Frajese: "In questo consiste appunto quel che potrebbe essere detto il *mistero* di Archimede: come giunse egli, per la superficie della sfera, e altre lunghezze, aree e volumi, a conoscere già il risultato prima ancora di iniziare il complesso procedimento dimostrativo?" (Archimede, 1974, p. 19).

[12] Sottolineiamo ancora un aspetto fondamentale, dal punto di vista metodologico: la dimostrazione per esaustione non ha mai valore euristico (in Archimede né altrove).

Siracusano troviamo numerosi esempi di corretta applicazione di questo elegante metodo.

Non presenteremo in dettaglio i molti risultati archimedei collegati al metodo di esaustione (rinviamo a: Rufini, 1926; Archimede, 1974; Bagni, 1996, I). Rileviamo comunque che la maggior parte delle opere di Archimede riuscì a superare i secoli senza subire sostanziali alterazioni (una copia del *Metodo*, opera a lungo reputata perduta, è stata riscoperta da J.L. Heiberg nel 1909: Rufini, 1926). Traduzioni latine di opere archimedee furono pubblicate nella seconda metà del XV secolo; nel secolo successivo l'interesse per il pensiero e per i metodi di Archimede aumentò[13]: l'edizione principale delle sue opere fu pubblicata da Hervagius a Basilea nel 1544 (Bourbaki, 1963, p. 175). Stava preparandosi la svolta che porterà, nel Seicento, alla nascita della moderna Analisi[14].

4.1.3. Un grande precursore: Luca Valerio

Tra i commentatori di Archimede nel XVI secolo ricordiamo alcune figure di primo piano della storia della

---

[13] Il concetto di integrale, ad esempio, fu praticamente intuìto da Archimede; esso sarà relegato al ruolo di operazione inversa della derivazione nel XVII secolo e troverà la propria compiuta realizzazione solamente all'inizio del Novecento con Henri Lebesgue (1875-1941: Bell, 1991; sull'integrazione secondo Lebesgue: Hawkins, 1970).

[14] Dunque l'Analisi infinitesimale è un settore della Matematica che nacque e si sviluppò in un arco di tempo particolarmente vasto, che spazia dall'Età antica al XX secolo. Gli scienziati di ogni età contribuirono alla creazione del grande edificio del Calcolo infinitesimale, operando nello spirito e nello stile delle singole epoche: il metodo di esaustione è certamente il massimo contributo, nel campo dei procedimenti infinitesimali, dovuto alla Matematica greca. Il suo ineccepibile rigore, la sua intrinseca eleganza, la sua preziosa presentazione formale fanno di tale tecnica uno dei grandi capolavori della Matematica di ogni tempo e rendono interessante e attuale la sua considerazione anche per il matematico contemporaneo. Inoltre: Geymonat, 1947; Boyer, 1969.Tra le edizioni di Euclide all'inizio dell'Età moderna: Clavio, 1603; Commandino, 1619.

Matematica: Nicolò Fontana (Tartaglia), Federico Commandino, Francesco Maurolico (Conti, 1992). Commandino approfondì le tecniche archimedee fino a servirsene in alcune ricerche originali, ricordate nel *Liber de Centro gravitatis solidorum* (pubblicato a Bologna nel 1565). Anche Galileo Galilei (1564-1642), in uno scritto giovanile (*Theoremata circa centrum gravitate solidorum*, del 1585), si occupò di tali argomenti; la scuola galileiana fu attiva nell'elaborazione critica della Matematica del Seicento (Loria, 1938; Galilei, 1990; Giusti, 1986; Giusti, 1993). Giungiamo così ai "primi anni di un secolo glorioso" (nelle parole che Gino Loria scelse per intitolare il capitolo della propria *Storia delle matematiche* dedicato all'opera di alcuni matematici della prima metà del Seicento: Loria, 1929-1933).

Il XVII secolo fu effettivamente un periodo della massima importanza per la storia della Matematica, un vero "secolo glorioso": ma prima di considerare l'opera dei grandi matematici che giunsero a mettere a punto concettualmente e tecnicamente l'Analisi matematica, ci occuperemo di un grande precursore: Luca Valerio (o Valeri, 1552-1618)[15].

Valerio insegnò presso l'ateneo romano e fu autore delle opere, particolarmente significative, *De centro gravitatis solidorum libri tres* e *Quadratura parabolae* (pubblicate a Roma rispettivamente nel 1604 e nel 1606). Nei suoi scritti troviamo spunti decisamente moderni, tra i quali

[15] Nel periodo ora esaminato assistiamo anche ad una progressiva precisazione della moderna terminologia matematica. Ad esempio, può essere interessante osservare che in *De centro gravitatis solidorum* i termini "abscissae" ed "ordinatim" furono usati per la prima volta nel senso moderno di ascissa ed ordinata (Loria, 1929-1933, pp. 407-408).

un'importante intuizione del concetto di limite che esporremo brevemente (seguendo: Maracchia, 1992)[16].

Riportiamo, nelle formulazioni originali, tre proposizioni tratte dal secondo libro di *De centro gravitatis solidorum* (faremo riferimento all'edizione bolognese del 1661, p. 69)[17]:

"Propositio I. Si duæ magnitudines unà maiores, vel minores prima, & tertia minori excessu, vel defectu quantacumque magnitudine proposita eiusdem generis cum illa, ad quam refertur, eandem portionem habuerint, maior vel minor tertia ad quartam; erit ut prima ad secundam, ita tertia ad quartam"[18].

---

[16] Valerio, nell'apertura del primo libro di *De centro gravitatis solidorum*, ricorda le ricerche di Commandino: "Propositum est mihi in hisce tribus libris, ò Geometra, cuiuscumque figuræ solidæ in Geometria ratio haberi solet, centrum gravitatis invenire. Huius autem provinciæ mihi suscipiendæ occasio fuit liber ille iampridem editus Federici Commandini Urbinatis, in quo cum ille corporum planis terminis definitorum, necnon cylindri, & coni, & frusti conici, & spheræ, & spheroidis centrum gravitatis ostendisset..." (Valerio, 1661, p. 1).

[17] *De centro gravitatis solidorum* fu dunque riedita, con la *Quadratura parabolae*, proprio negli anni delle decisive ricerche di Newton e di Leibniz sul Calcolo. Ricorda E. Giusti: "Dalla tipografia degli eredi del Dozza escono nel 1650 la seconda edizione de *Lo specchio ustorio*, e nel 1653 quella della *Geometria indivisibilium* di Cavalieri; nel 1656 le *Opere di Galilei*; nel 1660 la terza edizione ampliata dell'opera di B. Castelli *Della misura delle acque correnti* e la *Collezione matematica* di Pappo; nel 1661 (ma il frontespizio della *Quadratura parabolae* porta la data 1660) la seconda edizione del *De centro gravitatis* e della *Quadratura parabolae* di Luca Valerio; e infine nel 1669 gli *Opuscoli filosofici* di B. Castelli... Questo programma... è annunciato esplicitamente nella prefazione *Lectori matheseos studioso* della *Collezione*" (Giusti, 1993, p. 131).

[18] "Se due grandezze, insieme maggiori o minori [rispettivamente] di una prima e terza per una quantità minore, in eccesso o in difetto, di una qualsiasi grandezza finita dello stesso genere di quella cui ci si riferisce, hanno la stessa proporzione, [quel]la [che era] maggiore o minore della prima alla seconda e insieme [quel]la [che era] maggiore o minore della terza alla quarta [allora] come la prima sta alla seconda, così la terza sta alla quarta" (Maracchia, 1992, p. 272).

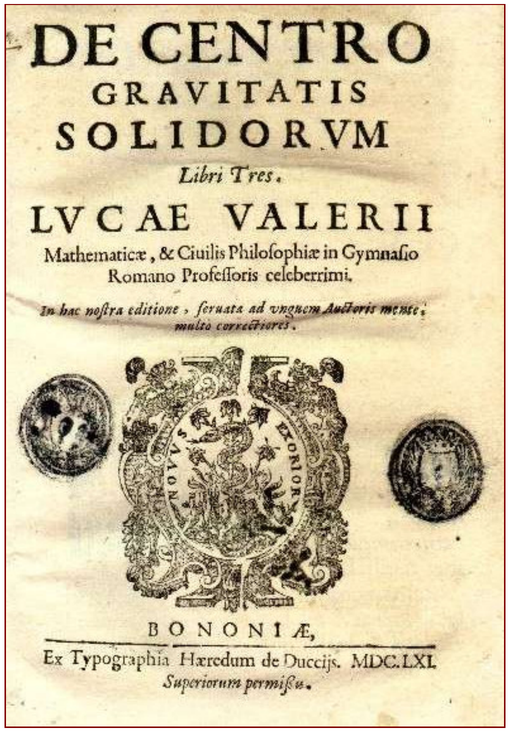
La dimostrazione di questa proposizione non differisce sostanzialmente dall'applicazione del metodo di esaustione[19]. Osserva S. Maracchia che "ciò non toglie che nella sostanza la differenza tra le due dimostrazioni sia notevole. In Euclide, e questo vale anche per le dimostrazioni di Archimede, si opera su grandezze *determinate* e si dimostrano volta per volta tutte le condizioni necessarie per la conclusione. In Luca Valerio, invece, si parla di *grandezze del tutto generiche*: ... con Luca Valerio si è raggiunta una generalizzazione *consapevole* dei procedimenti singoli di Euclide e di Archimede" (Maracchia, 1992, pp. 275-276).

La seconda proposizione del secondo libro di *De centro gravitatis solidorum* (Valerio, 1661, p. 72) è:

"Propositio II. Si maior, vel minor prima ad unà maiorem. vel minorem secunda, minori utriusque excessu,

[19] Quanto affermato da Valerio fu oggetto di molte ricerche. E. Giusti nota che l'enunciato citato corrisponde ad un risultato di *Euclides restitutus* (1658) di Giovanni Alfonso Borelli (1608-1679): "Si fuerint quatuor quantitates & duae aliae proportionales conseguentibus sint una maiores, aut una minores antecedentibus excessu, vel defectu a prima minori quocumque dato, erunt illae proportionales". Nota Giusti: "Gli enunciati delle due proposizioni, più prolisso quello di Valerio, più stringato quello di Borelli, non coincidono perfettamente. In ambedue i casi si richiede che sia possibile approssimare arbitrariamente gli antecedenti con grandezze che conservano la stessa proporzione. Ma mentre Valerio richiede che l'approssimazione sia possibile da un solo lato (ad esempio con grandezze maggiori), in modo che ambedue gli eccessi delle approssimanti (sulla prima e sulla terza) siano piccoli a piacere, Borelli impone questa approssimazione solo riguardo alla prima, ma richiede una convergenza sia dall'alto che dal basso. Modernamente il risultato di Valerio si può enunciare così: siano a, b, A, B quattro grandezze, e si supponga che fissate comunque le grandezze e, E (omogenee ad a, b e a A, B rispettivamente) si possano trovare due grandezze c, C, maggiori rispettivamente di a e di A, e tali che $c-a<e$, $C-A<E$ e $c:b = C:B$. Allora $a:b = A:B$. Mentre quello di Borelli è equivalente a: Date quattro grandezze a, b, A, B, si supponga che, fissata comunque una grandezza e omogenea ad a e b, esistano due grandezze c, C rispettivamente maggiori, e due grandezze d, D rispettivamente minori di a ed A, tali che $c-a<e$, $a-d<e$, e inoltre $c:b = C:B$ e $d:b = D:B$. Allora $a:b = A:B$" (Giusti, 1993, p. 131).

vel defectu quantacumque magnitudine proposita fuerit ut tertia ad quartam; erit ut prima ad secundam, ita tertia ad quartam"[20].


DE CENTRO
GRAVITATIS
SOLIDORVM
Libri Tres.
LVCAE VALERII
Mathematicæ, & Ciuilis Philosophiæ in Gymnasio
Romano Professoris celeberrimi.
In hac nostra editione, seruata ad vnguem Auctoris mente, multo correctiores.
NOVVS EXORIOR
BONONIÆ,
Ex Typographia Hæredum de Duccijs. MDC.LXI.
Superiorum permissu.

L'edizione del 1661 di *De centro gravitatis solidorum* di Luca Valerio

S. Maracchia indica la possibilità di tradurre in linguaggio moderno le proposizioni di Valerio ed afferma: "Noi oggi scriveremmo: se lim E = A e lim F = B, allora lim E/F = A/B, cioè il limite del rapporto è uguale al rapporto dei limiti. Naturalmente quello che oggi noi vediamo ed interpretiamo non era del tutto avvertito da Luca Valerio...

[20] "Se una grandezza maggiore o minore di una prima sta ad un'altra grandezza, maggiore o minore di una seconda, entrambe maggiori o minori per un eccesso o difetto minore di una grandezza comunque fissata, come una terza ad una quarta, allora la prima starà alla seconda come la terza alla quarta" (Maracchia, 1992, p. 277).

Resta il fatto però che egli aveva stabilito la possibilità di *sostituire* a determinate grandezze variabili il loro limite" (Maracchia, 1992, p. 278).

Esaminiamo la terza proposizione del secondo libro di *De centro gravitatis solidorum*:

"Propositio III. Sit maior, vel minor prima ad unà maiorem, vel minorem secunda, minori excessu, vel defectu quantacumque magnitudine proposita, nominatam habuerit proportionem; prima ad secundam eandem nominatam habebit proportionem" (Valerio, 1661, p. 74)[21].

Questa proposizione è quella nella quale più chiaramente appare un'indicazione del concetto di limite. Essa, diversamente dalle precedenti che riguardano proporzioni, si riferisce ad un rapporto e questo è "un nuovo passo avanti nella intuizione del limite... Oggi esprimeremmo infatti la proposizione di Luca Valerio nel seguente modo: se lim E = A e lim F = B e se E/F = K, allora A/B = (lim E)/(lim F) = lim E/F = K" (Maracchia, 1992, pp. 278 e 279; si veda inoltre: Arrigo & D'Amore, 1992, p. 74).

Dunque Valerio fu certamente uno dei più importanti precursori della svolta decisiva dovuta a Newton ed a Leibniz e la sua impostazione appare sempre lucida e moderna (Bottazzini; Freguglia & Toti Rigatelli, 1992, p. 228): si noti ad esempio che, mentre i geometri greci (in particolare Archimede) si erano occupati esclusivamente di curve di cui fosse nota la definizione o il procedimento costruttivo, Valerio estese significativamente la propria considerazione a curve qualsiasi (ricordiamo che la

[21] "Se una [grandezza] maggiore o minore di una prima con un'altra [grandezza] maggiore o minore di una seconda, entrambe [maggiori insieme o minori] per eccesso o difetto minore di una grandezza comunque fissata, avrà un determinato rapporto; [allora anche] la prima avrà con la seconda lo stesso determinato rapporto" (Maracchia, 1992, pp. 278-279).

Matematica del XVII secolo sancì, con le ricerche cartesiane, il definitivo superamento dell'impostazione ellenica in materia).

Galileo attribuì a Luca Valerio l'appellativo di "nuovo Archimede" (Castelnuovo, 1938, p. 39): forse l'accostamento può essere considerato generoso, ma certamente l'importanza delle opere di Valerio nella preistoria dell'Analisi è rilevante ed esse devono dunque essere considerate a fianco dei lavori di Cavalieri, di Torricelli, di Fermat (Cavalieri, 1989; sull'autore del metodo degli indivisibili: Frisi, 1825; Piola, 1844; per i lavori originali: Fermat, 1891).

4.2. La nascita dell'Analisi matematica

4.2.1. Newton e Leibniz

> "If I have seen farther than others, it is because I have stood on the shoulders of giants".
>
> Isaac Newton

Dopo le molte ricerche preparatorie che nel XVII secolo fissarono i presupposti per la precisazione dei principali concetti infinitesimali[22], la storia della moderna Analisi matematica si aprì con una lunga ed aspra contesa. I protagonisti di questa fase sono i due creatori del Calcolo

[22] Nel paragrafo precedente abbiamo presentato l'opera di Luca Valerio; ciò non esaurisce le molte ricerche che prepararono l'entrata in scena di Newton e di Leibniz. Ricordiamo Johannes Kepler (1571-1630), Bonaventura Cavalieri (1598-1647), Gilles Personne de Roberval (1602-1675), Evangelista Torricelli (1608-1647), John Wallis (1616-1703), Isaac Barrow (1630-1677) e rimandiamo il lettore alla bibliografia (Castelnuovo, 1938; D'Amore & Matteuzzi, 1975; Kline, 1991, I; Anglin, 1994). Per alcuni testi originali: Smith, 1959; Bottazzini, Freguglia & Toti Rigatelli, 1992.

infinitesimale, Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)[23].

Sembra ormai accertato che, dal punto di vista cronologico, sia stato Newton a scoprire per primo il Calcolo (lavorò infatti sul metodo delle flussioni dal 1665), ma egli ritardò la diffusione dei proprî risultati: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* risale al 1686-1687 e *Tractatus de quadratura curvarum* al 1704; l'opera *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* (della quale ci occuperemo nel paragrafo seguente: Newton, 1740) fu pubblicata postuma nel 1736. Con i lavori di Newton il Calcolo poteva essere considerato concettualmente a punto; ma, come potremo constatare, sarà Leibniz che darà ordine di metodo e introdurrà una simbologia efficace (Castelnuovo, 1938).

I contatti tra i due pensatori avvennero esclusivamente per via epistolare e furono indiretti: ricordiamo tuttavia che Newton, in una lettera del 1676, comunicò a Leibniz un'indicazione sul proprio metodo con la scrittura seguente:

6A CC D Æ 13E FF 7I 3L 9N 4O 4Q RR 4S 8T 12V X

La chiave per interpretare questo "messaggio" newtoniano è piuttosto semplice: il matematico inglese non aveva fatto altro che elencare in ordine alfabetico le settantanove lettere necessarie per scrivere la frase:

DATA ÆQVATIONE QVOTCVNQVE FLVENTES QVANTITATES INVOLVENTE FLVXIONES INVENIRE ET VICEVERSA

Mentre la codificazione, ovvero il passaggio dalla frase al "codice", non crea alcun problema, non altrettanto facile

[23] Le relazioni tra Newton e Leibniz furono, in una prima fase, "non dirette ma improntate a stima e perfettamente cortesi" (Loria, 1929-1933, p. 613).

è la decodificazione; è pressoché impossibile risalire dal codice alla frase di partenza. Inoltre concordiamo con Loria, il quale rileva che "ove pure Leibniz fosse riuscito a decifrare quell'enigma, ben poco avrebbe progredito nella conoscenza dei procedimenti newtoniani" (Loria, 1929-1933, p. 613; per la corrispondenza newtoniana si veda: Turnbull, Scott, Rupert Hall & Tilling, 1959-1977)[24].

4.2.2. L'impostazione newtoniana

Non riteniamo molto interessante ripercorrere la controversia che finì per dividere due intere scuole matematiche (sulla scuola inglese, che restò a lungo isolata, si veda ad esempio: Guicciardini, 1989). Ricordiamo peraltro che una grande scoperta è spesso frutto degli sforzi congiunti di molti grandi pensatori[25].

Nell'opera di Newton i concetti fondamentali sono quelli di fluente (termine con cui si indica una quantità che varia in funzione del tempo) e di flussione (la corrispondente derivata rispetto al tempo, indicata con un punto collocato

---

[24] Possiamo dunque affermare che Newton non sembrò manifestare l'intenzione di comunicare a Leibniz i proprî risultati. Riteniamo che egli abbia inviato la lettera sopra ricordata con l'intenzione di fissare una data, di stabilire una priorità. Nota a tale riguardo N. Bourbaki: "Durante questo scambio di lettere, che non avviene direttamente fra gli interessati, ma ufficialmente tramite il segretario della Royal Society, Newton *prend date* annunciando il suo metodo con un anagramma" (Bourbaki, 1963, p. 193).

[25] Ricordiamo (e condividiamo) alcune osservazioni di M. Kline: "I grandi progressi della Matematica e della scienza hanno quasi sempre origine nell'opera di molti studiosi che portano ciascuno il loro contributo...; alla fine, un uomo d'ingegno abbastanza acuto per saper distinguere le idee valide nella gran massa dei suggerimenti e delle dichiarazioni dei suoi predecessori, dotato dell'immaginazione occorrente per incastonare le varie tessere in un nuovo mosaico e audace quanto basta per costruire un progetto generale, compie il passo culminante. Nel caso del Calcolo infinitesimale quest'uomo fu Newton" (Kline, 1991, I). Inoltre: Frajese, 1969; Struik, 1981.

al di sopra della lettera che indica la fluente. Si veda ad esempio: Newton, 1740)[26].

Ricordiamo che "le flussioni sono, per Newton, determinate a meno di un fattore di proporzionalità. Ciò dipende dall'arbitrio nella scelta del parametro *t*" (Castelnuovo, 1938, p. 104). Per quanto riguarda la formula ottenuta, essa va riferita alla regola di derivazione delle funzioni implicite, che era stato applicata, ma soltanto in alcuni casi particolari, da Fermat (Bottazzini, Freguglia & Toti Rigatelli, 1992, pp. 258-260. Significativi esempi originali possono essere tratti da: *Methodus fluxionum et serierum infinitarum*: Newton, 1740; ad esempio: "Problema I. Essendo data la relazione delle quantità fluenti, trovare la relazione delle loro flussioni. Esempio I", p. 22)[27].

Il procedimento newtoniano (e l'impostazione dell'Analisi del massimo scienziato inglese) deve essere considerato ineccepibile per precisione e per efficacia. Il suo contenuto è eccezionalmente innovativo; ma forse proprio in questa sua travolgente novità, in questa straordinaria altezza concettuale è insita la sua latente debolezza: è facile infatti rendersi conto che la riconosciuta modernità contenutistica del Calcolo di Newton non è accompagnata da uno strumento formale adeguato. L'Analisi newtoniana resta un procedimento "ostico", tecnico e comunque difficile da comprendere appieno e da applicare: Newton non fu in grado di proporre un

---

[26] "Le sistemazioni che Newton ideò per il Calcolo infinitesimale furono due: il cosiddetto Calcolo delle flussioni e quello delle prime e ultime ragioni. Malgrado la maggior speditezza di quello rispetto a questo... è degno di nota che nei *Principia* egli abbia posto a fondamento della sua trattazione della meccanica il metodo delle prime e ultime ragioni" (Geymonat, 1970, II, p. 630). Inoltre: Koyré, 1983; Westfall, 1989.

[27] Per quanto riguarda le importanti ricerche di I. Barrow a proposito della costruzione della tangente ad una curva assegnata mediante un analogo procedimento, si veda: Castelnuovo, 1938, p. 93. Inoltre: Kline, 1991, I; Edwards, 1994.

linguaggio in grado di esaltare le possibilità concettuali del Calcolo. Come vedremo, la messa a punto dell'aspetto formale e del linguaggio dell'Analisi è dovuta a Leibniz.

4.2.3. L'impostazione di Leibniz

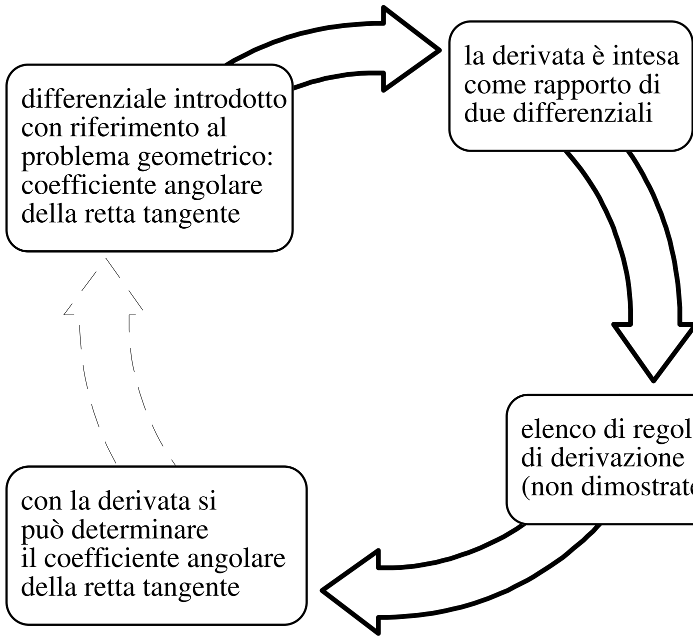
Sottolineiamo che, ad un'attenta lettura, la prima introduzione che Leibniz dà del differenziale e della derivata può apparire viziata di circolo (seguiremo: Castelnuovo, 1938, pp. 110-112): egli, in *Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus, quae nec fracta, nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus* (Leibniz, 1684 e 1849-1863) definisce infatti innanzitutto il differenziale di $y = f(x)$ sulla base del coefficiente angolare della retta tangente al grafico (ovvero della derivata prima)[28]. Quindi fornisce, senza una completa dimostrazione, un ampio elenco di regole di derivazione (affermando: "La dimostrazione di tutte le regole esposte sarà facile per chi è versato in questi studî", traduzione in: Castelnuovo, 1938, p. 168).

Solo successivamente, infine, Leibniz fa riferimento all'interpretazione geometrica della derivata ed afferma che essa può essere utilizzata per "ottenersi i massimi e i minimi, come pure le tangenti" (Castelnuovo, 1938, p. 111; si veda inoltre: Kline, 1991, pp. 439-441)[29]:

---

[28] "Dallo studio delle *Lettres* di Pascal in particolare Leibniz rilevò l'importanza del cosiddetto «triangolo caratteristico»... Come applicazione del «triangolo caratteristico», Leibniz ottenne una particolare trasformazione di quadrature, che egli chiamò «trasmutazione»" (Bottazzini, 1990, p. 12). Inoltre: Loria, 1929-1933, p. 585; Bos, 1975; Barone, 1992; Edwards, 1994.

[29] Per l'elenco rinviamo a: Arrigo & D'Amore, 1992, pp. 108 -109.



Dunque la mancanza di una moderna comprensione del concetto di limite e del suo ruolo alla base della nozione di derivata ha inizialmente portato Leibniz a dare definizioni che non sarebbero, ai giorni nostri, pienamente accettate (e questa osservazione può essere utile alla didattica dei concetti infinitesimali).

Ricordiamo peraltro che il concetto di differenziale subì numerosi aggiustamenti nell'opera leibniziana[30], talvolta

[30] L'atteggiamento di Leibniz nei confronti del differenziale ebbe un'evoluz ione (Dupont, 1981, II-2, p. 713): all'inizio (1675) egli ometteva la sua indicazione nella notazione dell'integrale (assumendo $dx = 1$ ed identificando il differenziale dy con la derivata dy/dx: Bourbaki, 1963, p. 199). Più tardi, però, Leibniz scrisse: "Raccomando di fare attenzione a non omettere dx, ... errore frequentemente commesso e che impedisce di andare oltre, poiché si privano questi indivisibili, come qui dx, della loro generalità" (Leibniz, 1849-1863, V, p. 233). Alla base di queste varie posizioni furono le difficoltà collegate all'infinitesimo attuale ed alla composizione del continuo (Bagni, 1996, II). F. Enriques scrive: "La derivazione della funzione $y = f(x)$ viene considerata da lui come quoziente di due *differentiae* o (come si è detto in seguito secondo Giov. Bernoulli e L. Eulero) di due differenziali... Se questi incrementi

anche nel senso (del tutto estraneo all'impostazione di Newton) dell'infinitesimo attuale[31]; dunque le interpretazioni dei due grandi creatori del Calcolo infinitesimale sono ben diverse e per molti versi appaiono complementari[32].

4.2.4. La notazione leibniziana

Il ruolo di Leibniz nella fase che portò alla precisazione dei principali concetti dell'Analisi matematica deve essere considerato della massima importanza principalmente per quanto riguarda l'elaborazione di un efficace e moderno apparato formale per lo strumento matematico introdotto.

Scopo principale della ricerca di Leibniz non era infatti quello di risolvere problemi concreti (ad esempio collegati alla meccanica, come era accaduto nel caso delle opere fisiche di Newton), bensì quello di organizzare un algoritmo efficace, regolato da principî chiari e semplici[33].

---

vadano intesi soltanto in senso potenziale, cioè come quantità variabili evanescenti, ovvero staticamente come infinitesimi attuali non appare chiaramente nell'opera di Leibniz" (Enriques, 1938, p. 60).

[31] "La distinzione fondamentale fra l'opera dei due grandi matematici consiste nel fatto che Newton usava gli incrementi infinitamente piccoli di *x* e di *y* come mezzo per determinare la flussione o derivata, che era essenzialmente il limite del rapporto degli incrementi quando essi diventavano sempre più piccoli. Leibniz, invece, maneggiava direttamente gli incrementi infinitamente piccoli di *x* e di *y*, cioè i differenziali, e ne determinava le relazioni. Questa differenza riflette l'orientamento da fisico di Newton, per cui era d'importanza centrale un concetto come la velocità, e l'atteggiamento da filosofo di Leibniz" (Kline, 1991, I, p. 442).

[32] "Sia a Newton sia a Leibniz bisogna attribuire il merito di aver visto nel Calcolo infinitesimale un nuovo metodo generale applicabile a molti tipi di funzioni. Dopo di loro, il Calcolo infinitesimale non fu più una semplice appendice o un'estensione della Geometria greca, ma una scienza indipendente capace di affrontare una gamma molto estesa di problemi" (Kline, 1991, I, p. 442). Per l'evoluzione dell'Analisi indichiamo: Bottazzini, 1981 e 1990.

[33] La scelta di Leibniz non fu limitata al particolare caso dell'Analisi: anche la moderna scrittura simbolica algebrica è infatti largamente riconducibile alla notazione

Abbiamo precedentemente notato che Newton usava per le fluenti le lettere e per le corrispondenti flussioni (le loro derivate prime) le stesse lettere puntate (per le rispettive derivate seconde, le lettere venivano contrassegnate da due punti); *in tali indicazioni la variabile indipendente era sempre il tempo*. Leibniz invece *non si riferiva esclusivamente a quantità variabili in funzione del tempo* e ritenne dunque opportuno evidenziare nella notazione della derivata anche la particolare variabile indipendente considerata; egli introdusse il simbolo della derivata in modo diverso (e certamente assai più chiaro e più completo) rispetto alla convenzione newtoniana, optando dunque per l'esplicita indicazione del rapporto dei differenziali della variabile dipendente (y) e della variabile indipendente (x), ovvero scrivendo: dy/dx.

La fortuna di questa notazione è legata anche a considerazioni pratiche ed intuitive[34]: infatti, sebbene sappiamo modernamente che dy/dx è il limite di un quoziente e non un quoziente propriamente detto, possiamo constatare che la derivata si "comporta" talvolta esattamente come un quoziente; un esempio di ciò si ha nelle diffusissime formule per la derivazione della funzione composta:

$$dz/dx = (dz/dy)(dy/dx)$$

e per la derivazione della funzione inversa:

$$dx/dy = 1/(dy/dx)$$

leibniziana; tra le principali innovazioni introdotte da Leibniz ricordiamo l'uso delle parentesi e la scrittura dei logaritmi e degli esponenziali.

[34] In alcune applicazioni la notazione leibniziana viene ad essere particolarmente utile ed intuitiva quando i differenziali dx, dy, ... indicano quantità "molto piccole" (sebbene lo stesso Leibniz mostri in numerose occasioni di nutrire rilevanti perplessità sulla natura dell'infinitesimo: Castelnuovo, 1938).

4.2.5. Un diffuso trattato del marchese de l'Hôpital

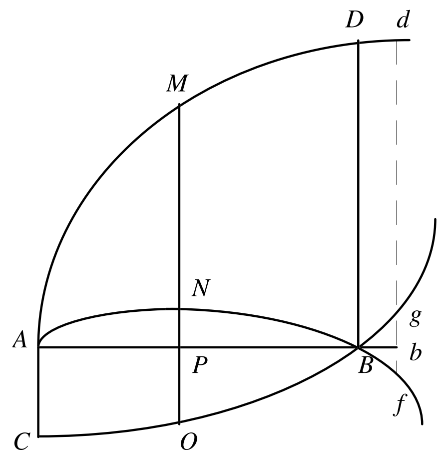
Tra i molti manuali di Analisi pubblicati a partire dalla fine del XVII secolo (Pepe, 1984) esamineremo brevemente *Analyse des infiniment petits* del marchese Guillaume de L'Hôpital (1661-1704), un trattato tra i più diffusi[35]. Premettiamo che esso deve essere considerato un'opera non del tutto originale (si tratta di una compilazione di risultati di altri Autori)[36]; ma ciò non deve far dimenticare la notevole efficacia didattica del manuale.

Ci riferiremo alla seconda edizione del lavoro, *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*, pubblicata a Parigi nel 1716. Presenteremo l'introduzione originale di uno dei risultati più frequentemente utilizzati, noto come *regola di de l'Hôpital*:

"Sia data una linea curva AMD ($AP = x$, $PM = y$, $AB = a$) tale che il valore dell'applicata y sia espresso da una frazione il cui numeratore e denominatore si annullino quando $x = a$, ovvero quando il punto P cade sull'assegnato punto B. Si domanda quale deve allora essere il valore dell'applicata BD.

[35] "Il volume di de l'Hôpital, scritto in maniera chiara e stimolante, ottenne uno straordinario successo, fu uno strumento formidabile per la diffusione del Calcolo leibniziano e, su di esso, impararono il Calcolo generazioni di matematici" (Bottazzini, 1990, p. 22). Nel 1707 (postumo) apparve il *Traité analytique des section coniques*.

[36] Ricordiamo ad esempio che Jean Bernoulli (1667-1748) fu lo scopritore delle celebri *regole di de L'Hôpital* sul calcolo dei limiti in forma indeterminata, delle quali ci occuperemo in questo paragrafo; pare che la scoperta sia stata ceduta da Bernoulli a de L'Hôpital in cambio di una somma di denaro (Boyer, 1982, p. 483).



Siano considerate due linee curve *ANB*, *COB* che abbiano per asse comune la retta *AB* e siano tali che l'applicata *PN* esprima il numeratore e l'applicata *PO* il denominatore della frazione generale soddisfatta da tutte le *PM*: in modo che:

$$PM = \frac{AB \times PN}{PO}$$

È chiaro che queste due curve si incontreranno nel punto *B*; poiché per l'ipotesi *PN* e *PO* si annullano quando il punto *P* cade in *B*. Ciò posto, se si immagina un'applicata *bd* infinitamente vicina [infiniment proche] a *BD* e che incontra le linee curve *ANB*, *COB* nei punti *f*, *g*, si avrà:

$$bd = \frac{AB \times bf}{bg}$$

che non differisce da *BD*.

Dunque non si tratta che di trovare il rapporto di *bg* con *bf*. Ora si vede che, quando *AP* diventa *AB*, le applicate *PN* e *PO* si annullano e che, quando *AP* diventa *Ab*, esse diventano *bf*, *bg*. Da ciò segue che queste stesse applicate *bf*, *bg* sono la differenza delle applicate in *B* e in *b* rispetto alle curve *ANB*, *COB* e quindi che se si prende la differenza del numeratore e la si divide per la differenza del denominatore, dopo aver posto $x = a = Ab$ o AB si avrà il valore cercato sull'applicata bd o BD. Cosa che dovevamo trovare" (L'Hôpital, 1716, pp. 145 -146; la traduzione è nostra; il passo è riportato anche in: Bottazzini, Freguglia & Toti Rigatelli, 1982, pp. 299-300).

Non possiamo dare conto dei moltissimi manuali di Analisi matematica pubblicati tra la fine del Seicento e l'Ottocento: l'entusiasmo per la diffusione delle tecniche dell'Analisi portò infatti all'esigenza di strumenti didattici per la diffusione delle nuove conoscenze ed alcuni tra i maggiori matematici si impegnarono nella redazione di trattati didattici di alto livello[37].

Pregevoli sono alcune opere dei componenti della famiglia trevigiana Riccati, in particolare di Jacopo (1676-1754) e del figlio Vincenzo (1707-1775). Quest'ultimo, con il proprio allievo Girolamo Saladini (1731-1813), scrisse le *Institutiones Analyticae*, in due volumi pubblicati nel 1765 e nel 1767, che raggiunsero nel volgere di pochi mesi una vasta notorietà[38].

---

[37] "Il XVIII secolo fu, per eccellenza, il secolo dei manuali di Matematica: mai prima di allora erano usciti tanti libri in edizioni così numerose" (Boyer, 1982, p. 531).

Uno dei più celebri manuali di Analisi matematica è dovuto a Maria Gaetana Agnesi (1718-1799): si tratta delle *Istituzioni analitiche*, pubblicate a Milano nel 1748. Nello stesso anno in cui venne edito il trattato di Agnesi, Euler pubblicò a Losanna la celebre *Introductio in analysin infinitorum* (abbiamo esaminato la prima edizione francese: Euler, 1796), che sarà seguita dalle *Institutiones Calculi Differentialis* (1755; si veda: Euler, 1787a) e dalle *Institutiones Calculi Integralis* (opera risalente al 1768-1780: Langer, 1735).

[38] I lavori di Jacopo Riccati sono raccolti nella grande edizione lucchese *Opere* (Riccati, 1761, 1762, 1763 e 1765). A tale pubblicazione contribuirono largamente i figli Vincenzo e Giordano (1709-1790). Per quanto riguarda le equazioni differenziali, si veda in particolare: *Della separazione delle indeterminate nelle equazioni differenziali di primo grado, e della riduzione delle equazioni differenziali del secondo grado, e d'altri gradi ulteriori*, in cui sono riportate e commentate le lezioni tenute dall'Autore a Lodovico da Riva ed a Giuseppe Suzzi nel 1722; il trattato è

Una delle opere più importanti del XIX secolo è il già citato *Cours d'Analyse* di Augustin Louis Cauchy (1789-1857); ma dovrebbero essere ricordati anche altri manuali di Analisi: ad esempio, nel 1804 fu pubblicato il *Corso di Matematica sublime* di Vincenzo Brunacci (1768-1818); Sylvestre-François Lacroix (1765-1843) fu autore di un diffuso *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* (al quale ci riferiamo nell'edizione del 1837). In tale opera, egli fu il primo ad introdurre il termine "coefficiente differenziale" per indicare la derivata; inoltre definì il differenziale di una funzione sulla base della derivata della funzione stessa, ovvero nella forma (oggi accettata) $dy = f'(x)dx$ (Lacroix, 1837).

4.3. Riflessioni sull'infinito

4.3.1. Infinito (e infinitesimo) potenziale ed attuale

La genesi del concetto di infinito è lunga e delicata, nella storia della Matematica. In particolare, la considerazione

---

pubblicato in *Opere*, I, pp. 433-598. L'equazione differenziale che sarà denominata *equazione di Riccati* (Grugnetti, 1985 e 1986) è presentata, originariamente, nelle due memorie *Animadversiones in aequationes differentiales secundi gradus*, in: "Acta Eruditorum Lipsiae", 1722, e *Appendix in animadversiones in aequationes differentiales secundi gradus*, in: "Acta Eruditor um Lipsiae", 1723: anche queste note sono riportate in *Opere*, III, pp. 83-88 e 90-97. Tra i lavori di Jacopo Riccati ricordiamo anche *Della separazione delle indeterminate nelle equazioni differenziali di primo grado, e della riduzione delle equazioni differenziali del secondo grado, e d'altri gradi ulteriori*, in *Opere*, I, Giusti, Lucca, 433-598 (Bagni, 1988, 1990, 1992, 1995a e 1997c). Scrive M. Kline: "L'opera di Riccati è significativa non soltanto perché considerò equazioni differenziali del second'ordine, ma anche perché ebbe l'idea di ricondurre le equazioni del second'ordine a equazioni del prim'ordine. Quest'idea di ridurre l'ordine di un'equazione differenziale ordinaria... si rivelerà uno dei metodi fondamentali per la trattazione delle equazioni differenziali ordinarie di ordine superiore" (Kline, 1991, I, pp. 564-565). Per quanto riguarda Vincenzo Riccati, interessante è il trattato del 1752 *De usu motus tractorii in constructione Aequationum Differentialium Commentarius* (Bagni, 1993 e 1995b).

dell'infinito in termini *potenziali* contrapposto all'infinito *attuale* è antica; ricordiamo la spiegazione di L. Geymonat:

"Si dice che una grandezza variabile costituisce un 'infinito potenziale' quando, pur assumendo sempre valori finiti, essa può crescere al di là di ogni limite; se per esempio immaginiamo di suddividere un segmento con successivi dimezzamenti... il numero delle parti a cui perveniamo, pur essendo in ogni caso finito, può crescere ad arbitrio. Si parla invece di 'infinito attuale' quando ci si riferisce ad un ben determinato insieme, effettivamente costituito da un numero illimitato di elementi; se per esempio immaginiamo di aver scomposto un segmento in tutti i suoi punti, ci troveremo di fronte a un infinito attuale, perché non esiste alcun numero finito che riesca a misurare la totalità di questi punti" (Geymonat, 1970, I, p. 58).

Già Aristotele di Stagira (384-322 a.C.) distinse chiaramente le due nozioni ed impose la considerazione dell'infinito esclusivamente in termini potenziali (si veda ad esempio: Bostock, 1972-1973)[39].

L'efficacia intuitiva dell'infinito potenziale, concepito nei termini di una quantità che può essere progressivamente ed indefinitamente incrementata, può rendere preponderante il ruolo di tale idea nei confronti del concetto, matematicamente impegnativo, di infinito attuale (Tsamir & Tirosh, 1992). Ciò può essere collegato al diverso ruolo della componente astratta nelle concezioni potenziale e attuale dell'infinito. L'infinito potenziale, infatti, si basa su di un modello piuttosto semplice: è possibile immaginare, senza difficoltà, la ripetizione di un atto concreto. Ad esempio, non sono richieste capacità particolari per

[39] Ciò per evitare il sorgere di situazioni paradossali (ad esempio i paradossi di Zenone: Arrigo & D'Amore, 1992, pp. 29-34). L'antica impostazione aristotelica influenzò a lungo la concezione dell'infinito (Arrigo & D'Amore, 1992, p. 41).

immaginare l'atto di aggiungere un elemento ad un insieme (si può pensare di inserire una nuova pallina in un sacchetto con altre palline) o l'atto di muovere un passo in avanti su di una strada. Né sono richieste capacità particolari per immaginare l'indefinita ripetizione di tale atto: basta pensare di rifare la stessa cosa moltissime volte, senza fermarsi. Così viene "immaginato" l'infinito (potenziale).

A quale modello, invece, si fa riferimento per dar corpo al concetto di infinito in senso attuale? Com'è possibile (nelle parole sopra citate di L. Geymonat) riferirsi «ad un ben determinato insieme, effettivamente costituito da un numero illimitato di elementi»? La situazione è molto meno semplice: la considerazione degli (infiniti) punti di un segmento, ad esempio, può essere causa di rilevanti problemi, come il conflitto tra la nozione di insieme *infinito* e di insieme *illimitato* (si veda: D'Amore, 1996 e 1997) [40].

Anche nel caso dell'infinitesimo si ripropone la distinzione tra la concezione potenziale e quella attuale, certamente molto più impegnativa: un infinitesimo potenziale è una quantità che può essere ridotta progressivamente ed avvicinata indefinitamente ad una quantità nulla, pur senza annullarsi mai (questa concezione sta alla base dell'introduzione didattica del concetto di limite).

---

[40] Dal punto di vista teorico, sarebbe opportuno fare riferimento alla corretta e profondissima impostazione cantoriana della questione; ma l'introduzione rigorosa degli insiemi dei cardinali transfiniti è considerata assai difficile. Ricordiamo che, nel XIX secolo, le ricerche di Georg Cantor (1845-1918) sugli insiemi infiniti portarono a risultati di enorme importanza (Bottazzini, 1990, p. 252) e alla rivalutazione del concetto di infinito attuale (Bottazzini, Freguglia & Toti Rigatelli, 1992, p. 428). Per molto tempo, però, le idee cantoriane furono considerate astruse (se non addirittura insostenibili; si veda ad esempio: Kline, 1991, II, p. 1172; Boyer, 1982, p. 655). E la trattazione degli insiemi infiniti (e dei cardinali transfiniti) non fu ad esempio inclusa nei programmi tradizionali delle scuole secondarie. Per la didattica dell'infinito si veda: Arzarello, 1980.

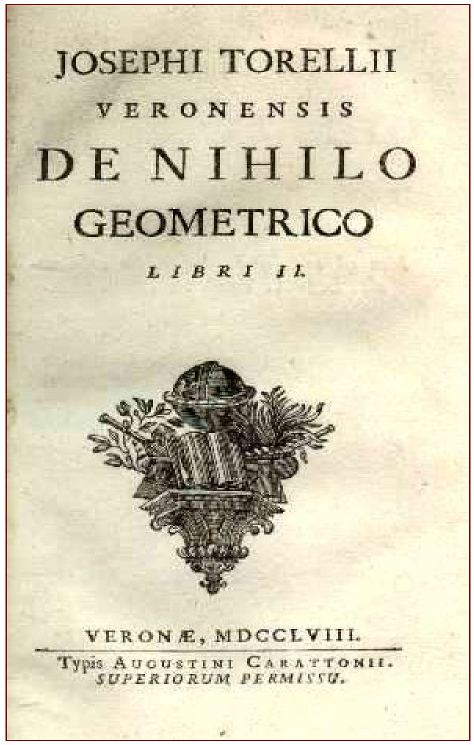
La corretta e moderna introduzione delle nozioni principali dell'Analisi matematica, in particolare dei concetti di infinitesimo e di infinito (da intendersi in senso potenziale molto più che in senso attuale), fu storicamente preceduta da un lungo periodo di tentativi e di incertezze. In questa sezione presenteremo alcune idee proposte, nel XVIII secolo, da uno studioso italiano la cui opera è solo marginalmente considerata dalla storiografia matematica.

4.3.2. Torelli e l'infinitesimo attuale

Giuseppe Torelli (Verona, 1721-1781) è ricordato per un'edizione delle *Opere* di Archimede in greco e in latino, pubblicata a Oxford nel 1792 da A. Robertson sulla base di materiali dovuti allo studioso veronese, acquistati presso gli eredi (Loria, 1929-1933, pp. 786-787). Il capolavoro torelliano è *Archimedis quae supersunt omnia, cum Eutocii Ascalonitae commentariis*, "un'opera tipograficamente splendida" (ricorda A. Frajese in: Archimede, 1974, p. 39); Torelli si occupò inoltre della riorganizzazione cronologica dei lavori archimedei.

Torelli merita però l'attenzione degli storici della scienza anche per alcune idee espresse in *De nihilo geometrico libri II*, un breve ma stimolante lavoro (117 pagine in-VIII) pubblicato nel 1758 a Verona da A. Carattoni. Ci occuperemo specificamente di quest'ultima opera, il cui interesse storico e didattico appare rilevante anche agli occhi dei matematici contemporanei[41].

[41] P. Riccardi, nella propria *Biblioteca matematica italiana dalle origini della stampa ai primi anni del secolo XIX* (1893 e 1928), così ricorda *De nihilo geometrico*: "L'Autore tentò di sostituire un nuovo e rigoroso principio a fondamento dell'Analisi infinitesimale, non parendogli abbastanza rigorosi i principi di Newton e Leibniz" (I, p. 538; si veda: Riccardi, 1985).



***De nihilo geometrico libri II* di Torelli pubblicato a Verona nel 1758**

De nihilo geometrico si apre con un'ampia prefazione, nella quale l'Autore dichiara di proporsi la dimostrazione del vero principio ("verum germanumque principium", Torelli, 1758, pp. 7-14) sul quale si basa il Calcolo differenziale. Prima di esaminare le idee proposte da Torelli, ricordiamo che così si esprimeva Leibniz in un manoscritto del 1695:

"Sarà sufficiente se, quando parliamo di quantità... indefinitamente piccole (cioè, le più piccole di cui possiamo venire a conoscenza) si intenda che vogliamo indicare quantità... tanto piccole quanto si vuole, cosicché l'errore che si può commettere sia minore di una certa quantità assegnata" (traduzione in Kline, 1991, I, p. 451)[42].

Questa posizione leibniziana sarà implicitamente ricordata (e criticata) da Torelli; così, ad esempio, lo studioso veronese enuncia il principio che egli afferma essere fondamentale per l'intero Calcolo infinitesimale:

"Due qualsiasi grandezze dello stesso genere sono vicendevolmente uguali quando differiscono tra di loro di una quantità infinitamente piccola" (Torelli, 1758, p. 7; le traduzioni sono nostre).

Tuttavia tale principio, osserva Torelli, "manifestamente contrasta con la nozione di uguaglianza indotta dalla stessa natura nell'animo umano" e trovò pertanto "molti tenaci oppositori" (Torelli, 1758, p. 79). Per eludere queste difficoltà Torelli propone di sostituire quel principio con il seguente, nel quale la concezione potenziale dell'infinitesimo viene modificata in senso attuale:

"Due qualsiasi grandezze dello stesso genere sono vicendevolmente uguali quando differiscono tra di loro di una quantità nulla" (Torelli, 1758, p. 9).

Ciò però richiede un'opportuna ridefinizione del "nulla", che sarà "geometrico, per distinguerlo dal nulla metafisico,

---

[42] Interessanti sono inoltre alcune osservazioni contenute in una lettera (datata 30 marzo 1690) di Leibniz a Wallis: "È utile considerare quantità infinitamente piccole tali che, quando si cerca il loro rapporto, esse possono non essere considerate uguali a zero, ma che vengono respinte non appena compaiono insieme con quantità incomparabilmente più grandi. Così, se abbiamo $x+dx$, dx viene respinto. È però diverso se cerchiamo la differenza fra $x+dx$ e x. Analogamente, non possiamo avere insieme xdx e $dxdx$. Se quindi dobbiamo differenziare xy, scriveremo $(x+dx)(y+dy)-xy = xdy+ydx+dxdy$. Così, in ogni caso particolare l'errore è minore di qualsiasi quantità finita (Leibniz, 1849-1863, IV, p. 63). Anche F. Enriques riconosce una qualche ambiguità circa il ruolo del differenziale nell'opera analitica di Leibniz (indichiamo ad esempio: Enriques, 1938, p. 60; per l'applicazione didattica di tali considerazioni si veda: Bagni, 1997a e 1997b).

a tutti ben noto" (Torelli, 1758, p. 10). Scopo dell'opera di Torelli è l'introduzione rigorosa del "nulla geometrico".

Anticipiamo sin d'ora che *De nihilo geometrico* deve essere considerato un lavoro matematicamente debole: spesso, come potremo constatare, le definizioni proposte sono insufficienti e talvolta vengono suggerite proprietà e situazioni analiticamente non corrette. Ma l'opera appare globalmente molto interessante per l'approccio da essa indicato, frutto ed espressione di un evidente disagio causato dell'insufficiente precisazione dei fondamenti del Calcolo infinitesimale[43] disagio che nel Settecento era avvertito da molti matematici.

Il libro I si apre con alcune definizioni: le prime due di esse, che si limitano ad introdurre i termini "unità" e "nulla", non ci illuminano sulle concezioni dell'Autore [44]; e neppure le definizioni "III. Finito è ciò che ha confini. V. Infinito è ciò che non ha confini" (Torelli, 1758, p. 15) appaiono significative.

L'Autore introduce poi il concetto di "comparazione" ricorrendo ancora ad un sinonimo[45]; Torelli dichiara di distinguere due diversi tipi di comparazione:

[43] Lo stesso Leibniz riconobbe in più occasioni le difficoltà teoriche comportate da una vaga concezione dell'infinitesimo; ad esempio, nel manoscritto del 1695 precedentemente ricordato, egli ammette: "È tuttavia possibile immaginare uno stato di transizione o di evanescenza in cui non è ancora sorta l'esatta uguaglianza... ma in cui si sta passando in uno stato tale che la differenza è minore di qualunque quantità assegnabile... Se tale stato di transizione istantanea dalla disuguaglianza all'uguaglianza... possa essere sostenuto in senso rigoroso o metafisico, o se estensioni... infinitamente piccole sempre minori siano considerazioni legittime, è una questione che riconosco possa essere aperta al dubbio" (Kline, 1991, I, p. 451).

[44] Nei termini originali: "I. Unitas est, per quam unumquodque eorum, quæ sunt, dicitur unum. II. Nihilum est, per quam unumquodque eorum, quæ non sunt, dicitur nihilum. Dicitur autem unum aliquid non esse, quod antea quum esset, non esse amplius concipitur" (Torelli, 1758, p. 15).

[45] Nei termini originali: "V. Comparatio est duorum quorumdam mutua collatio" (Torelli, 1758, p. 15).

“VI. Si ha comparazione dello stesso genere quando si accostano due enti con le stesse dimensioni. Si dice che esiste il rapporto di ciascuno di tali enti rispetto all’altro.

VII. Si ha comparazione di genere diverso è quando si accostano due enti non aventi le stesse dimensioni. Si dice che non esiste il rapporto di ciascuno di tali enti rispetto all’altro” (Torelli, 1758, p. 16).

Da queste definizioni e dalle applicazioni che di esse saranno fornite nell’opera, possiamo concludere che la comparazione torelliana di due quantità (ad esempio di due infinitesimi) equivale alla proprietà, riferita a tali quantità, di ammettere rapporto finito. Dopo aver dato le due ultime definizioni[46], l’Autore elenca sei assiomi; i primi cinque di essi appaiono di qualche interesse:

“I. Moltiplicando o dividendo l’unità per se stessa, si ottiene l’unità.

II. Moltiplicando o dividendo una quantità per l’unità, si ottiene tale quantità stessa.

III. Sottraendo il nulla dal nulla, si ottiene il nulla.

IV. Moltiplicando il nulla per il nulla, si ottiene il nulla.

V. Dividendo il nulla per se stesso, si ottiene l’unità” (Torelli, 1758, p. 16).

Un ultimo assioma introdotto sembra confermare quanto affermato nel V[47]. Gli assiomi I-V fissano dunque le proprietà dell’unità (che indicheremo con il simbolo 1) e del nulla (che indicheremo con il simbolo 0) rispetto ad alcune operazioni aritmetiche ed equivalgono alle scritture

[46] Nei termini originali: “VIII. Si duo quædam, aut pluria sese inficem multiplicent, quod inde oritur, vocetur factum; quæ vero sese invicem multiplicant, latera. IX. Factum cum facto conferri dicitur, quando latera cum lateribus conferuntur”, (Torelli, 1758, p. 15).

[47] Nei termini originali: “VI. Nihilum cum semetipso eodem modo confertur, quo unitas cum unitate” (Torelli, 1758, p. 17).

seguenti (interessante appare l'assioma V sul "rapporto" di due non meglio specificate quantità nulle):

AX. I.	1 x 1 = 1
AX. II.	1 : 1 = 1
AX. III.	0-0 = 0
AX. IV.	0 x 0 = 0
AX. V.	0 : 0 = 1

L'Autore passa poi ad enunciare (e a dimostrare) alcune proposizioni.

"**Proposizione I.** Se una grandezza qualsiasi è sottratta da se stessa, si ottiene il nulla.

Corollario. Da ciò segue che se la grandezza *x* è assunta quale unità, l'eccesso, del quale l'unità supera se stessa, sarà nullo. Ciò sarà chiamato nulla del primo ordine, espresso da 1-1, essendo 1 l'unità" (Torelli, 1758, pp. 17 e 18).

La II e la IV proposizione si occupano dell'analoga operazione effettuata con grandezze bidimensionali e tridimensionali.

"**Proposizione II.** Sia assegnata una grandezza di due dimensioni; se si sottrae da ciascuna di tali dimensioni se stessa, e gli eccessi sono moltiplicati tra di loro, si ottiene il nulla" (Torelli, 1758, p. 18).

La proposizione è introdotta come lemma per la dimostrazione della IV:

"**Proposizione IV.** Sia assegnata una grandezza di tre dimensioni; se si sottrae da ciascuna di tali dimensioni se stessa, e gli eccessi sono moltiplicati tra di loro, si ottiene il nulla" (Torelli, 1758, p. 20).

La proposizione V introduce il nulla diverso dal nulla del primo ordine:

“**Proposizione V.** Il nulla ottenuto da qualsiasi grandezza, che dicesi ricavato per sottrazione, è uguale al prodotto della grandezza stessa per il nulla del primo ordine” (Torelli, 1758, pp. 20-21).

Le proposizioni VI e VII stabiliscono la confrontabilità (o la non confrontabilità) delle quantità nulle ottenute da grandezze diverse:

“**Proposizione VI.** Se il nulla ottenuto da una grandezza finita è accostato al nulla ottenuto da un’altra grandezza della stessa dimensione ed entrambi siano generati per sottrazione, la comparazione è dello stesso genere.

Proposizione VII. Se una grandezza finita è accostata al nulla ottenuto da un’altra grandezza finita della stessa dimensione, la quale sia generata per sottrazione, la comparazione è di genere diverso” (Torelli, 1758, pp. 21 e 23).

Le proposizioni VIII-XII esprimono considerazioni analoghe per grandezze bidimensionali e tridimensionali. Interessante è la proposizione XIII che, con il relativo corollario, introduce l’infinito:

“**Proposizione XIII.** Se una qualsiasi grandezza finita è divisa per il nulla di ordine primo, si ottiene una grandezza infinita.

Corollario. Se l’unità è divisa per il nulla del primo ordine, si ottiene un numero infinito” (Torelli, 1758, pp. 28 e 29).

Con la proposizione XIV, fino alla XX, Torelli tenta di introdurre il nulla generato (per sottrazione) da una grandezza infinita da se stessa e di porlo in relazione con una grandezza finita; i presupposti sono tuttavia poco rigorosi (a tratti errati)[48] (Torelli, 1758, pp. 30-37). In sostanza, Torelli afferma che sottraendo un infinito, ottenuto dividendo una quantità finita *a* per un infinitesimo del primo ordine, da se stesso si ottiene la quantità *a*: ciò è evidentemente errato. Il tentativo torelliano quindi fallisce: la rivisitazione dei fondamenti del Calcolo, sette decenni prima del *Cours d'analyse* di Cauchy, non era ancora matura[49].

4.3.3. I fondamenti dell'Analisi matematica

Da quanto sopra rilevato, appare che senza dubbio *De nihilo geometrico* è un lavoro teoricamente debole, che contiene non poche imprecisioni ed alcuni errori. Tuttavia esso è interessante e significativo in riferimento al periodo storico in cui venne concepito e pubblicato.

Per giustificare tale affermazione dobbiamo riprendere brevemente alcuni momenti di storia dell'Analisi, già presentati all'inizio di questo capitolo. Sappiamo ad esempio che alcuni procedimenti matematici dell'Antichità indicano la considerazione di questioni infinitesimali: al concetto di limite viene spesso affiancato il metodo di esaustione, originariamente introdotto da Eudosso (408?-355? a.C.), teorizzato negli *Elementi* di Euclide (300 a.C.) e quindi frequentemente applicato da Archimede: e non è

---

[48] Nei termini originali: "Nihilum ex infinita magnitudine ortum, quod subductione fieri dicitur, finitæ magnitudini æquale e st, ex qua ipsa oritur infinita magnitudo" (Torelli, 1758, p. 30).

[49] Le osservazioni significative sui fondamenti dell'Analisi infinitesimale sono contenute nel primo dei due libri di *De nihilo geometrico*. Il secondo libro è dedicato ad alcune applicazioni geometriche dei concetti precedentemente descritti (Torelli, 1758, pp. 38-117), con particolare riferimento alla nozione di derivata prima.

inutile rilevare che quest'ultimo autore era ben noto a Giuseppe Torelli (Archimede, 1974, pp. 30, 39 e 41)[50].

Dopo un periodo di relativo interesse, la nascita della moderna Analisi matematica, nel XVII secolo, portò nuovamente alla ribalta i procedimenti infinitesimali (sebbene la forma nella quale essi vennero impiegati differisse notevolmente dalla forma nella quale oggi li intendiamo)[51]. La critica contemporanea ha ripreso alcune posizioni leibniziane originali (talvolta riferibili all'infinitesimo attuale), giungendo ad elaborare sistemazioni teoriche interessanti anche dal punto di vista didattico, quali l'Analisi non standard[52].

Ricordiamo tuttavia che i metodi infinitesimali ebbero, fin dall'inizio del XVIII secolo, anche alcuni attivi oppositori, tra i quali spicca George Berkeley (1685-1753), autore di *The Analyst, or a discourse addressed to an infidel mathematician* (Arrigo & D'Amore, 1992)[53]. Le

---

[50] Come abbiamo notato all'inizio di questo capitolo, un simile accostamento necessita di molta cautela: le dimostrazioni per esaustione non sono infatti mai logicamente equivalenti ad un passaggio al limite (Archimede, 1974).

[51] Osserva M. Kline: "Alcuni germi della formulazione corretta dei nuovi concetti possono essere già trovati nella letteratura del Seicento. Wallis, nell'*Arithmetica infinitorum*, introdusse il concetto aritmetico del limite di una funzione come il numero avvicinato dalla funzione in modo tale che la differenza tra esso e la funzione possa essere resa minore di qualunque quantità assegnabile fino ad annullarsi quando il procedimento viene continuato all'infinito. La sua formulazione è vaga, ma contiene l'idea giusta" (Kline, 1991, I, p. 453). Una prima rigorizzazione della nozione di limite fu merito di Augustin Louis Cauchy (1789-1857), autore del *Cours d'analyse* (1821).

[52] Così scrive A. Robinson riferendosi ai fondamenti storici dell'Analisi non standard: "Leibniz intuì che la teoria degli infinitesimi implica l'introduzione di numeri ideali che possono essere infinitamente piccoli... se paragonati ai numeri reali. Né lui né i suoi discepoli né i suoi successori seppero dare uno sviluppo razionale ad un tale sistema... Questi numeri ideali, governati dalle stesse leggi dei numeri ordinari, sono solo una comoda finzione, adottata per abbreviare l'argomentazione e per facilitare l'invenzione o la scoperta matematica" (Robinson, 1974).

[53] G. Berkeley scrisse: "Concepire una quantità infinitamente minore di ogni sensibile o immaginabile quantità oltrepassa, lo confesso, ogni mia capacità. Ma

critiche all'Analisi erano spesso espresse da matematici non professionisti: a parte il vescovo, filosofo e scienziato Berkeley, citiamo il borgomastro, medico e geometra olandese Bernard Nieuwentijdt (1654-1718); ma anche un analista come Michel Rolle (1652-1719) fu tra gli studiosi che nutrirono dubbi sulla sistemazione dell'Analisi settecentesca: egli "non era affatto convinto della correttezza del Calcolo leibniziano, che considerava una sorta di trucco ben riuscito" (Bottazzini, 1990, p. 27).

Anche Jean Baptiste Le Rond d'Alembert (1717-1783) espresse perplessità sulla concezione degli infinitesimi:

"Una quantità o è qualcosa o è niente: se è qualcosa, non si è ancora annullata; se è niente, si è letteralmente annullata. Supporre che vi sia uno stato intermedio tra qualcosa e niente è pura chimera" (*Mèlanges de litèrature, d'histoire et de philosophie*, pp. 249-250, riportato in: Boyer, 1982, p. 521).

Importante è infine la posizione di Leonhard Euler (1707-1783), che "respingeva il concetto di infinitesimo come quantità più piccola di qualunque grandezza assegnabile e tuttavia diversa da zero" (Kline, 1991, I, p. 500); nel 1755 (e dunque appena tre anni prima della pubblicazione di *De nihilo geometrico*) Euler scrisse nelle proprie *Institutiones Calculi Differentialis*, uno dei capolavori della Matematica del XVIII secolo:

"Non c'è dubbio che ogni quantità può essere diminuita in misura tale da annullarsi completamente e svanire. Ma una quantità infinitamente piccola non è nient'altro che una

---

concepire una parte di questa quantità infinitesima, tale che sia ancora infinitamente minore di essa, questa è una infinita difficoltà per qualunque uomo" (Arrigo & D'Amore, 1992, p. 123). A Berkeley rispose direttamente (ma non sempre efficacemente) James Jurin (1684-1750) con l'opera *Geometry, no friend to infidelity* (1734).

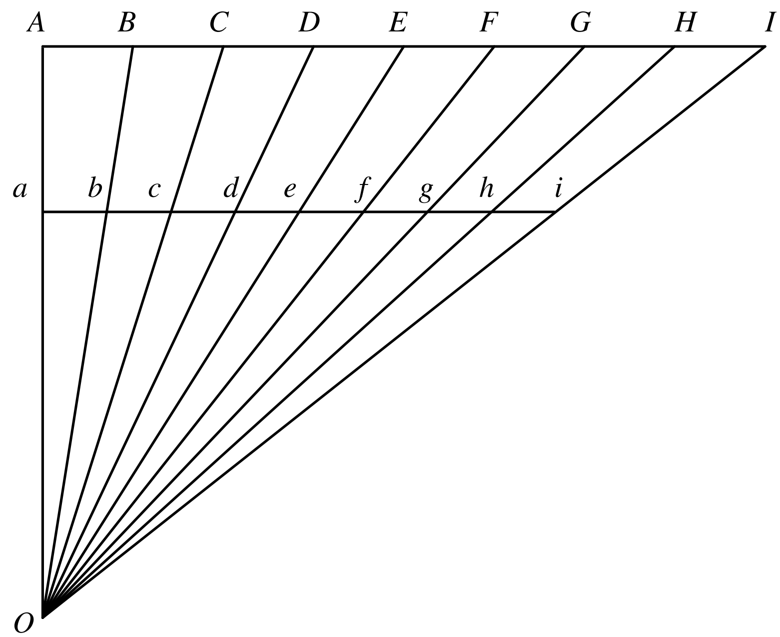
quantità evanescente e perciò la cosa stessa è uguale a 0. Ciò è anche in armonia con quella definizione delle cose infinitamente piccole di cui si dice che sono minori di qualunque quantità assegnabile; è certo che essa dovrebbe essere nulla perché, a meno che non sia uguale a 0, sarebbe possibile assegnarle una quantità uguale, il che è contrario all'ipotesi" (Euler, 1787a; traduzione in: Kline, 1991, I, p. 500).

4.3.4. Una *Lettera* di Leonhard Euler

Riprendiamo la posizione euleriana riportando un brano tratto dall'opera *Lettere ad una principessa d'Alemagna sopra diversi soggetti di fisica e di filosofia*, (ci riferiamo alla prima edizione italiana, pubblicata da Ferres a Napoli nel 1787, ovvero della seconda edizione dell'opera dopo quella originale in francese del 1772). Scrive Euler nella lettera CXXIII, intitolata *Divisibilità dell'estensione in infinito* (28 aprile 1761):

'La controversia tra i Filosofi moderni, e i Geometri, di cui ora ho l'onore di parlare a Vostra Altezza, ha per oggetto la divisibilità de' corpi. Una tal proprietà è senza dubbio fondata sull'estensione, e non per altro i corpi son divisibili e posson ridursi in parti, se non perché sono estesi.

Si ricorderà benissimo Vostra Altezza, che in Geometria si può sempre dividere una linea in due parti uguali, per picciola che sia. S'insegna benanche il come debba dividersi una piccola linea, per esempio *a i* in tante parti uguali quante si vuole, e la costruzione di tal divisione vien talmente dimostrata che non si può dubitar della sua esattezza.



Tav. II. fig. 23

Non hassi a far altro che tirare (*Tav. II. fig. 23.*) una linea *A I* parallela ad *a i* a qualunque grandezza ed a qualunque distanza si voglia, ed in essa trasportarvi altrettante porzioni uguali *AB*, *BC*, *CD*, *DE* quante la picciola linea data contiene, per esempio otto. Quindi per l'estremità *Aa*, ed *Ii* descrivansi le linee rette *AaO* e *IiO* finché non arrivino al punto *O*: e da questo stesso punto *O* verso i punti di divisione *B*, *C*, *D*, *E*, &c. tirinsi le rette *OB*, *OC*, *OD*, *OE*, &c. le quali taglieranno nel medesimo tempo la picciola linea *a i* anche in otto parti uguali.

Riesce anche questa stessa operazione per piccola che sia la linea *a i*, e per grande che si voglia il numero delle parti. È vero bensì, che volendola eseguire non potremmo portar molto innanzi la divisione delle parti, poiché le linee che potremmo tirare dovrebbero sempre aver qualche larghezza, per la quale verrebbero certamente a confondersi, come Vostra Altezza può vederlo nella figura vicino al punto *O*.

Ma quì si tratta di quanto in se stesso è possibile, non già di quanto l'uomo è in istato di eseguire. Ma nella Geometria le linee non hanno menoma larghezza, e per conseguenza non si dà mai il caso che si confondano. Adunque ne segue che una tal divisione non è mai circonscritta da alcuni limiti.

Da che Vostra Altezza mi accorda, che una linea possa esser divisa in mille parti, con dividere ciascheduna delle parti in due, verrà questa divisa in duemila parti, e per la stessa ragione in quattromila, ed in ottomila, senza che giungasi mai alle parti indivisibili. Per picciola che concepiscasi una linea, certamente questa è divisibile in due metà, e ciascheduna di queste metà anche in due, e così in infinito.

Quanto finora ho detto di una linea, si può facilmente applicare ad una superfizie, e con più forte ragione ad un solido, il quale ha tutte tre le dimensioni, lunghezza, larghezza, profondità. Da ciò ne nasce, che ogni estensione è divisibile all'infinito, e questa proprietà chiamasi *divisibilità all'infinito* .

Chi volesse negar questa proprietà che ha l'estensione, sarebbe obbligato a sostenere, che la divisione dovrebbe in fine ridursi a parti così picciole, che non potrebbero più ulteriormente dividersi, perché non hanno più estensione. Intanto tutte queste particelle prese insieme debbon riprodurre quel tutto che fu diviso: e come la quantità di ciascheduna di esse sarebbe niente o sia *zero* 0, molti zeri presi insieme dovrebbero produrre una quantità, cosa di cui più assurda non si può concepire: perché ben sa la Vostra Altezza che due o più *zeri* uniti insieme non danno mai menoma cosa.

Questo sentimento, cioè che nella divisione di una estensione, o di una quantità qualunque si arriva in fine a certe particelle tanto picciole, che non sarebber più divisibili, perciocché in esse non vi sarebbe più quantità, egli è un sentimento assolutamente insostenibile.

Per renderne più sensibile l'insussistenza, supponghiamo che una linea di un pollice sia divisa in mille parti, e che queste sien ridotte a tal picciolezza, che non ammettan più divisione. Dunque ciascheduna di queste è priva affatto di grandezza (perché se vi fosse rimasta grandezza, potrebbe ancor dividersi) e per conseguenza ciascheduna di esse particelle sarebbe un vero niente. Se intanto queste mille particelle unite insieme formano un pollice, dobbiam dire che un pollice è composto da mille niente, cosa ch'è tanto assurda, quanto il sostenere, che la metà di un pollice sia un niente. In fatti se è assurdo l'asserire, che la metà di una quantità è un niente, lo è eziandìo il dire, che sia un niente il quarto: e quando ciò mi si accordi riguardo a un quarto, mi si dee accordare anche per la millesima, e per la millionesima. Finalmente, per quanto oltre si porti coll'immaginazione la divisione di un pollice, non si arriverà mai al segno, che le ultime parti sieno assolutamente indivisibili. Queste parti diverranno senza meno sempre più picciole, e la di lor grandezza si accosterà sempre più al zero, ma non vi sarà mai caso di poterci arrivare.

Con ragione dunque si asserisce nella Geometria, che ogni grandezza è divisibile all'infinito, e che in qualunque divisione non si può mai procedere sino a tal segno, che divenga impossibile una ulterior divisione. Intanto dee sempre distinguersi ciò ch'è possibile in se stesso, da ciò che noi siamo in grado di eseguire. La nostra esecuzione ha molte limitazioni. Dopo aver per esempio diviso un pollice in mille parti, son queste così picciole che ci sfuggono agli occhi, e perciò ci sarebbe certamente impossibile una ulterior divisione.

Ma se questa millesima parte di un pollice si guardasse con un microscopio che ingrandisse per esempio mille volte, ciascheduna particella ci sembrerebbe altrettanto grande, quanto un pollice all'occhio nudo: ed in tal caso resterebbe ognuno convinto della possibilità di divider qualunque di quelle parti in altre mille. Or dunque chi v'impedisce di tirar sempre innanzi questo stesso raziocinio?

Perlaqualcosa bisogna conchiudere, ch'egli è questa una verità incontrastabile, che ogni grandezza è divisibile all'infinito, e non solamente questo ha luogo per l'estensione ch'è oggetto della Geometria, ma bensì per tutte le altre proprietà, come è il tempo, il numero &c." (Euler, 1787b, II, pp. 191-196).

Non è possibile sapere con qualche certezza se il pensiero di Torelli fu influenzato dalla posizione, assai diffusa e prestigiosa, di Euler (il quale non viene citato in alcuna occasione nel lavoro torelliano)[54]: ma un raffronto tra le concezioni di Torelli e quelle di alcuni grandi matematici del XVIII secolo è significativo, soprattutto a proposito dell'intuizione dell'infinitesimo attuale.

Dopo Euler, ricordiamo la *Théorie des fonctions analytiques* di Giuseppe Luigi Lagrange (1736-1813), pubblicata nel 1797 con il sottotitolo: "Contenente i principali teoremi del Calcolo differenziale senza l'uso dell'infinitamente piccolo, né delle quantità evanescenti, né dei limiti o delle flussioni, e ricondotto all'arte dell'analisi algebrica delle quantità finite" (Kline, 1991, I, p. 502).

---

[54] Osserva M. Kline: "Euler accetta senza riserve il fatto che esistano quantità assolutamente uguali a zero ma i cui rapporti sono numeri finiti" (Kline, 1991, I, p. 501). Abbiamo sopra ricordato che Sylvestre-François Lacroix (1765-1843), nel suo *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, fu il primo autore ad usare il termine "coefficiente differenziale" per indicare la derivata ed a definire il differenziale di una funzione sulla base della derivata della funzione stessa (Lacroix, 1837).

Lagrange considerava la teoria delle funzioni come una parte dell'Algebra e basava i propri procedimenti sulla possibilità di sviluppare una funzione qualsiasi in serie di potenze; ma tale ipotesi condizionò negativamente l'impostazione lagrangiana: sappiamo oggi che la possibilità di scrivere un tale sviluppo deve sottostare a condizioni precise e non banali, come l'esistenza delle derivate[55].

4.3.5. Una valutazione didattica

L'opera *De nihilo geometrico* di Giuseppe Torelli, ricordata nei paragrafi precedenti, può dunque essere inserita nel fecondo clima culturale caratteristico della Matematica del Settecento ed è una testimonianza chiara del vivo interesse

---

[55] Lagrange riteneva di essere riuscito ad eludere il ricorso al concetto di limite (pur accettando che il Calcolo infinitesimale potesse essere fondato sulla teoria dei limiti); egli tentò di separare definitivamente i fondamenti dell'Analisi matematica dalle applicazioni geometriche e dalla meccanica. Tale separazione non agevola un approccio intuitivo ai concetti infinitesimali, ma il ruolo storico dell'impostazione lagrangiana fu notevole: "chiarì che, dal punto di vista logico, l'Analisi deve contare sulle sue sole forze" (Kline, 1991, I, p. 504). G. Loria ricorda la figura di "un oppositore di Lagrange": Jozef Maria Wronski-Hoene (1778-1853): "La sua *Réfutation de la Théorie des fonctions analytiques* consta di due parti, una critica, l'altra ricostruttiva. Nella prima sono segnalati i punti deboli ed oscuri del ragionamento con il quale Lagrange si sforzò invano di dimostrare l'applicabilità delle serie di Taylor a qualunque funzione: il lettore il quale conosce le restrizioni che la scienza moderna ha imposte a quella conclusione riconoscerà che il Wronski diede prova, non solo di ammirabile coraggio nel prendere posizione contro un'autorità allora indiscussa, ma anche di acume quasi profetico. Nella seconda parte del suo lavoro l'autore sostenne essere antiscientifico ogni tentativo per bandire dall'Analisi matematica il concetto di infinito" (Loria, 1929-1933, p. 761). Sempre nel 1797, Lazare Nicolas Marguerite Carnot (1753-1823, padre di Sadi Carnot, al quale è legata la denominazione del classico ciclo termodinamico), nel 1797 pubblicò *Réflexions sur la métaphisique du calcul infinitésimal*; l'opera (sebbene inferiore all'analogo lavoro lagrangiano), mirava ad una rivalutazione dell'antico metodo di esaustione: "dopo molto riflettere Carnot, come Berkeley, finì col concludere che gli errori nei ragionamenti usati di solito nel Calcolo infinitesimale si compensano l'uno con l'altro" (Kline, 1991, I, p. 504).

attribuito alle questioni fondazionali dagli studiosi di quel periodo. Ma l'importanza del lavoro non si limita all'àmbito storico: per il matematico di oggi tale opera può essere fonte di riflessioni stimolanti sulle possibilità di presentare, anche didatticamente, i concetti fondamentali dell'Analisi.

Come abbiamo sopra segnalato, la (sfortunata) introduzione torelliana del "nulla geometrico" equivale ad un tentativo di presentare e di utilizzare l'infinitesimo concepito in senso attuale (dal punto di vista didattico segnaliamo: Cornu, 1980 e 1981; Sfard, 1991; Tsamir & Tirosh, 1992; Dimarakis & Gagatsis, 1997; Bagni, 1998a e 1998b); purtroppo tale introduzione elude il ricorso al concetto di limite.

La mancanza della considerazione del concetto di limite come base dell'Analisi matematica rende assai difficoltosa l'introduzione didattica della nozione di infinitesimi equivalenti e la presentazione del principio di sostituzione degli infinitesimi[56]. E se da un lato Torelli ebbe nitidamente la percezione di tali concetti (si ricordi ad esempio il procedimento torelliano di "comparazione") e ne cercò un'interpretazione in senso attuale, non possiamo non rilevare che le sue intuizioni non ebbero il supporto di uno strumento tecnico adeguato e finirono dunque per dar vita ad una teoria comunque debole ed a tratti scorretta.

Possiamo dunque concludere che la riflessione torelliana, nonostante il suo sostanziale fallimento, appare interessante, soprattutto come occasione per evidenziare le oggettive carenze di rigore rilevabili in un'Analisi

[56] Non dimentichiamo tuttavia che diversi studiosi, nel Settecento, si occuparono del Calcolo infinitesimale basato sulla valutazione degli infinitesimi. Così scrive a tale proposito A. Agostini ricordando i lavori di Vincenzo Riccati (1707-1775) e di Girolamo Saladini (1731-1813): "[Vincenzo Riccati] con Girolamo Saladini pubblicò le *Institutiones Analyticae* (Bologna 1766-1767), nelle quali è posto nella sua vera luce il principio di sostituzione degli infinitesimi..." (Agostini, 1936). Sull'opera di V. Riccati e di Saladini segnaliamo inoltre: Bagni, 1993 e 1997a.

infinitesimale caratterizzata da uno spirito assai moderno (pensiamo soprattutto all'interpretazione attuale dell'infinitesimo), ma non correttamente basata sul concetto di limite come esso sarà inteso dalla Matematica dell'Ottocento e del Novecento.

4.4. Le serie numeriche

"Ut non-finitam Seriem finita cöercet,
Summula, & in ullo limite limes adest:
Sic modico immensi vestigia Numinis haerent
Corpore, & angusto limite limes abest.
Cernere in immenso parvum, dic, quanta voluptas!
In parvo immensum cernere, quanta, Deum!".

Jakob Bernoulli (*Ars Conjectandi*, 1713)

4.4.1. Le serie convergenti

La nozione di serie numerica è molto antica: già Aristotele di Stagira (384-322 a.C.) osservava implicitamente che la somma di una serie di infiniti addendi (considerata in senso potenziale) può essere limitata[57].

[57] "L'infinito per aggiunzione è, poi, quasi la medesima cosa che l'infinito per divisione, giacché esso si produce nel finito per aggiunta, in modo contrario all'altro. Invero, nella misura che una grandezza si vede divisa all'infinito, nella stessa misura essa risulta aggiunta a quella finita. Difatti, se noi da una grandezza finita desumiamo una determinata grandezza e poi ne desumiamo ancora un'altra nella medesima proporzione, senza però portar via la grandezza stessa dell'intero, non riusciremo a percorrere il finito; se, al contrario, accresceremo la proporzione in modo da portar via progressivamente la grandezza stessa, allora riusciamo a percorrerla, perché tutto ciò che è finito si toglie via mediante la sottrazione di un qualsivoglia finito. Dunque, l'infinito non è in altra guisa, ma solo in questa, cioè in potenza e per detrazione [...] ed è, altresì, in potenza, come la materia, e non mai di per sé, come è, invece, il finito. Anche per aggiunzione l'infinito è, così, pur sempre in potenza, e noi diciamo che, in un certo senso, lo è allo stesso modo che per divisione: sempre, infatti, si potrà assumere qualcosa al di fuori di esso, ma, non di meno, esso non supererà ogni grandezza finita, come, invece, per divisione supera ogni grandezza finita e rimane sempre minore. Di conseguenza non si può ammettere che l'infinito, neppure

Nella *Quadratura della parabola*, Archimede di Siracusa (287-212 a.C.) fa riferimento alla serie geometrica di ragione 1/4 nella proposizione seguente:

Proposizione 23. ‘Se alcune grandezze si pongono ordinatamente nel rapporto quadruplo [cioè se ciascuna è quadrupla della seguente], tutte le grandezze [sommate insieme] più ancora la terza parte della più piccola saranno i quattro terzi della maggiore” (Archimede, 1974, p. 511).

Se consideriamo unitaria la prima delle grandezze alle quali la proposizione fa riferimento, ciò si esprime scrivendo:

$$1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

$$\left(1+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{4}{3}$$

$$\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{16}=\frac{4}{3}$$

$$\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}\right)+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{64}=\frac{4}{3} \qquad \text{etc.}$$

potenzialmente, superi il tutto per aggiunzione, a meno che l’infinito non sia accidentalmente in entelechia, come, secondo i fisiologi, è infinito quel corpo che è al di fuori del cosmo e la cui sostanza è aria o altra cosa di tal genere. Ma se, in tal modo, un corpo sensibile non può essere infinito in entelechia, è chiaro che neppure in potenza esso potrà esser tale per aggiunzione, se non, come dicevamo, nel senso contrario a quello della divisione. Anche Platone, infatti, per questa ragione concepì due infiniti [il grande e il piccolo], perché sembra che ci sia un superamento e un processo verso l’infinito sia per accrescimento sia per diminuzione. Ma pur avendo ammesso due infiniti, egli non ne fa uso: infatti, secondo lui, nei numeri non sussiste affatto l’infinito né per detrazione, perché la monade è il minimo, né per aggiunzione, perché egli concepisce il numero fino alla decade” (*Fisica*, III, VI, 206 b, 1-33).

Il risultato archimedeo riguarda la somma dei primi termini di una serie geometrica di ragione 4[58]; ma se consideriamo ora l'intera serie di infiniti termini:

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^i = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+...$$

la proposizione afferma che il resto ottenuto considerando solo i primi *n* termini è la terza parte del termine *n*-esimo (ovvero dell'ultimo termine che viene considerato). Considerando dunque solo il primo termine, risulta:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+...=\frac{1}{3}$$

e la somma degli infiniti termini viene così ad essere:

$$1+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+...\right)=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

Una simile argomentazione porta ad un importante risultato che sarà ripreso qualche secolo più tardi: la formula generale per la somma di una serie geometrica compare infatti in un'opera di François Viète (1540-1603), *Varia responsa* (1593), ed era nota a Pierre de Fermat (1601-1665); essa fu pubblicata anche da Andreas Tacquet (1612-1660) in *Arithmeticae theoria et praxis accurate demonstrata* e da John Wallis in *Arithmetica infinitorum*, opere entrambe risalenti al 1655. Tacquet notava, a

[58] Nella proposizione 35 del libro IX degli *Elementi*, Euclide (IV-III sec. a.C.) esprime un analogo risultato (ma in forma più generale): "Se si danno quanti si voglia numeri in proporzione continuata fra loro, e dal secondo e dall'ultimo di essi si sottraggono numeri uguali al primo, si avrà che la differenza fra il secondo ed il primo numero sta al primo come la differenza fra l'ultimo ed il primo sta alla somma di tutti i numeri che precedono l'ultimo" (Euclide, 1970, p. 558). Su questa importante proposizione si basò, alla fine del XVI secolo, François Viète (1540-1603) per ricavare l'espressione della somma di una serie geometrica.

proposito della formula per il calcolo della somma di una "progressione infinita":

"Tu che mi leggi vedrai con quanta facilità si giunga a quanto ti avevo promesso: cioè il passaggio da una progressione finita alla progressione infinita. Vi è ragione di stupirsi che gli aritmetici che conoscevano il teorema relativo alle progressioni finite abbiano ignorato quello concernente le progressioni infinite, che da esso si deduce immediatamente" (citato in: Loria, 1929-1933, p. 517).

Rileviamo però che queste considerazioni (ed i non pochi procedimenti analoghi sviluppati quasi contemporaneamente)[59] *non* erano precedute da una rigorosa dimostrazione di convergenza. Anzi, come avremo occasione di rilevare ancora, la nozione stessa di convergenza di una serie numerica non sembra essere presente nelle opere dei grandi matematici del XVII secolo.

Questa carenza è storicamente rilevante; G. Vitali (1875-1932) osservava a tale riguardo: "È naturale, però, che una nozione precisa di convergenza delle serie non potesse aversi prima che fosse determinata la nozione di limite" (Vitali, 1979, p. 404).

Se da un lato quest'ultima affermazione appare storicamente condivisibile, non possiamo tuttavia non rilevare che, dal punto di vista cronologico, una qualche intuizione del concetto di limite non può essere considerata

---

[59] Altre serie convergenti vennero considerate nel XVII secolo: Nicolaus Mercator (1620-1687) nella *Logarithmotechnia* (1661) faceva riferimento (sebbene solo implicitamente) alla serie , che talvolta viene oggi indicata come serie di Mercator (Loria, 1929-1933, p. 529). Il caso per $a = 1$ era stato trattato anche da Pietro Mengoli (1625-1686) nella *Novae quadraturae arithmeticae* (1650). Indipendentemente da Mengoli e da Mercator, William Brouncker (1620?-1684) pubblicava nel 1661 il risultato: . Anche Isaac Newton (1642-1727) si occupò dello sviluppo di , che ottenne sviluppando $1/(1+x)$ mediante il teorema del binomio ed integrando quindi termine a termine.

lontana dalle molte ricerche seicentesche citate a proposito delle serie numeriche (per un inquadramento della Matematica di quel periodo indichiamo ad esempio: Bourbaki, 1963; Boyer, 1969; Menghini, 1982; Bottazzini, 1990; Bottazzini, Freguglia & Toti Rigatelli, 1992; Edwards, 1994).

Proprio nell'*Arithmetica infinitorum* (1655) di John Wallis[60] e nell'*Elementum tertium* della *Geometriae speciosae elementa* (1659) di Pietro Mengoli, infatti, troviamo chiari riferimenti alla nozione di limite di una successione. Analoghe considerazioni possono essere riferite ad altre importanti opere del periodo in esame, come la *Vera circuli et hyperbolae quadratura* (1667) di James Gregory (1638-1675) o addirittura il capolavoro di Isaac Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687). Gregorio da San Vincenzo (1584-1667), che nell'*Opus geometricum* (1647) ricondusse il paradosso di Achille e della tartaruga alla somma di una serie geometrica convergente, scriveva con sufficiente precisione:

"Il termine di una progressione è la fine della serie che la progressione non raggiunge, anche se viene continuata all'infinito, ma a cui si può avvicinare in misura inferiore a qualunque intervallo dato" (citato in: Kline, 1991, I, pp. 509-510).

Possiamo dunque notare che la difficoltà con la quale vennero prese in esame, storicamente, le questioni di

---

[60] A proposito dei primi riferimenti al concetto di limite, osserva M. Kline: "Alcuni germi della formulazione corretta dei nuovi concetti possono essere già trovati nella letteratura del Seicento. Wallis, nell'*Arithmetica infinitorum*, introdusse il concetto aritmetico del limite di una funzione come il numero avvicinato dalla funzione in modo tale che la differenza tra esso e la funzione possa essere resa minore di qualunque quantità assegnabile fino ad annullarsi quando il procedimento viene continuato all'infinito. La sua formulazione è vaga, ma contiene l'idea giusta" (Kline, 1991, I, p. 453). Si veda inoltre: Vitali, 1979, p. 395.

convergenza non sono da mettere in relazione con la mancanza della considerazione della nozione di limite; diremmo piuttosto che *per molto tempo il limite non è stato correttamente considerato come il concetto centrale sul quale basare i procedimenti infinitesimali* (tra i quali le serie numeriche). In particolare, non veniva considerata la possibilità dell'esistenza di un limite finito o di un limite infinito (ovvero addirittura la possibilità della non esistenza del limite) della successione delle somme parziali di una serie.

4.4.2. Le serie divergenti: la serie armonica e Nicola d'Oresme

La considerazione di serie divergenti risale al Medioevo: tra i matematici che si occuparono delle serie numeriche spicca il parigino Nicola d'Oresme (1323-1382) che diede la più antica dimostrazione della divergenza della serie:

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+...$$

(*serie armonica*). Egli suggerì di scrivere:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+...$$

ovvero di raggruppare le frazioni in parentesi contenenti rispettivamente 1, 2, 4, 8, ... frazioni; la somma delle frazioni in ciascuna parentesi è non minore di 1/2, ed essendo possibile ottenere un qualsiasi numero di parentesi, Nicola concludeva che la somma è maggiore di ogni costante arbitrariamente scelta[61].

[61] Il ritardo con cui alcune considerazioni oresmiane furono sviluppate porta G. Loria ad affermare: "Riteniamo superflua qualunque nostra parola per esaltare l'importanza di questi risultati; essi erano forse di troppo superiori alla mentalità degli scienziati del tempo per venire apprezzati ed utilizzati durante il secolo XIV" (Loria,

4.4.3. Una "dimostrazione" di Jakob Bernoulli

Jakob Bernoulli (1654-1705), in alcune memorie del 1692 e del 1696, si occupò nuovamente della serie armonica; dopo avere ripercorso procedimenti simili a quello di Nicola (utilizzando però un risultato "derivato in maniera scorretta", mediante una serie divergente; l'Autore stesso "dice che il procedimento... dovrebbe essere utilizzato con una certa cautela": Kline, 1991, I, p. 516), fornì una diversa "dimostrazione" della divergenza della serie in questione.

Egli considera innanzitutto la serie seguente e dimostra che ha somma 1:

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots$$

Il suo ragionamento può essere così riassunto:

$$1 = \frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{3-2}{2\cdot 3}+\frac{4-3}{3\cdot 4}+\frac{5-4}{4\cdot 5}+\ldots =$$

$$= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots$$

Consideriamo ora la serie armonica ed ammettiamo che sia:

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots = s$$

Risulta:

$$s = 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{3}{3\cdot 4}+\frac{4}{4\cdot 5}+\ldots =$$

1929-1933, pp. 247-248). Ad esempio, dopo Nicola la divergenza della serie armonica sarà esaminata nel 1650 da Pietro Mengoli (Vacca, 1915).

$$= 1+1+\left(1-\frac{1}{1\cdot 2}\right)+\left(1-\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}\right)+\ldots =$$

$$= 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots = 1+s$$

Abbiamo così ricavato: $s = 1+s$, che è assurdo.

Un'osservazione si impone: anche accettando il procedimento precedente, è possibile affermare che Bernoulli "dimostra" che la serie armonica è divergente? La semplice presenza di un assurdo porterebbe ad affermare soltanto che la serie considerata *non è convergente*. In conclusione, dunque, dovremmo sottolineare che nella concezione bernoulliana non trovavano posto le serie indeterminate: *una serie non convergente era implicitamente considerata divergente*. Citiamo però anche un'acuta osservazione di G. Arrigo (1997, p. 43), il quale sottolinea che la conclusione di Bernoulli può essere considerata un'anticipazione della moderna nozione di insieme infinito (equipotente ad una sua parte propria).

È appena il caso di ricordare che la correttezza dei procedimenti bernoulliani riguardanti le serie è ben lontana dall'essere modernamente accettabile. Ricordiamo ancora un esempio interessante a tale riguardo. Consideriamo innanzitutto la serie geometrica delle potenze di 1/2:

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots = 2$$

Dividendo per i numeri dispari entrambi i membri otteniamo:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\ldots = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{40}+\frac{1}{80}+\ldots = \frac{2}{5} \qquad \text{etc.}$$

La somma dei primi membri di $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...$ = 2 e delle serie così ricavate viene a costituire l'intera serie armonica; si ottiene dunque:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+... = 2+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+... =$$
$$= 2\cdot\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+...\right)$$

La "somma" dei reciproci dei numeri dispari viene dunque uguagliata alla metà della "somma" della serie armonica; da ciò seguirebbe che anche la "somma" dei reciproci dei numeri pari ha lo stesso valore[62]. Bernoulli riteneva di poter concludere (Kline, 1991, I, p. 518):

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+...=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+...$$

Modernamente, saremmo portati a dire che ogni commento è superfluo; ma *dal punto di vista storico lo stupore appare ingiustificato*: alla fine del XVII secolo procedimenti di questo genere erano infatti tutt'altro che rari[63].

4.4.4. Le serie indeterminate: la serie di Grandi

Una delle più celebri serie indeterminate della storia della Matematica è la serie di Grandi. Nel 1703, Guido Grandi (1671-1742) affermò:

---

[62] Sottolineiamo che, alcuni anni prima della pubblicazione delle memorie bernoulliane, Pietro Mengoli nella *Novae quadraturae arithmeticae* aveva dimostrato la divergenza della serie i cui termini sono i reciproci di quelli di una progressione aritmetica di ragione r>1 (Loria, 1929-1933, p. 525).

[63] G. Arrigo (1997, pp. 41-42) ricorda che Christian Huygens (1629-1695) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) nel 1672-1676 calcolarono la somma dei reciproci dei numeri triangolari e sottolinea "l'ingegno mostrato da questi pensatori e [...] la bellezza di una Matematica euristica".

"Mettendo in modo diverso le parentesi nell'espressione 1-1+1-1+... io posso, volendo, ottenere 0 o 1. Ma allora l'idea della creazione *ex nihilo* è perfettamente plausibile" (citato in: Silov, 1978, I, p. 185).

Grandi considerava dunque le seguenti scritture:

(1-1)+(1-1)+... = 0+0+... = 0
1+(-1+1) +... = 1+0+... = 1

La serie a segni alterni 1-1+1-1+... veniva eguagliata da Jakob Bernoulli (e, come vedremo, da molti altri importanti matematici del XVIII secolo) al valore 1/2. Secondo Grandi, la "dimostrazione" di ciò può essere ricondotta allo sviluppo seguente (che modernamente sappiamo essere valido soltanto per $|x|<1$):

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{i=0}^{+\infty}(-x)^i=1-x+x^2-x^3+\ldots$$

Ponendo in tale formula $x = 1$ (ed evidentemente tale posizione *non* rispetta la condizione sopra ricordata) seguirebbe infatti: 1-1+1-1+... = 1/2.

Dal punto di vista didattico, osserviamo che lo stesso risultato potrebbe essere ottenuto anche nel modo seguente:

s = 1-1+1-1+... da cui s = 1-(1-1+1-...)
da cui s = 1-s e quindi s = 1/2

Ovviamente si tratta di un procedimento del tutto inaccettabile per la sensibilità dei matematici moderni, in quanto applica le proprietà delle operazioni aritmetiche in modo scorretto ed è basato sull'implicita ammissione che la scrittura 1-1+1-1+... possa indicare un numero s[64]; è oggi

[64]Sempre facendo riferimento all'aspetto didattico, non sarà inutile notare che la serie di Grandi è analoga a diverse altre serie a segni alterni. Ad esempio, se nell'espressione della serie 1-2+3-4+5-6+... scegliamo di porre le parentesi nel modo seguente: (1-2)+(3-4)+(5-6)+... = -1-1-1-..., la serie verrebbe ad apparire

ben noto che la successione delle somme parziali associata alla serie di Grandi non ammette alcun limite: dunque tale serie non ammette somma.

4.4.5. Gottfried Wilhelm Leibniz e Christian Wolf

Della serie di Grandi[65] si occupò anche Gottfried Wilhelm Leibniz, il quale assunse talvolta una posizione prudente, come possiamo rilevare dalla seguente lettera a Jacopo Riccati (1676-1754):

> "Giudizio del Sig.r Leibnizio intorno la Dissertazione del Co. Jacopo Riccati [...] Io vi supplico Signore di ringraziare il Sig.r Conte Riccati, ed il Sig.r Zendrini della bontà, che mostrano per me. Io vorrei loro poter essere utile in qualche cosa. Frattanto io desidero che essi continuino ad introdurre in Italia le scienze profonde. Io non so s'eglino abbiano veduto quello ch'ho notato sopra la questione se 1 -1+1-1 ecc. all'infinito è uguale a 1/2 come il R. P. Grandi ha asserito, e in qualche maniera con ragione. Imperciocché $1/(1+x)$ è $1-x+xx-x^3+x^4-x^5$ ecc. ed allora che la lettera x si eguaglia ad 1, ne vien 1/(1+1) = 1-1+1-1+1-1 ecc. = 1/2. In questo mentre sembra, che questo sia un assurdo manifesto. Negli Atti di Lipsia io credo di aver dato lo scioglimento di questo enigma della scienza dell'infinito" (la lettera, trasmessa a Riccati tramite Bourguet, è senza data, ma probabilmente venne scritta intorno al 1715: Michieli, 1943, p. 579).

---

negativamente divergente; posizionando invece le parentesi in modo diverso, potremmo scrivere: 1+(-2+3)+(-4+5)+(-6+7)+... = 1+1+1+1+... e la stessa serie sembrerebbe essere positivamente divergente. È evidente che, dal punto di vista moderno, i procedimenti ora segnalati sono assolutamente inaccettabili (per le stesse ragioni che sono state sopra esposte con riferimento alla serie di Grandi).

[65] Anche Leonhard Euler e Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) ritenevano che la serie di Grandi avesse somma 1/2.

Come ricordato alla fine di questa citazione, Leibniz si occupò della serie di Grandi anche in alcune lettere a Christian Wolf (1678-1754) del 1713, nelle quali veniva introdotto un interessante argomento probabilistico che influenzò matematici della statura di Johann Bernoulli (1667-1748) e di Daniel Bernoulli (1700-1782). Leibniz osservava che "interrompendo" la serie 1 -1+1-1+... dopo un numero qualsiasi di addendi, è possibile ottenere come risultato 0 o 1 con la stessa "probabilità" (0 considerando un numero pari di addendi; 1 considerando un numero dispari di addendi). Dunque il valore che può essere ritenuto più "probabile" dell'intera somma di infiniti addendi verrebbe ad essere la media aritmetica tra 0 e 1, ovvero1/2[66]. Citiamo a tale riguardo la testimonianza del matematico veneziano G. Grones, che nel 1831 scrisse (ricordando proprio le lettere di Leibniz a Wolf pubblicate negli *Acta Eruditorum Lipsiae*):

"Rinnovellatosi dal preclarissimo geometra p. Guido Grandi la quistione se 1-1+1-1... sia = 1/2, e come si possa evitare l'assurdo, mentre essendo 1 -1 = 0 sembra che tutta la serie a null'altro debba ridursi che a zero; quantunque non si possa altronde negare che se nella serie $1/(1+x)$ è $1-x+xx-x^3 \ldots \infty$ si faccia $x = 1$ non abbiasi 1/2 = 1-1+1-1...; il dottissimo Wolf chiese al Leibnitz la spiegazione dell'enimma. Questo sommo matematico, poi che ha osservato che se la serie è finita, consti d'un numero pari di membri e termini in meno, siccome sarebbe 1-1 ovvero 1-1+1-1 dà zero per risultamento: e se consti d'un numero dispari di membri e termini in più siccome 1 ovvero 1-1+1

[66] Lo stesso Leibniz si rendeva conto che "il suo ragionamento era più metafisico che matematico, ma aggiungeva che in Matematica c'erano più verità metafisiche di quanto si credesse comunemente" (Kline, 1991, I, p. 520). Wolf andò addirittura oltre nell'uso dell'"argomento probabilistico", e cercò di applicare le considerazioni leibniziane ad altre serie indeterminate.

etc. dà sempre l'unità, stabilisce: *E quando la serie è infinita, ovvero quando 1-1+... etc. supera un qualsivoglia numero di addendi, allora, non potendosi più assegnare il numero degli addendi, diviene impossibile dare a tale numero la qualifica di pari o di dispari: dunque [...] il passaggio dal finito all'infinito corrisponde a quello dai valori 0 e 1 (che vengono meno) all'unica media tra di essi*" (Grones, 1831, pp. 37-38)[67].

Si noti che argomentazioni di questo genere saranno considerate accettabili anche da Giuseppe Luigi Lagrange e da Siméon Denis Poisson (1781-1840).

4.4.6. Le serie nell'opera di Leonhard Euler

Nell'edizione del 1797 del *Traité du Calcul differentiel et Integral* (riedito nel 1810-1819, I, 4) di Sylvestre-François Lacroix (1765-1843) troviamo:

$$\frac{a}{a-x} = \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^i = 1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^3}{a^3}+\ldots$$

Lacroix riconosceva che tale sviluppo richiede la condizione $|x|<|a|$, ma affermava che il collegamento tra la funzione e la serie sussiste ovunque (e si noti che per $a = 1$ e $x = -1$ si ottiene la convergenza della serie di Grandi a 1/2), mostrandosi in ciò vicino alle concezioni

[67] La traduzione qui riportata è libera; la citazione originale della lettera di Leibniz a Wolf è in latino: "Et cum series est infinita nempe 1-1+... etc. in infinitum ita ut excedat numerum quemcumque, tunc evanescente natura numeri, evanescit etiam paris aut imparis assignabilitas: et cum ratio nulla sit paritate magis, aut imparitate, adeoque pro prodeunte 0 magis quam pro 1, fit admirabilis naturae ingenio, ut transito a finito ad infinitum simul fiat transitus a disjunctivo (jam cessante) ad unum (quod superest) positivum inter disjunctiva medium (Act. Erudit. Lipsiae Tom. V. ab an. 1711 ad an. 1719 Epist. G.G.L. ad V. claris. Ch. Wolfium)" (riportata in: Grones, 1831, p. 38).

precedentemente sostenute da Euler nelle *Institutiones Calculi Differentialis*:

"Diciamo, quindi, che la somma di una serie infinita è l'espressione finita dal cui sviluppo è generata la serie. In questo senso la somma della serie infinita $1-x+x^2-x^3+...$ sarà $1/(1+x)$ perché la serie nasce dallo sviluppo della frazione, *qualunque sia il numero che viene sostituito a x*" (Euler, 1755-1787, il corsivo è nostro).

Se dunque da un lato Leonhard Euler deve essere considerato uno dei più geniali ricercatori della storia della Matematica[68], è altresì vero che alcuni suoi procedimenti (e tra questi molti riguardano le serie numeriche divergenti ed indeterminate) non potrebbero essere modernamente considerate accettabili[69]. M. Kline giustamente osserva che "Newton, Leibniz, Euler e perfino Lagrange consideravano le serie come una estensione dell'Algebra dei polinomi e difficilmente si rendevano conto che, introducendo le somme con un numero infinito di termini, si trovavano di fronte a nuovi problemi" (Kline, 1991, I, p. 537).

---

[68] Euler fu detto dai propri contemporanei *Princeps Mathematicorum*; Carl Friedrich Gauss (1777-1855), che come Euler sarà detto *Princeps Mathematicorum*, riconobbe i meriti del grande matematico svizzero ed affermò: "Lo studio delle opere di Euler rimane la miglior scuola nei diversi campi della Matematica e non può essere rimpiazzato da nient'altro" (Struik, 1981, p. 160). L'astronomo francese François Arago (1786-1853) definì Euler "l'incarnazione dell'Analisi": con Euler, infatti, l'Analisi seicentesca si trasformò nella moderna disciplina studiata ai giorni nostri (Dieudonné, 1989). Scrive C.B. Boyer: "Se gli *Elementi* euclidei rappresentarono la pietra angolare della Geometria [...] l'*Introductio in analysin infinitorum* di Eulero può essere considerato come la chiave di volta dell'Analisi" (Boyer, 1982, p. 512).

[69] Scrive D.J. Struik: "È istruttivo dar conto non solo di alcuni dei contributi di Euler alla scienza, ma anche della debolezza di qualche sua conclusione... Non possiamo seguire Euler quando scrive che 1-3+5-7+... = 0. Certo bisogna stare attenti a non criticare troppo frettolosamente Euler per il suo modo di manipolare serie divergenti... A molti dei risultati del suo lavoro apparentemente indiscriminato sulle serie è stato dato un senso assolutamente rigoroso da parte dei matematici moderni" (Struik, 1981, pp. 160-161; si veda inoltre: Arrigo, 1997, pp. 47-48).

Dunque gli sviluppi in serie venivano considerati da molti grandi matematici, tra i quali lo stesso Euler, come *rappresentazioni polinomiali alternative per la funzione originaria, senza alcuna previa considerazione delle condizioni di convergenza*. Come vedremo, molte operazioni erroneamente svolte sulle serie numeriche anche in àmbito didattico sono (direttamente o indirettamente) riconducibili a questa situazione.

Quanto ora affermato non deve però indurre il lettore a credere che Euler non avesse una precisa nozione delle serie non convergenti. Prima di lasciare il sommo matematico svizzero, ricordiamo dunque un suo elegante risultato riguardante le serie divergenti.

Euler dimostrò che la serie dei reciproci dei numeri primi diverge, e tale risultato implica chiaramente (in forma moderna) la celebre affermazione euclidea dell'infinità dell'insieme dei numeri primi.

Consideriamo innanzitutto che ogni numero intero positivo n può essere scritto in forma unica nome prodotto di un numero q privo di fattori quadrati e di un numero m^2 (seguiremo la dimostrazione euleriana facendo riferimento a: Tenenbaum & Mendès France, 1997, pp. 23-24).

Indicando con q un numero privo di fattori quadrati, possiamo dunque scrivere:

$$\sum_{n \le x} \frac{1}{n} = \sum_{q \le x} \left(\frac{1}{q} \sum_{m \le \sqrt{x/q}} \frac{1}{m^2} \right) \le \sum_{q \le x} \left(\frac{1}{q} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} \right)$$

(la prima uguaglianza potrebbe non apparire subito evidente a qualche lettore: potrebbe essere utile fare qualche prova; ad esempio, con $x = 20$).

La seguente minorazione non richiede particolari commenti:

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^2}\le 1+\sum_{m=2}^{+\infty}\frac{1}{(m-1)m}=1+\sum_{m=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\right)=2$$

(la serie $\sum_{m=2}^{+\infty}\frac{1}{(m-1)m}=\sum_{m=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\right)=1$, "telescopica", è quella studiata da Jakob Bernoulli, precedentemente citata) e ci permette dunque di scrivere:

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{n}\le 2\sum_{q\le x}\frac{1}{q}$$

Consideriamo ora la somma $\sum_{q\le x}\frac{1}{q}$ ed indichiamo con p un numero primo:

$$\sum_{q\le x}\frac{1}{q}\le\prod_{p\le x}\left(1+\frac{1}{p}\right)\le\exp\left\{\sum_{p\le x}\frac{1}{p}\right\}$$

La prima minorazione si ottiene sviluppando il prodotto $\prod_{p\le x}\left(1+\frac{1}{p}\right)$; la seconda notando che è: $1+a <= e^a$ (tale disequazione può essere un utile esercizio per gli studenti della scuola secondaria superiore) e ponendo quindi in questa formula: $a = 1/p$.

Possiamo dunque scrivere:

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{n}\le 2\exp\left\{\sum_{p\le x}\frac{1}{p}\right\}$$

Occupiamoci ora del primo membro della disuguaglianza così ottenuta. Osservando che $\frac{1}{n}\ge\int_n^{n+1}\frac{dt}{t}$, risulta:

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{n}\ge\sum_{n\le x}\int_n^{n+1}\frac{dt}{t}\ge\log x$$

e ciò ci permette di scrivere:

$$\log x \leq \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} \leq 2\exp\left\{\sum_{p \leq x} \frac{1}{p}\right\}$$

da cui infine:

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \geq \log\log x - \log 2$$

Considerando che:

$$\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty$$

possiamo dunque affermare che la serie dei reciproci dei numeri primi diverge (e che l'insieme dei numeri primi è quindi infinito)[70].

4.4.7. Una critica di Jacopo Riccati a Guido Grandi

Le considerazioni finora ricordate non erano però condivise da tutti i matematici del XVIII secolo. Jacopo Riccati (si veda ad esempio: Grugnetti, 1985 e 1986) criticò la diffusa posizione riguardante la convergenza della serie di Grandi a 1/2 nel proprio *Saggio intorno al sistema dell'universo* (pubblicato nel 1754, anno della morte del matematico trevigiano), in cui scrisse:

'Quanto il discorso è ingegnoso, altrettanto è fallace, perché si tira dietro delle insanabili contraddizioni. E vaglia il vero; assunta la frazione *n*/(1+1), col solito metodo ne formo la serie *n*-*n*+*n*-*n*+*n*-*n* et.cet. = *n*/(1+1). E giacché si verifica l'equazione 1-1 = *n*-*n*, o sia 1+*n* = *n*+1, ne segue, che, prorogate del pari all'infinito amendue le progressioni, tanti nulla nè più nè meno conterrà la prima, quanti la seconda. Ma sta in mio arbitrio dinotare per la spezie *n* qualsisia quantità finita, o infinitamente grande, o piccola d'ogni genere; dunque gl'infiniti zeri saranno eguali a

[70] Per una dimostrazione alternativa del risultato segnaliamo: Bagni, 2000.

norma della supposizione, che mi piacerà d'eleggere, a grandezze tali, che fra loro si risponderanno non solamente in qualunque assegnabile proporzione, ma di più in una o per un verso, o per l'altro infinitamente lontana" (Riccati, 1761, I, p. 87).

L'argomentazione riccatiana merita una breve spiegazione; dopo aver ottenuto l'uguaglianza 1/2 = 1 -1+1-1+..., "col solito metodo" si ricavi la scrittura: $n/2 = n-n+n-n+...$ Confrontiamo però le due serie; possiamo scrivere:

$$s = 1-1+1-1+... = (1-1)+(1-1)+... = 0$$
$$s' = n-n+n-n+... = (n-n)+(n-n)+... = 0$$

In base a ciò, Riccati afferma che "prorogate del pari all'infinito amendue le progressioni, tanti nulla nè più nè meno conterrà la prima, quanti la seconda" ed è dunque impossibile che esse siano uguagliabili a due "grandezze" diverse. Da ciò egli ritiene di concludere che l'affermazione di Grandi non è accettabile.

Se l'argomentazione è criticabile (in quanto basata sul "solito metodo", ovvero considerando possibili alcune operazioni che sono prive di senso se impostate con riferimento a serie indeterminate), la conclusione espressa da Jacopo Riccati appare chiara e corretta:

"Il paralogismo consiste in ciò, che il lodato Scrittore ha fatto uso d'una serie tra quelle, che dagli Analisti si chiamano parallele, dalle quali, come altresì dalle divergenti, nulla ci vien fatto di concludere. E la ragione si è, che per quanto si vada avanzando nella progressione, non succede mai, che i termini susseguenti possano trascurarsi, siccome incomparabili cogli antecedenti; la qual proprietà alle sole serie convergenti si compete" (Riccati, 1761, I, p. 86).

La considerazione di Riccati è dunque inserita nella mentalità che il mondo matematico andava sviluppando dalla metà del XVIII secolo (notiamo che la prima opera rigorosa sulle serie nella quale la nozione di convergenza viene tenuta presente in modo chiaro e corretto è *Disquisitiones generales circa seriem infinitam* di Carl Friedrich Gauss, dedicata alla serie ipergeometrica), ovvero verso la moderna consapevolezza dei rischi associati all'impiego scarsamente rigoroso delle serie non convergenti, dunque indeterminate e divergenti. Nella sostanza, la posizione riccatiana anticipò quella espressa nel 1768 da Jean Baptiste Le Rond D'Alembert (1717-1783), riassunta dall'affermazione:

"Per quanto mi riguarda, riconosco che tutti i ragionamenti e i calcoli basati su serie non convergenti [...] mi sembrano sempre estremamente sospettosi" (citato in: Silov, 1978).

Bibliografia del capitolo 4

Agostini, A. (1936), Riccati, *Enciclopedia Italiana*, XXIX, 241, Roma.

Anglin, W.S. (1994), *Mathematics. A Concise History and Philosophy*, Springer Verlag, Berlin.

Archimede (1913-1915), *Opera Omnia*, J.L. Heiberg (a cura di), I-III, Teubner, Leipzig.

Archimede (1974), *Opere*, Frajese, A. (a cura di), UTET, Torino.

Arrigo, G. & D'Amore, B. (1992), *Infiniti*, Angeli, Milano.

Arrigo, G. (1997), Cavalcata fra le serie infinite, *Bollettino docenti di matematica*, 34, 41-49.

Arzarello, F. (1980), *Matematica dell'infinito*, CLU, Torino.

Bagni, G.T. (1988), Jacopo Riccati matematico, *La matematica e la sua didattica*, II, 3, 45-50, Roma.

Bagni, G.T. (1990) *La Matematica nella Marca. Jacopo Riccati*, Edizioni Teorema, Treviso.

Bagni, G.T. (1992), Attualità di procedimenti iterativi nella storia della matematica, *La matematica e la sua didattica*, VI, 3, 22-24, Roma.

Bagni, G.T. (1993) *La matematica nella Marca: Vincenzo, Giordano e Francesco Riccati*, Edizioni Teorema, Treviso.

Bagni, G.T. (1995a), Jacopo Riccati e la storia delle equazioni differenziali, Gagatsis, A. (a cura di), *Didactisc and History of Mathematics*, Erasmus ICP-94-G-2011/11, 207-218 e 617-628, Thessaloniki.

Bagni, G.T. (1995b), I procedimenti di Jacopo e di Vincenzo Riccati nella storia delle equazioni differenziali, *Rivista di Matematica dell'Università degli Studi di Parma*, (5), 4, 7-13.

Bagni, G.T. (1996), *Storia della Matematica. I. Dall'Antichità al Rinascimento. II. Dal Rinascimento ad oggi*, Pitagora, Bologna.

Bagni, G.T. (1997a), La didattica dell'Analisi matematica nel Settecento: Vincenzo Riccati e Girolamo Saladini, *Periodico di Matematiche*, VII, 4, 37-51.

Bagni, G.T. (1997b), De nihilo geometrico (1758) di Giuseppe Torelli (1721-1781), *Didattica delle scienze*, in via di pubblicazione.

Bagni, G.T. (1997c), Riccati's grave in the Cathedral of Treviso (Italy), *The Mathematical Intelligencer*, 19, 49.

Bagni, G.T. (1998a), L'infinitesimo. Infinitesimo potenziale ed infinitesimo attuale nelle concezioni degli studenti della scuola secondaria superiore, *L'educazione matematica*, in via di pubblicazione.

Bagni, G.T. (1998b), The infinite sets. Students' conceptions before and after the study of the Calculus and the introduction of the real numbers in classroom practice, in via di pubblicazione.
Bagni, G.T. (1998c), History and Didactics of Mathematics: an experimental research, *ICMI Study*, Luminy, Marseille.
Bagni, G.T. (2000), Matematica e bellezza, bellezza della Matematica, *Rivista di Matematica dell'Università di Parma* (6) 3* (2000), 51-61.
Barbieri, F. & Pepe, L. (a cura di) (1992), Bibliografia italiana di storia delle matematiche 1961-1990, *Bollettino di storia delle matematiche*, XII, 1.
Barone, F. (1992), Matematica e logica nel pensiero di Leibniz, Conti, L. (a cura di), *La matematizzazione dell'universo. Momenti della cultura matematica tra '500 e '600*, 344-359, Università degli studi di Perugia, Porziuncola, Assisi.
Belhoste, B. (1991), *Augustin-Louis Cauchy*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg.
Bell, E.T. (1991), *I grandi matematici*, Sansoni, Firenze.
Bos, H.J.M. (1975), Differentials, high-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus, *Archive for History of Exact Sciences*, 14, 1-90.
Bostock, D. (1972-1973), Aristotle, Zeno and the potential infinite, *Proceedings of the Aristotelian Society*, 73.
Bottazzini, U.; Freguglia, P. & Toti Rigatelli, L. (1992), *Fonti per la storia della matematica*, Sansoni, Firenze.
Bottazzini, U. (1981), *Il Calcolo sublime*, Boringhieri, Torino.
Bottazzini, U. (1990), *Il flauto di Hilbert. Storia della matematica moderna e contemporanea*, UTET, Torino.

Bourbaki, N. (1963), *Elementi di storia della matematica*, Feltrinelli, Milano (*Eléments d'histoire des mathematiques*, Hermann, Paris 1960).
Boyer, C. (1969), The History of the Calculus, Hallerberg et Al. (1969), *Historical Topics for the Mathematics Classroom*, National Council of Teachers of Mathematics, Washington.
Boyer, C.B. (1982), *Storia della matematica*, Mondadori, Milano (*A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York 1968).
Brunschvicg, L. (1929) *Les étapes de la Philosophie Mathématique*, Paris.
Calinger, R. (a cura di) (1996), *Vita mathematica: historical research and integration with teaching*, Mathematical Association of America.
Carruccio, E. (1972), *Matematiche elementari da un punto di vista superiore*, Pitagora, Bologna.
Castelnuovo, G. (1938), *Le origini del Calcolo infinitesimale*, Zanichelli, Bologna (ristampa: Feltrinelli, Milano 1962).
Cavalieri, B. (1989) *Geometria degli indivisibili*, Lombardo Radice, L. (a cura di), UTET, Torino (la prima edizione dell'opera originale è del 1635; la seconda, postuma migliorata, è: *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, De Ducijs, Bononiae 1653).
Conti, L. (a cura di) (1992), *La matematizzazione dell'universo. Momenti della cultura matematica tra '500 e '600*, Università degli studi di Perugia, collana di Ricerche filosofiche, Porziuncola, Assisi.
Cornu, B. (1980), Interference des modeles spontanes dans l'apprentissage de la notion de limite, *Cahier du Seminaire de Didactique des Mathematiques et de l'Informatique*, 8, 57-83.

Cornu, B. (1981), Grandes lignes de l'evolution historique de la notion de limite, *Cahier du Seminaire de Didactique des Mathematiques et de l'Informatique*, 26, 305-326.

D'Amore, B. & Frabboni, F. (1996), *Didattica generale e didattiche disciplinari*, Angeli, Milano.

D'Amore, B. & Matteuzzi, M. (1975), *Dal numero alla struttura*, Zanichelli, Bologna.

D'Amore, B. & Matteuzzi, M. (1976), *Gli interessi matematici*, Marsilio, Venezia.

D'Amore, B. (1991), Ricerca-azione, possibile paradigma della ricerca in didattica, *La scuola se*, 79-80, 14-17.

D'Amore, B. (1993), *Problemi*, Angeli, Milano.

D'Amore, B. (1996), *L'infinito: storia di conflitti, di sorprese, di dubbi*, Opening Relation to Topic Group XIV "Infinite processes throughout the curriculum", 8th ICME, Sevilla, 14-21 July 1996 (*La matematica e la sua didattica*, 3, 1996, 322-335).

D'Amore, B. (1997), Bibliografia in progress sul tema: "l'infinito in didattica della matematica", *La matematica e la sua didattica*, 3, 289-305.

Dieudonné, J. (1989), *L'arte dei numeri*, Mondadori, Milano (*Pour l'honneur de l'esprit humain*, Hachette, Paris 1987).

Dimarakis, I. & Gagatsis, A. (1997), Alcune difficoltà nella comprensione del concetto di limite, *La matematica e la sua didattica*, 2, 132-149.

Dupont, P. (1981), *Appunti di storia dell'analisi infinitesimale. I. Le origini. II, p. II. Newton e Leibniz.* Cortina, Torino.

Edwards, C.H. Jr. (1994), *The Historical Development of the Calculus*, Springer Verlag, Berlin (prima edizione: 1979).

Enriques F. & de Santillana, G. (1936), *Compendio di storia del pensiero scientifico*, Zanichelli, Bologna (ristampa anastatica: Zanichelli, Bologna 1973).

Enriques F. (1938), *Le matematiche nella storia e nella cultura*, Zanichelli, Bologna (ristampa anastatica: Zanichelli, Bologna 1982).

Euclide (1970), *Elementi*, Frajese, A. & Maccioni L. (a cura di), UTET, Torino.

Eves, H. (1983), *An Introduction to the History of Mathematics*, Holt, Rinehart and Winston, New York.

Fauvel, J. & van Maanen, J. (1997), Storia e didattica della matematica, *Lettera Pristem*, 23, 8-13.

Fauvel, J. (1990), History in the mathematical classroom, *IREM papers*, The Mathematical Association.

Fauvel, J. (1991), *For the learning of mathematics* (numero speciale sulla storia), 11, 2.

Feldman, C.F. & Toulmin, S. (1976), Logic and the theory of mind, Cole, J. K. (a cura di), *Nebraska symposium on motivation 1975*, University of Nebraska Press, Lincoln, London.

Fischbein, E. (1987), *Intuition in science and mathematics*, Reidel, Dodrecht.

Fischbein, E., Nello, M.S. & Marino, M.S. (1991), Factors affecting probabilistic judgments in children and adolescents, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 523-549.

Frajese, A. (1969), *Attraverso la storia della matematica*, Le Monnier, Firenze.

Freguglia, P. (1982), *Fondamenti storici della Geometria*, Feltrinelli, Milano.

Furinghetti, F. & Somaglia, A. (1997), Storia della matematica in classe, *L'educazione matematica*, XVIII, V, 2, 1.

Furinghetti, F. (1993), Insegnare matematica in una prospettiva storica, *L'educazione matematica*, III, IV, 123-134.

Galilei, G. (1990), *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti alla meccanica ed i movimenti locali*, E. Giusti (a cura di), Einaudi, Torino.

Geymonat, L. (1947), *Storia e filosofia dell'Analisi infinitesimale*, Levrotto e Bella, Torino.

Geymonat, L. (1970), *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, Garzanti, Milano.

Giusti, E. (1983) *Analisi matematica*, I, Boringhieri, Torino.

Giusti, E. (1986), Ricerche galileiane: il trattato De moto aequabili come modello della teoria delle proporzioni, *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, VI, 2.

Giusti, E. (1993), *Euclides reformatus. La teoria delle proporzioni nella scuola galileiana*, Bollati Boringhieri, Torino.

Grugnetti, L. (1985), Sulla vecchia ed attuale equazione di Riccati, *Rendiconti del Seminario della Facoltà di Scienze dell'Università di Cagliari*, LV, 1, 7-24.

Grugnetti, L. (1986), L'equazione di Riccati: un carteggio inedito tra Jacopo Riccati e Nicola II Bernoulli, *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, VI, 2, 45-82.

Grugnetti, L. (1992), L'histoire des mathématiques: une expérience interdisciplinaire fondée sur l'histoire des mathématiques, *Plot*, 60, 17-21.

Guicciardini, N. (1989), *The development of Newtonian calculus in Britain, 1700-1800*, Cambridge University Press, Cambridge.

Hawkins, T. (1970), *Lebesgue's Theory of Integration. Its Origin and Development*, Madison, London.

Kahneman, D., Slovis, P. & Tversky, A. (1982), *Judgement under uncertainity, heuristic and biases*, Cambridge University Press, New York.

Kline, M. (1982), *La matematica nella cultura occidentale*, Feltrinelli, Milano (*Mathematics in western culture*, Oxford University Press, New York 1953).

Kline, M. (1985), *Matematica: la perdita della certezza*, Mondadori, Milano (*Mathematics: the loss of certainity*, Oxford University Press, New York 1980).

Kline, M. (1991), *Storia del pensiero matematico*, I-II, Einaudi, Torino (*Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, New York, 1972).

Koyré, A. (1983) *Studi newtoniani*, Einaudi, Torino.

Langer, R.E. (1935), The life of Leonhard Euler, *Scripta mathematica*, 3.

Loria, G. (1929-1933), *Storia delle matematiche dall'alba delle civiltà al tramonto del secolo XIX*, Sten, Torino (ristampa anastatica: Cisalpino-Goliardica, Milano 1982).

Loria, G. (1938), *Galileo Galilei*, Hoepli, Milano (ristampa anastatica: Cisalpino-Goliardica, Milano 1977).

Maracchia, S. (1992), Luca Valerio matematico Linceo, Conti, L. (a cura di), *La matematizzazione dell'universo. Momenti della cultura matematica tra '500 e '600*, 253-302, Università degli studi di Perugia, Porziuncola, Assisi.

Menghini, M. (1982), Cavalieri e Leibniz: dagli indivisibili al differenziale, Montaldo, O. & Grugnetti, L. (a cura di), *La storia delle matematiche in Italia*, Università di Cagliari, 385-394.

Michieli, A.A. (1943), Una famiglia di matematici e di poligrafi trivigiani: i Riccati. I. Iacopo Riccati, *Atti del Reale Ist. Veneto di Sc., Let. ed Arti*, CII,. II.

Nobre, S. (a cura di) (1994), *Meeting of the International Study Group on relations between history and pedagogy of mathematics*, Blumenau, Brasile 25-27 luglio, UNESP.

Pepe, L. (1984), Sulla trattatistica del Calcolo infinitesimale in Italia nel secolo XVIII, Grugnetti, L. & Montaldo, O. (a cura di), *La storia delle Matematiche in Italia. Atti del convegno*, Università di Cagliari, pp. 145-227.

Pepe, L. (1990), Storia e didattica della matematica, *L'educazione matematica*, III, I-2, 23-33.

Olschki, L.S. (1926), *Choix de livres anciens rares et curieux*, 6me vol. Macaronica à Mathématiques (Sciences), Firenze.

Riccardi, P. (1985), *Biblioteca matematica italiana*, Forni, Bologna.

Robinson, A. (1974), *Non-standard analysis*, North-Holland, London.

Rufini, E. (1926), *Il "Metodo" di Archimede*, Zanichelli, Bologna (ristampa: Feltrinelli, Milano 1961).

Schoenfeld, A. (1985), *Mathematical problem solving*, Academic Press, New York.

Sfard, A. (1991), On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coins, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Silov, G.E. (1978), *Analisi matematica*, Mir, Mosca.

Smith, D.E. (1959), *A source book in Mathematics*, Dover, New York (prima edizione: McGraw-Hill, 1929).

Stillwell, J. (1997), *Mathematics and its History*, Springer, Berlin (quarta edizione; prima edizione: 1989).

Struik, D.J. (1981), *Matematica: un profilo storico*, Il Mulino, Bologna (*A Concise History of Mathematics*, Dover, New York 1948).

Swetz, F.J. (1989), Using problems from the history of mathematics in classroom instruction, *Mathematics teacher*, 82, 370-377.

Swetz, F.J. (1995), To know and to teach: mathematical pedagogy from a historical context, *Educational Studies in Mathematics*, 29, 73-88.

Tall, D. (1990), Inconsistencies in the learning of calculus and analysis, *Focus on Learning Problems in Mahematics*, 12, 49-64.

Tenenbaum, G. & Mendès France, M. (1997), *Les nombres premiers*, Presses Universitaires de France, Paris.

Tsamir, P. & Tirosh, D. (1992), Students' awareness of inconsistent ideas about actual infinity, *PME* XVI, 90-97, Durham.

Turnbull, H.W.; Scott, J.F.; Rupert Hall, A. & Tilling, L. (1959-1977), *The correspondence of Isaac Newton*, I-VII, Cambridge University Press, Cambridge.

Vacca, G. (1915), Sulle scoperte di Pietro Mengoli, *Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei* (Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.), 24, 508-513, 617-620.

Vitali, G. (1979), Limiti, serie, frazioni continue, prodotti infiniti, Berzolari, L.; Vivanti, G. & Gigli, D. (a cura di), *Enciclopedia delle matematiche elementari*, I-2, Hoepli, Milano.

Weil, A. (1980), History of mathematics: why and how, Letho, O. (a cura di), *Proceedings of International Congress of Mathematicians*, Helsinki 1978, I, 227-236.

Westfall, R.S. (1989), *Newton*, I-II, Einaudi, Torino.

Testi originali riferiti al capitolo 4

Agnesi, M.G. (1748), *Istituzioni Analitiche ad uso della Gioventù Italiana*, I-II, Nella Regia Ducal Corte, Milano.

Brunacci, V. (1804), *Corso di Matematica sublime*, I-II, Allegrini, Firenze.

Carmichael, R. (1855), *A treatise on the Calculus of operations*, Longman, Brown, Green and Longmans, London.

Cauchy A.L. (1884-1897), *Oeuvres complètes*, Gauthier-Villars, Paris.

Clavio, C. (1603), *Euclidis Elementorum Libri XV*, apud Aloysium Zannettum, Roma (quarta edizione; la prima edizione degli *Elementi* commentati da Clavio è del 1574).

Commandino, F. (1619), *Euclidis Elementorum Libri XV*, Typis Flaminij Concordiae, Pesaro (prima edizione latina: Pesaro, 1572; traduzione italiana: Urbino, 1575).

De Morgan, A. (1842), *The differential and integral Calculus*, Baldwin and Cradock, London.

Euler, L. (1787a) *Institutiones calculi differentialis cum eius usu in Analysi Finitorum ac Doctrina Serierum*, I-II, Galeati, Pavia (seconda edizione; prima edizione: 1755).

Euler, L. (1787b), *Lettere ad una principessa d'Alemagna sopra diversi soggetti di fisica e di filosofia*, Ferres, Napoli (prima edizione italiana; seconda edizione dopo quella originale in francese del 1772).

Euler, L. (1796), *Introduction a l'Analyse infinitésimale*, Barrois, Paris (prima edizione francese).

Fermat, P. de (1891) *Œuvres*, I-V, Gauthier-Villars, Paris.

Frisi, A.F. (1799), *Elogio storico di Maria Gaetana Agnesi milanese dell'Accademia dell'Instituto delle Scienze e Lettrice onoraria di Matematiche nella Università di Bologna*, Galeazzi, Milano.

Frisi, P. (1825), Elogio di Bonaventura Cavalieri milanese, *Operette scelte*, Silvestri, Milano, 183-248.

Grones, G. (1831), *Sulle quantità immaginarie. Lettera indirizzata al nobilissimo e dottissimo Sig. Francesco Amalteo*, Alvisopoli, Venezia.

Lacroix, S.F. (1837), *Traité elementaire du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral*, Bachelier, Paris (quinta edizione).

Lagrange, J.L. (1813), *Théorie des fonctions analytiques*, Courcier, Paris.

Laurent, H. (1885-1887-1888), *Traité d'Analyse*, I-II-III, Gauthier-Villars, Paris.

Leibniz, G.W. (1684), Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus, quae nec fracta, nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus, *Acta Eruditorum*, maggio, Lipsia.

Leibniz, G.W. (1849-1863), *Mathematische Schriften*, I-VII., Gerhardt, C.I. (a cura di), Ascher-Schmidt, Berlin-Halle.

Leibniz, G.W. (1734), *Théodicee*, I-II, Bruxelles.

L'Hôpital, G. de (1716), *Analyse des infiniment petits*, Papillon, Paris (seconda edizione; prima edizione: 1696).

Newton, I. (1740), *Le methode des fluxions et des suites infinites*, Debure, Paris (prima edizione inglese: 1736).

Piola, G. (1844), *Elogio di Bonaventura Cavalieri*, Bernardoni, Milano.

Riccati, J. (1761), Della separazione delle indeterminate nelle equazioni differenziali di primo grado, e della riduzione delle equazioni differenziali del secondo grado, e d'altri gradi ulteriori, in: *Opere*, I, Giusti, Lucca, 433-598.

Riccati, J. (1761, 1762, 1763, 1765), *Opere*, I, II, III, Jacopo Giusti, Lucca, IV, Giuseppe Rocchi, Lucca.

Riccati, V. (1752), *De usu motus tractorii in constructione Aequationum Differentialium Commentarius*, Lelio della Volpe, Bologna.

Riccati V. & Saladini G. (1765-1767), *Institutiones Analyticae*, I-II, Stamperia di S. Tommaso d'Aquino, Bologna.

Torelli, G. (1758), *De nihilo geometrico libri II*, Carattoni, Verona.
Valerio, L. (1661), *De centro gravitatis solidorum libri tres*, Dozza, Bologna (prima edizione: Roma 1604).
Wolf, C. (1743), *Elementa Matheseos Universae*, I-II-III-IV, Gosse, Genevae.

Syllogismos.it
History and Epistemology for Mathematics Education
(Giorgio T. Bagni, Editor)