dans la figure 1, dont la figure 2 est une projection oblique. En joignant PQ′ et QP′ nous obtenons le point S ; la droite A′S passe[1] par le point inaccessible A.

La projection centrale de la figure 1 sur un oblique à celle-ci (*fig.* 3) donne la construction proposée par M. d'Ocagne. Son tracé consiste à mener par A′ deux droites quelconques (projection des parallèles par A′ dans la fig. 1) ; par les points d'intersection J et J′ nous menons deux droites quelconques (projection des parallèles auxiliaires par P et Q dans la fig. 1) sur lesquelles on a deux ponctuelles homographiques déterminées par les trois couples de points JJ′, Q′P′ et QP. La droite AA′ n'étant autre chose que l'axe perspectif des deux ponctuelles, nous obtenons un point quelconque de l'axe en joignant convenablement les points des deux supports, ici PQ′ et QP′. Le point d'intersection S est un point de la droite cherchée.

Residuo in Formula de quadratura Cavalieri-Simpson[2].

Nota de G. Peano (Torino.)

Note de la Rédaction. — *Sur la demande de M. G. Peano, professeur d'Analyse à l'Université de Turin et président de l'Academia pro Interlingua, nous reproduisons, à titre de spécimen, une note rédigée dans la langue auxiliaire internationale Interlingua.*

Formula de quadratura que nos considera es :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right],$$

que es vero, si functione f es integro, de gradu non superiore

[1] Indiquons en passant une construction très simple des points de la droite AA′ qui n'a été donnée nulle part : Si l'on mène une parallèle quelconque à BB′, qui coupe A′B en C et A′B′ en C′ et qu'on complète le triangle A′CC′ en un parallélogramme ayant CC′ comme diagonale le sommet opposé à A′ peut servir à déterminer la droite AA′.

En faisant une projection centrale de cette figure on obtient une construction analogue à celle de Lambert.

[2] Omni vocabulo es latino : *in, de, non, et ;* nomine habe forma de thema, id es : *residuo, formula, gradu. integro* (ablativo), *nos* (nominativo), *que* (ex accusativo *quem*), *ce* (ex *hoc, cetero*) ; verbo : *considera, es, occurre* (imperativo).

« Academia pro Interlingua » habe origine in 1887, et adopta Volapük publicato in 1880 ; stude Esperanto publicato in 1887 ; in 1902 publica « Idiom neutral » constructo super principio de internationalitate maximo ; et continua labores pro lingua internationale.

Articulo presente, tracto ex « Atti R. Acc. di Torino, 21, 2, 1915 », es scripto in « latino sine flexione », uno ex numeroso forma de interlingua, intelligibile sine studio ab magno publico.

ad 3 ; et pro alio functiones, es de usu frequente, ut formula de approximatione.

Ce formula occurre sub forma geometrico, in

B. Cavalieri, *Centuria di varii problemi*, Bologna, a. 1639, p. 446[1] ;

et post, in

J. Gregory, *Exercitationes geometricae*, Londini anno 1668 ;

R. Cotes, *Harmonia mensurarum*, Catabrigiæ, anno 1722, p. 33 ;

et in fine in

Th. Simpson, *Mathematical dissertations*, London, 1743, p. 109.

Es usu de appella « formula di Simpson » formula præcedente. Me adde nomine de primo auctore.

Praxi proba quod formula de Cavalieri-Simpson, es in generale satis approximato. Ergo plure auctore desidera de cognosce uno limite de errore in isto approximatione.

In libro : *Applicazioni geometriche del Calcolo infinitesimale*, Torino, Bocca, 1887, pag. 208, me publica expressione de residuo, id es de differentia inter primo et secundo membro sub forma :

$$= -\frac{(b-a)^5}{4!\,5!} D^4 f(x),$$

ubi x es uno valore medio inter a e b.

Idem risultatu es publicato ab Markov, in libro edito in S. Petersburg, 1889 ; et versione cum titulo :

Markoff, *Differenzenrechnung*, Leipzig, 1896.

Ut casu particulare de regula exposito in meo scripto : *Resto nelle formule di quadratura, espresso con un integrale definito*, « Rendiconti Acc. Lincei », 4 maggio 1913, ibi me da expressione de residuo in formula de Cavalieri-Simpson, sub forma de integrale.

In præsente scripto, me perveni ad idem resultatu, per via plus directo et plus elementare.

[1] Phrasi de Cavalieri es « Per havere la capacità della botte moltiplicaremo la terza parte della lunghezza della botte in due cerchi maggiori ed uno dei minori ».

Versione « Pro habe capacitate de vase vinario, nos multiplica tercio parte de longitudine de vase per duo circulo maiore et uno minore ».

Si nos sume axi de vase pro axi de x, et pro origine puncto medio, si longitudine de vase es h, et si $f(x)$ es area de sectione de vase, in puncto de abscissa x, et normale ad axi, tunc volumine $= \int_{-h/2}^{h/2} f(x)\,dx$; circulo maiore $= f(0)$, circulo minore $= f(h/2 = f(-h/2)$; et regula de Cavalieri dic que integrale vale :

$$\frac{h}{3}[2f(0) + f(h/2)] = \frac{h}{6}[4f(0) + f(-h/2) + f(h/2)].$$

* * *

Me considera formula de Taylor, com residuo sub forma de integrale :

$$(1)\qquad f(b) = f(a) + (b-a)\,\mathrm{D}f(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}\,\mathrm{D}^2 f(a) + \ldots$$
$$+ \frac{(b-a)^n}{n!}\,\mathrm{D}^n f(a) + \frac{1}{n!}\int_a^b (b-x)^n \mathrm{D}^{n+1} f(x)\,dx\ .$$

Me transporta $f(a)$ ab secundo in primo membro; in vice de $f(b) - f(a)$ scribe $\int_a^b \mathrm{D}f(x)\,dx$; in loco de $\mathrm{D}f$ scribe f; me obtine:

$$(2)\qquad \int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}\,\mathrm{D}f(a) + \ldots$$
$$+ \frac{(b-a)^n}{n!}\,\mathrm{D}^{n-1} f(a) + \frac{1}{n!}\int_a^b (b-x)^n \mathrm{D}^n f(x)\,dx\ .$$

Isto es uno formula de quadratura, que resulta etiam ex integratione per partes; et sub isto forma illo es enuntiato ab Joh. Bernoulli in 1694 (Taylor in 1715).

Sine minue generalitate, nos suppone que limites de integrale in formula de Cavalieri-Simpson, es -1 et $+1$; id es nos considera differentia :

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx - \frac{1}{3}[f(-1) + 4f(0) + f(1)]\ .$$

In formula (2) me fac $a = 0$, $b = 1$; et ad n me da valore 4 :

$$(3)\qquad \int_0^1 f(x)\,dx = f(0) + \frac{1}{2}\,\mathrm{D}f(0) + \frac{1}{6}\,\mathrm{D}^2 f(0)$$
$$+ \frac{1}{24}\,\mathrm{D}^3 f(0) + \frac{1}{24}\int_0^1 (1-x)^4 \mathrm{D}^4 f(x)\,dx\ .$$

$\int_{-1}^{0} f(x)$, posito $x = -z$, fi $\int_0^1 f(-z)\,dz$; et per formula (3), resulta :

$$(4)\qquad \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = f(0) - \frac{1}{2}\,\mathrm{D}f(0) + \frac{1}{6}\,\mathrm{D}^2 f(0)$$
$$- \frac{1}{24}\,\mathrm{D}^3 f(0) + \frac{1}{24}\int_0^1 (1-x)^4 \mathrm{D}^4 f(-x)\,dx\ .$$

Adde membro ad membro æqualitates (3) e (4) :

$$(5)\qquad \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = 2f(0) + \frac{1}{3}\,\mathrm{D}^2 f(0) + \frac{1}{24}\int_0^1 (1-x)^4 [\mathrm{D}^4 f(x)$$
$$+ \mathrm{D}^4 f(-x)\,dx]\ .$$

Ab formula (1), si nos fac $a = 0$, $b = 1$, $n = 3$, resulta :

$$(6)\qquad f(1) = f(0) + \mathrm{D}f(0) + \frac{1}{2}\,\mathrm{D}^2 f(0) + \frac{1}{6}\,\mathrm{D}^3 f(0)$$
$$+ \frac{1}{6}\int_0^1 (1-x)^3 \mathrm{D}^4 f(x)\,dx\ .$$

Applica isto formula (6) ad functione $f(-x)$, ubi x es variabile :

$$(7)\qquad f(-1) = f(0) - \mathrm{D}f(0) + \frac{1}{2}\,\mathrm{D}^2 f(0) - \frac{1}{6}\,\mathrm{D}^3 f(0)$$
$$+ \frac{1}{6}\int_0^1 (1-x)^3 \mathrm{D}^4 f(-x)\,dx\ .$$

Adde (6) et (7) :

$$(8)\qquad f(-1) + f(+1) = 2f(0) + \mathrm{D}^2 f(0)$$
$$+ \frac{1}{6}\int_0^1 (1-x)^3 [\mathrm{D}^4 f(x) + \mathrm{D}^4 f(-x)]\,dx\ .$$

Ab (5) et (8) suffice elimina $\mathrm{D}^2 f(0)$, per algebra elementare.

Ergo me trahe $D^2 f(0)$ ab (8), et substitue in (5) :

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = 2f(0) + \frac{1}{3}\,[f(-1) + f(1) - 2f(0)]$$

$$+ \int_0^1 \left[\frac{1}{24}\,(1-x)^4 - \frac{1}{18}\,(1-x)^3\right] [D^4 f(x) + D^4 f(-x)]\,dx \ .$$

Parte integrato $2f(0) + \frac{1}{3}\,[f(-1) - 2f(0) + f(1)]$ es alio forma de $\frac{1}{3}\,[f(-1) + 4f(0) + f(1)]$, id es de secundo membro in formula de quadratura ; nota quod

$$f(-1) - 2f(0) + f(1)$$

es differentia secundo de functione f, pro tres valore -1, 0, 1 de variabile. Polynomio sub integrale :

$$\frac{1}{24}\,(1-x)^4 - \frac{1}{18}\,(1-x)^3 = -\frac{1}{24}\,(1-x)^3\left(x + \frac{1}{3}\right) .$$

Ergo resulta in fine :

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \frac{1}{3}\,[f(-1) + 4f(0) + f(1)] \tag{9}$$

$$- \frac{1}{24} \int_0^1 (1-x)^3\left(x + \frac{1}{3}\right)[D^4 f(x) + D^4 f(-x)]\,dx \ ,$$

que es formula de quadratura de Cavalieri, cum residuo sub forma de integrale.

In isto residuo, factore $(1-x)^3\left(x + \frac{1}{3}\right)$ conserva signo constante positivo, dum x varia in limites de integrale, 0 ed 1 ; ergo lice transporta ex integrale secundo factore, $D^4 f(x) + D^4 f(-x)$, que nos pote scribe $2D^4 f(z)$, ubi z indica uno valore medio inter -1 et $+1$.

$$\int_0^1 (1-x)^3\left(x + \frac{1}{3}\right)[D^4 f(x) + D^4 f(-x)]\,dx$$

$$= 2D^4 f(z) \int_0^1 (1-x)^3\left(x + \frac{1}{3}\right) dx \ .$$

Nunc

$$\int_0^1 (1-x)^3\left(x + \frac{1}{3}\right) dx = \frac{2}{15} \ ,$$

Substitue in (9) ad ultimo integrale isto valore :

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \frac{1}{3}\,[f(-1) + 4f(0) + f(1)] - \frac{1}{90}\,D^4 f(z) \tag{10}$$

ubi z es uno valore incognito, inter -1 et $+1$.

Pro obtine integrale inter limites a et b, nos muta variabile $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\,t$; posito $g(t) = f(x)$, nos habe :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{+1} g(t)\,dt \ ; \quad g(-1) = f(a) \ , \quad g(0) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) ,$$

$$g(1) = f(b) \ , \quad D^4 gt = \left(\frac{b+a}{2}\right)^4 D^4 f(x) \ ;$$

et in fine :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \frac{1}{90 \times 32}\,D^4 f(x) \ ,$$

ubi x in residuo es uno valore medio inter a et b. Coefficiente $\frac{1}{90 \times 32}$ vale $\frac{1}{4!\,5!}$, ut es scripto in principio de præsente nota.