



**Università degli Studi di Padova**

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
Corso di Laurea in Matematica

TESI DI LAUREA

**Formule di cubatura  
su unioni di dischi**

Candidato:  
**Marco Agugiaro**  
Matricola 1050290

Relatore:  
**Prof. Alvise sommariva**

---

Anno Accademico 2014 - 2015  
4 Dicembre 2015

# Indice

<b>1</b>	<b>Cubatura su un dominio <math>\Omega</math> unione di dischi</b>	<b>3</b>
1.1	Discussione in letteratura . . . . .	3
1.2	Individuazione del problema . . . . .	4
1.2.1	Riduzione del problema . . . . .	5
1.2.2	Determinazione della frontiera . . . . .	6
1.2.3	Partizione del dominio . . . . .	8
1.2.4	Nodi e pesi . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Esperimenti numerici</b>	<b>16</b>

# Introduzione

Data una funzione integrabile  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $\Omega$  dominio compatto definiamo

$$I(f) = \int_{\Omega} f(x) \, dx$$

Il problema della cubatura è quello di determinare dei punti  $\{p_i\}_{i=1,\dots,m} \subset \Omega$  detti nodi e numeri reali  $\{w_i\}_{i=1,\dots,m}$  detti pesi che consentano di approssimare  $I(f)$  con

$$I_n(f) = \sum_{i=1}^m f(p_i) w_i$$

mantenendo per quanto possibile contenuto l'errore. Tale formula si dice avere *grado di precisione*  $n$  se, denotato con  $\mathbb{P}^n$  lo spazio vettoriale dei polinomi di grado *totale* minore o uguale a  $n$  su  $\mathbb{R}^2$  si ha

$$I(f) = \int_{\Omega} f(x) \, dx = \sum_{i \in I} f(p_i) w_i = I_n \quad \forall f \in \mathbb{P}^n.$$

L'argomento è di grande interesse in ambito numerico e computazionale, ma data la dipendenza dello dal dominio di integrazione non esiste una soluzione indipendente dallo stesso. Sono stati raggiunti risultati efficienti o perfino ottimali su certi  $\Omega$  ma in generale il problema rimane aperto.

In questo lavoro vogliamo studiare il caso  $\Omega = \bigcup_{i=1}^M D_i^*$  dove  $D_i^*$  è un disco in  $\mathbb{R}^2$  di centro  $c_i^* = (x_i^*, y_i^*)$  e raggio  $r_i^* > 0$ . Quale restrizione ci limiteremo al caso privo di buchi.

L'approccio adottato è quello di costruire una partizione costituita da triangoli o poligoni e settori circolari, figure gestibili grazie a risultati già presenti in letteratura. Lo scopo principale sarà di costruire un algoritmo che faccia questa partizione nel caso più generale possibile e nel modo più rapido.

Confronteremo infine questo metodo con quello sviluppato in un recente articolo dei professori A. Sommariva e M. Vianello (*Algebraic quadrature on the intersection of planar disks*[1]).

Il vantaggio del metodo proposto in questo lavoro consiste nel fatto che i pesi risultano positivi a differenza di [1].

Ne metteremo a confronto velocità, precisione e eventuali limiti con esempi numerici.

# Capitolo 1

## Cubatura su un dominio $\Omega$ unione di dischi

### 1.1 Discussione in letteratura

Sia  $D_i^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_i^*)^2 + (y - y_i^*)^2} \leq r_i^*\}$  un disco di centro  $(x_i^*, y_i^*)$  e raggio  $r_i^*$ . Nell'articolo [1] gli autori hanno studiato il problema della ricerca di nodi  $\{p_i\}_{i=1, \dots, m}$  e pesi  $\{w_i\}_{i=1, \dots, m}$  per formule di cubatura nel caso di  $\Omega_1 = \bigcup_{i=1}^{M^*} D_i^* \subseteq \mathbb{R}^2$  e  $\Omega_2 = \bigcap_{i=1}^{M^*} D_i^* \subseteq \mathbb{R}^2$ .

Nel caso dell'intersezione è stato sviluppato il programma **gqintdisk** contenuto nel pacchetto [3] che suddivide  $\Omega_2$  in regioni più gestibili dette *settori circolari generalizzati* e su ciascuna di queste calcola nodi e pesi, l'unione sui vari elementi del ricoprimento da la formula di cubatura desiderata.

Nel caso dell'unione, in cui il dominio è  $\Omega_1$ , la soluzione trovata si basa sul principio di inclusione-esclusione esteso al caso integrale per cui

$$\iint_{\bigcup_{i=1}^{M^*} D_i^*} f(x) \, dx = \sum_{k=1}^{M^*} \sum_{S=\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, M^*\}} \iint_{\Omega_S = D_{i_1}^* \cap \dots \cap D_{i_k}^*} f(x) \, dx \quad (1.1)$$

per ogni funzione  $f$  integrabile. Data ora  $f \in \mathbb{P}^n$  si calcolano  $\{p_j^{(S)}\}_{j=1, \dots, m_S}$  e  $\{w_j^{(S)}\}_{j=1, \dots, m_S}$  relativi a  $\Omega_S = \bigcap_{i \in S} D_i^*$ , dove  $S$  è un sottoinsieme di  $1, \dots, M^*$ , tali che

$$\iint_{\bigcup_{i=1}^{M^*} D_i^*} f(x) \, dx = \sum_{k=1}^{M^*} (-1)^k \sum_{S=\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, M^*\}} \sum_{j=1}^{\nu(S)} f(p_j^{(S)}) w_j^{(S)} \quad (1.2)$$

che garantiscano cioè *grado algebrico di precisione gdp* pari a  $n$ . Si può stimare la cardinalità dell'insieme dei nodi come  $\nu(s) \lesssim (k-1)n^2$  in base ai risultati ottenuti con l'intersezione di dischi.

Il numero di possibili intersezioni di una collezione di  $M$  dischi è uguale a  $\sum_{k=1}^M \binom{n}{k} = 2^M + 1$  e di conseguenza il costo computazionale del processo cresce esponenzialmente all'aumentare del numero di dischi e, nonostante la presenza di dischi disgiunti da altri abbassi di molto il numero di intersezioni da considerare, non è possibile a priori determinare una stima migliore

data l'arbitrarietà del problema. Si dimostra che la determinazione di nodi e pesi nel caso limite in cui ogni disco interseca ogni altro  $C$  ha costo di circa  $2^{M-1}n^2 \lesssim C = \text{card}(\{p_j^{(S)}\}) \lesssim M2^{M-1}n^2$  fissato il numero  $M$  dei dischi e facendo variare il  $gdp = n$ . L'unico trucco utilizzato in tale senso è scartare i dischi  $D_i^*$  completamente contenuti in un altro  $D_j^*$  ovvero  $D_i^* \subset D_j^*$  in modo da diminuire il numero di dischi complessivi, ma a priori non è possibile effettuare ulteriori riduzioni del problema.

Nella pratica tale stima è piuttosto larga ma il numero effettivo di punti da calcolare cresce comunque notevolmente rendendo questo approccio, seppur teoricamente corretto, di difficile computazione al crescere del numero di dischi.

L'approccio da noi proposto in questo lavoro non ha una dipendenza diretta dal numero di dischi, dipende bensì dal numero minimo di archi di circonferenza necessari alla partizione della frontiera  $\partial\Omega$ .

## 1.2 Individuazione del problema

Sia  $D_i^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_i^*)^2 + (y - y_i^*)^2} \leq r_i^*\}$  un disco di centro  $(x_i^*, y_i^*)$  e raggio  $r_i^*$ . Inoltre sia

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{M^*} D_i^* \subseteq \mathbb{R}^2 \quad (1.3)$$

una regione bivariata priva di buchi, ovvero per ogni circuito chiuso  $\Gamma \subseteq \Omega$  il suo interno  $\Omega_\Gamma$ , nel senso del teorema di Jordan, è completamente contenuto in  $\Omega$ .

Il proposito è determinare  $w_j > 0$  e punti  $p_j = (x_j, y_j) \in \Omega$  cosicché posti

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^N w_j f(x_j, y_j); \quad I(f) = \int_{\Omega} f(x, y) \, dx dy \quad (1.4)$$

si abbia che  $I_n$  ha g.d.p.  $n$ , cioè  $I(f) = I_n(f)$  per ogni polinomio  $f$  di grado totale inferiore o uguale a  $n$ .

L'algoritmo utilizzato si compone di diverse parti

- elimina dischi completamente contenuti in altri, cioè quei  $D_i^*$  per cui si può stabilire a priori che  $D_i^* \subseteq D_j^*$  per qualche  $j \in \{1, \dots, M\}$ ;
- per ogni circonferenza  $\Gamma_i = \partial D_i$  di uno dei dischi rimanenti individua gli archi  $\gamma_i^k$  che appartengono alla frontiera di  $\partial\Omega$ ;
- costruisce settori circolari  $S_i^k$  su ogni arco  $\gamma_i^k$ , partiziona il dominio rimanente con unioni di triangoli o più in generale poligoni;
- calcola nodi  $(x_i, y_i)$  e pesi  $w_i$  per ciascun elemento del ricoprimento;

che analizziamo nello specifico.

Nel caso di partizionamenti con triangoli gli elementi così costruiti rispettano le

condizioni

$$\begin{aligned}\Omega &= \bigcup_{j=1}^{N_S} S_j \cup \bigcup_{k=1}^{N_T} T_k; \\ \mathring{S}_j \cap \mathring{S}_k &\neq \emptyset \quad \forall j \neq k \in \{1, \dots, N_S\} \\ \mathring{T}_j \cap \mathring{T}_k &= \emptyset \quad \forall j \neq k \in \{1, \dots, N_T\}; \\ \mathring{T}_j \cap \mathring{S}_k &\neq \emptyset \quad \forall j = 1, \dots, N_T, \quad k = 1, \dots, N_S\end{aligned}$$

ovvero la loro unione ricopre  $\Omega$  e presi due qualsiasi elementi di questa famiglia di figure gli interni risultano disgiunti, in questo modo le sovrapposizioni che verranno contate più volte avranno misura di Lebesgue nulla e non influiranno nel calcolo dell'integrale.

Più in generale per i poligoni rimanenti devono valere

$$\begin{aligned}\Omega &= \bigcup_{j=1}^{N_S} S_j \cup \bigcup_{k=1}^{N_{Pol}} Pol_k; \\ \mathring{S}_j \cap \mathring{S}_k &\neq \emptyset \quad \forall j \neq k \in \{1, \dots, N_S\}; \\ Pol_j \cap Pol_k &= \emptyset \quad \forall j \neq k \in \{1, \dots, N_{Pol}\}; \\ Pol_j \cap \mathring{S}_k &\neq \emptyset \quad \forall j = 1, \dots, N_{Pol}, \forall k = 1, \dots, N_S\end{aligned}$$

### 1.2.1 Riduzione del problema

La prima parte dell'algoritmo si occupa di scartare quei dischi, riconoscibili a priori, che "non contribuiscono" alla costruzione di  $\Omega$ . Qualora un cerchio  $D_i^*$  sia contenuto o tangente internamente a un altro disco  $D_j^*$  quando procediamo con l'unione dei due otteniamo  $D_i^* \cup D_j^* = D_j^*$ , non influisce quindi nella determinazione di  $\Omega$  e possiamo eliminarlo.

Si individua così un sottoinsieme di dischi  $\{D_i : i = 1 \dots M\} \subseteq \{D_i^* : i = 1 \dots M^*\}$  con  $M \leq M^*$  t.c.

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^M D_i = \bigcup_{i=1}^{M^*} D_i^*$$

i quali in sostanza generano lo stesso dominio  $\Omega$ .

Per determinare se un cerchio è contenuto o meno confrontiamo la distanza tra i centri con i raggi. Dati i dischi  $D_i^*$  di centro  $v_i^* = (x_i^*, y_i^*)$  e raggio  $r_i^*$ ,  $D_j^*$  di centro  $v_j^* = (x_j^*, y_j^*)$  e raggio  $r_j^*$ , indichiamo con  $d_{ij}^* = \sqrt{(x_i^* - x_j^*)^2 + (y_i^* - y_j^*)^2}$  la distanza tra i centri.

Se  $d_{ij}^* \leq |r_j^* - r_i^*|$  si ha che  $D_i^* \subset D_j^*$  quindi  $D_i^*$  viene scartato, se  $d_{ij}^* \geq r_j^* + r_i^*$  i due cerchi sono tangenti esternamente o esterni e hanno intersezione di misura nulla, se invece  $|r_j^* - r_i^*| < d_{ij}^* < r_j^* + r_i^*$  i due dischi sono secanti.

Preso un qualunque punto  $P = (x, y) \in D_i^*$  definiamo la sua distanza dal centro del disco  $D_i^*$  con  $d_i^* = \sqrt{(x - x_i^*)^2 + (y - y_i^*)^2}$  ( $\leq r_i^*$ ) e la sua distanza dal centro del disco  $D_j^*$  con  $d_j^* = \sqrt{(x - x_j^*)^2 + (y - y_j^*)^2}$ . Consideriamo il triangolo di vertici  $P, v_i^*$  e  $v_j^*$ , i cui lati hanno lunghezza  $d_{ij}^*, d_i^*$  e  $d_j^*$ , per una ben nota disuguaglianza la somma della lunghezza di due lati è minore o uguale

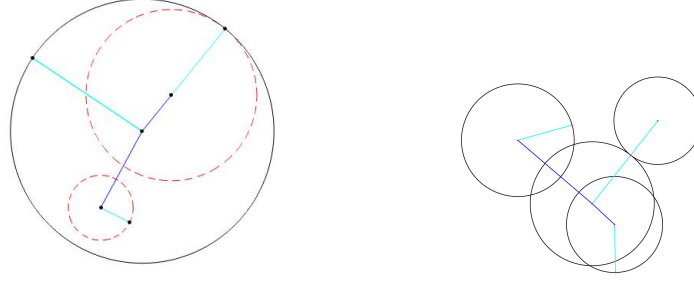


Figura 1.1: Due esempi (rosso tratteggiato) di dischi completamente contenuti in un altro (nero), in azzurro i raggi e in blu le distanze tra i cerchi. A destra un esempio di dischi validi come dominio.

della lunghezza del terzo, in particolare  $d_j^* \leq d_i^* + d_{ij}^*$  e  $d_{ij}^* \leq d_i^* + d_j^*$ , per ogni punto  $P \in D_i^*$ .

Supponiamo ora  $r_i^* \leq r_j^*$  per comodità, nel caso  $d_{ij}^* \leq r_j^* - r_i^*$  si ha

$$d_j^* \leq d_i^* + d_{ij}^* \leq r_i^* + d_{ij}^* \leq r_i^* + r_j^* - r_i^* = r_j^* \implies d_j^* \leq r_j^*$$

ovvero il punto  $P$  ha distanza dal centro  $v_j^*$  minore del raggio  $r_j^*$  e quindi appartiene al disco  $D_j^*$ . Questo vale per ogni punto  $P \in D_i^*$  e di conseguenza  $D_i^* \subset D_j^*$ .

Se invece siamo nel caso  $d_{ij}^* \geq r_j^* + r_i^*$  e per assurdo  $\exists P \in D_i^* \cap D_j^*$  allora

$$d_j^* \leq r_j^* \leq d_{ij}^* - r_i^* \leq d_{ij}^* + d_i^* \implies d_{ij}^* \geq d_i^* + d_j^*$$

e ricordando che deve valere  $d_{ij}^* \leq d_i^* + d_j^*$  si ha che la posizione reciproca dei dischi deve essere esterna o tangente esterna.

Nel caso restante  $r_j^* - r_i^* < d_{ij}^* < r_j^* + r_i^*$  si hanno intersezioni.

### 1.2.2 Determinazione della frontiera

Una volta selezionati i dischi  $\{D_1, \dots, D_M\} \subseteq \{D_1^*, \dots, D_{M^*}^*\}$  cosicchè  $\Omega = \bigcup_{i=1}^M D_i$  si procede con il definire la frontiera  $\partial\Omega$  del dominio. A tal proposito per ogni disco  $D_i$  si escludono dalla circonferenza  $\Gamma_i = \partial D_i$  gli archi contenuti in altri dischi. Per individuarli vengono confrontati a due a due  $D_i$  e  $D_j$  con  $j \neq i$  per ottenere l'arco di  $\Gamma_i$  non contenuto in  $D_j$ , diciamo  $\gamma_{ij} = \Gamma_i \cap (\Gamma_i \cap D_j)^c$  (dove l'apice  $c$  indica il complementare), allora la porzione di  $\Gamma_i$  che appartiene alla frontiera  $\partial\Omega$  è l'intersezione tra tutte le possibili  $\gamma_{ij}$  al variare di  $j$ . In questo modo si ottiene un insieme di archi

$$\gamma_i^k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = x_i + r_i \cos(\theta), y = y_i + r_i \sin(\theta), \theta \in [\alpha_i^k, \beta_i^k]\} \quad (1.5)$$

dove  $\alpha_i^k < \beta_i^k$  e per  $k = 1, \dots, n_i$ , coi cui

$$\bigcup_{k=1}^{n_i} \gamma_i^k \subseteq \partial\Omega \quad \forall i = 1, \dots, M$$

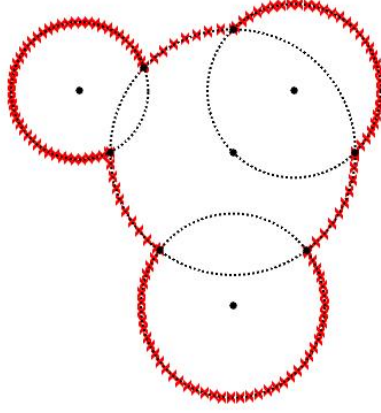


Figura 1.2: Nel caso di quattro dischi (neri punteggiati) disposti come in figura, gli archi evidenziati (x rosse) appartengono alla frontiera della figura, la loro unione dà l'intera frontiera e hanno al più in comune un estremo. Sono esattamente le circonferenze dei dischi in questione meno gli archi contenuti in altri cerchi.

$$\Gamma_i \setminus \bigcup_{k=1}^{n_i} \gamma_i^k \subseteq \dot{\Omega} \quad \forall i = 1, \dots, M$$

ovvero ciascuno degli archi selezionati  $\gamma_i^k$  fa parte della frontiera di  $\Omega$  mentre il resto della circonferenza è composto di punti interni del dominio. Inoltre l'unione degli archi di ogni cerchio ricopre l'intera frontiera, ovvero

$$\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^M \bigcup_{k=1}^{n_i} \gamma_i^k$$

Un arco  $\gamma_i^k$  così costruito ha i due estremi

$$P_i^k = (x_i + r_i \cos(\alpha_i^k), y_i + r_i \sin(\alpha_i^k))$$

$$Q_i^k = (x_i + r_i \cos(\beta_i^k), y_i + r_i \sin(\beta_i^k))$$

i quali, se non coincidenti, appartengono alla frontiera di (almeno) un altro disco e coincidono con un estremo di un suo arco sulla frontiera, ovvero esistono  $D_{j_1}$  e  $D_{j_2}$   $j_1 \neq i \neq j_2$  con archi sulla frontiera  $\gamma_{j_1}^{k_1} = \widehat{P_{j_1}^{k_1} Q_{j_1}^{k_1}}$  e  $\gamma_{j_2}^{k_2} = \widehat{P_{j_2}^{k_2} Q_{j_2}^{k_2}}$  tali che  $\{P_{j_1}^{k_1}, Q_{j_1}^{k_1}\} \ni P_j^k$  e  $\{P_{j_2}^{k_2}, Q_{j_2}^{k_2}\} \ni Q_j^k$ . I punti interni di un arco  $\gamma_i^k$  sono invece disgiunti da qualsiasi altro arco.

Ogni arco  $\gamma_i^k$  viene descritto come

$$\gamma_i^k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = x_i + r_i \cos(\theta), y = y_i + r_i \sin(\theta) \quad \theta \in [\alpha_k, \beta_k]\} \quad (1.6)$$

dove  $v_i = (x_i, y_i)$  è il vertice del disco  $D_i$  su cui è costruito il settore e  $[\alpha_k, \beta_k]$  è l'intervallo angolare in cui è definito.



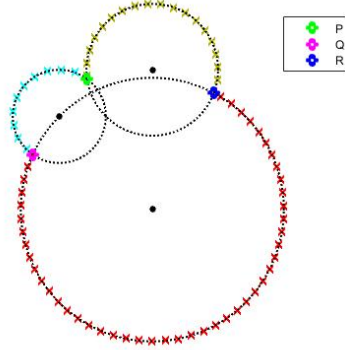


Figura 1.3: Nell'immagine un esempio di come gli archi che compongono la frontiera siano congiunti agli estremi e questi siano gli unici punti in comune con altri archi. L'arco ha gli estremi P e R in comune rispettivamente con gli archi azzurro e rosso, l'arco azzurro ha gli estremi P e Q in comune rispettivamente con gli archi giallo e rosso, l'arco rosso ha gli estremi R e Q in comune rispettivamente con gli archi azzurro e giallo.

### 1.2.3 Partizione del dominio

Il metodo per individuare la partizione di  $\Omega$  descritto si suddivide in due fasi:

- determinazione dei settori circolari facenti parte della partizione, partendo dagli archi  $\{\gamma_i^k\}$ ;
- partizione della regione rimanente che consiste in unione di poligoni, che denoteremo con Pol;

di seguito fissato il grado algebrico di precisione voluto, determineremo nodi e pesi (positivi) per le singole regioni trattate cioè settori circolari e poligoni (che suddivideremo ulteriormente a tale scopo in triangoli) ottenendo quindi, per la proprietà additiva, una formula di cubatura a pesi positivi su  $\Omega = \bigcup_{i=1}^M D_i$ . Sottolineiamo che essendo i pesi positivi, la formula ottenuta risulta più stabile di quella in [[1]] che può avere pesi negativi.

La partizione prodotta dall'algoritmo costruisce due tipologie di triangoli per suddividere i poligoni: triangoli esterni e interni. Con triangoli esterni intenderemo triangoli con un vertice sulla frontiera e gli altri due sui centri di due dischi; con interni quelli che hanno i vertici su tre centri di dischi. Gli elementi di questa famiglia devono essere tali da far valere

$$\begin{aligned} \Omega &= \bigcup_{j=1}^{N_S} S_j \cup \bigcup_{k=1}^{N_T} T_k ; \\ \overset{\circ}{S}_j \cap \overset{\circ}{S}_k &\quad \forall j \neq k ; \\ \overset{\circ}{T}_j \cap \overset{\circ}{S}_k &\quad \forall j \leq N_T, k \leq N_S ; \\ \overset{\circ}{T}_j \cap \overset{\circ}{T}_k &= \emptyset \quad \forall j \neq k \end{aligned}$$

dove  $T_j$  indica un generico triangolo del ricoprimento e  $S_k$  un generico settore.

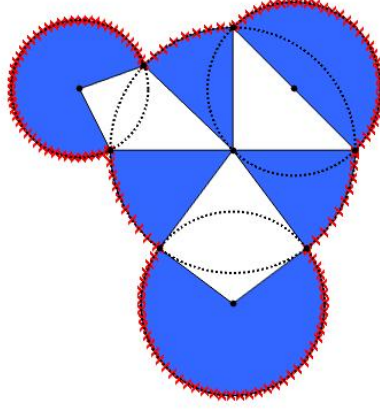


Figura 1.4: Esempio di costruzione dei settori circolari per ogni arco sulla frontiera con in comune al più in estremo dell'arco. Si identificano chiaramente le zone ancora da ricoprire come poligoni, da notare che nonostante si tratti di un unico bolco di dischi ci siano tre diversi poligoni.

In questo modo otteniamo un ricoprimento di  $\Omega$  e in cui le sovrapposizioni possibili sono date dai lati di triangoli o settori che, avendo misura di Lebesgue nulla, non influiscono sul valore dell'integrale.

### Costruzione dei settori circolari

Abbiamo visto in precedenza che è possibile determinare gli archi  $\gamma_i^k; i = 1, \dots, M; k = 1, \dots, n_i$  che descrivono la frontiera  $\partial\Omega$ . In particolare  $\gamma_i^k$  arco del disco  $D_i$  di centro  $C_i = (x_i, y_i)$  e raggio  $r_i$ .

A tale curva

$$\gamma_i^k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = x_i + r_i \cos(\theta), y = y_i + r_i \sin(\theta), \theta \in [\alpha_i^k, \beta_i^k]\}$$

associamo il settore circolare  $S_i^k$  definito come

$$S_i^k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = x_i + r \cos(\theta), y = y_i + r \sin(\theta), \theta \in [\alpha_i^k, \beta_i^k], r \in [0, r_i]\}$$

Tali settori sono per costruzione contenuti in uno dei dischi e quindi in  $\Omega$ , in particolare l'arco  $\gamma_i^k$  appartiene alla frontiera  $\partial\Omega$  mentre  $S_i^k \setminus \gamma_i^k$  appartiene a  $\overset{\circ}{\Omega}$ , ovvero l'unica parte di  $S_i^k$  sulla frontiera è l'arco  $\gamma_i^k$  mentre il resto è composto di punti interni di  $\Omega$ . Inoltre gli archi di due settori diversi si possono intersecare al negli estremi data la struttura dei  $\gamma_i^k$  descritta nelle sezioni precedenti.

Grazie a questo fatto ci è possibile dimostrare il seguente risultato

**Teorema 1.** *Siano  $S_i^k$  i settori circolari determinati dagli archi  $\gamma_i^k \in D_i = B((x_i, y_i), r_i)$ . Allora*

$$\overset{\circ}{S}_i^k \cap \overset{\circ}{S}_j^l = \emptyset \quad \forall i \neq j \in \{1, \dots, M\}, k = 1, \dots, n_i, l = 1, \dots, n_j$$

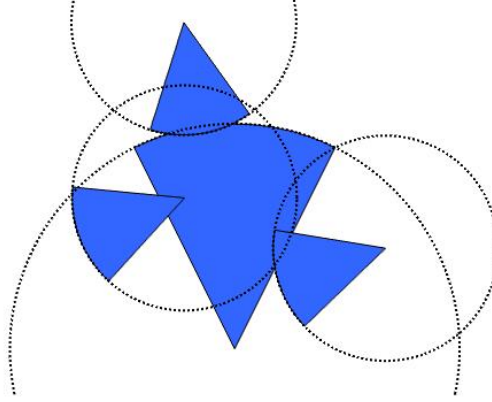


Figura 1.5: I primi casi di intersezione tra settori, in ciascun caso una parte di almeno uno dei due archi è interno all'altro disco.

*Dimostrazione 1.* Siano dati  $S_i^k$  relativo all'arco  $\gamma_i^k$  del disco  $D_i$  e  $S_j^l$  relativo all'arco  $\gamma_j^l$  del disco  $D_j$ .

Per prima cosa mostriamo che l'intersezione tra due settori non può avvenire tra l'arco  $\gamma_i^k$  del primo e l'interno del secondo.

Supponiamo di avere  $\gamma_i^k \cap \overset{\circ}{S}_j^l \neq \emptyset$ , si avrebbe che tale intersezione appartiene all'interno di  $\Omega$  che è assurdo in quanto  $\gamma_i^k$  appartiene alla frontiera  $\partial\Omega$ , (questo vale ovviamente anche a parti invertite).

Supponiamo ora che il vertice  $C_i = (x_i, y_i)$  del settore  $S_i^k$  appartenga all'interno di un altro settore  $S_j^l$ . Anche questo è assurdo in quanto, supponendo  $r_i$  il raggio del disco  $D_i$  minore di  $r_j$  raggio del disco  $D_j$  si ha che:

- se  $r_i + d_{ij} \leq r_j$ , dove  $d_{ij}$  la distanza tra i centri dei due cerchi in questione, allora  $D_i \subset D_j$ , in particolare  $\gamma_i^k \subset \overset{\circ}{\Omega}$  che è assurdo in quanto  $\gamma_i^k$  appartiene alla frontiera  $\partial\Omega$
- se  $r_i + d_{ij} > r_j$  allora preso il punto  $P$  proiezione rispetto al centro  $C_j = (x_j, y_j)$  del punto  $C_i$  sull'arco  $\gamma_j^l$  questo è punto interno di  $D_i$  in quanto la distanza tra  $P$  e  $C_i$  diciamo  $d_{Pi} = r_j - d_{ij} < r_i$  e ne esiste quindi un intorno aperto contenuto totalmente in  $D_i$ , l'intersezione di tale intorno con  $\gamma_j^l$  è non vuota e contenuta in  $\overset{\circ}{D}_i \subset \overset{\circ}{\Omega}$ , questo è assurdo per l'appartenenza di  $\gamma_j^l$  alla frontiera  $\partial\Omega$ .

Se l'intersezione tra i settori fosse tale da avere il vertice e l'arco dell'uno non contenuti o intersecanti l'altro settore e viceversa (faccio la figura) uno dei due archi sarebbe contenuto nell'altro disco rendendo anche questo caso impossibile.

Consideriamo come sempre il settore  $S_i^k$  sul cerchio  $D_i$  e supponiamo per assurdo di poter costruire un settore  $S_j^l$  relativo al disco  $D_j$  con l'intersezione in esame e che mantenga i due archi  $\gamma_i^k$  e  $\gamma_j^l$  sulla frontiera dell'unione dei due dischi(quantomeno) .

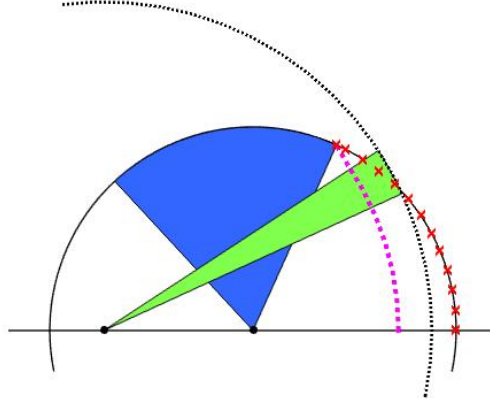


Figura 1.6: Un esempio dell'ultimo caso di intersezione possibile tra settori con ampiezza minore di  $\pi$ . Da notare che se il raggio del settore verde fosse mirare delle distanze dagli estremi dell'arco del settore blu l'arco del settore verde sarebbe entro la linea magenta e quindi interno all'altro disco. SE invece l'arco del settore verde è esterno il disco su cui è costruito, nero puntinato, contiene l'arco del settore blu.

Non è riduttivo considerare l'ampiezza dei due settori, definita come  $A_i^k = \beta_i^k - \alpha_i^k$ ,  $A_j^l = \beta_j^l - \alpha_j^l$ , minore di  $\pi$  in quanto per avere un'intersezione del tipo descritto ciascun settore deve entrare nell'altro attraverso un lato e uscire dall'altro mantenendo vertice e arco relativi esterni, se  $A_i^k > \pi$  (e/o  $A_j^l > \pi$ ) questo è impossibile per concavità del settore nel centro, se  $A_i^k = \pi$  (e/o  $A_j^l = \pi$ ) ovvero se il settore in questione è un semicerchio qualunque settore che lo intersechi attraversandolo da parte a parte interseca anche l'arco relativo.

Supponiamo quindi di avere  $S_i^k$  con ampiezza strettamente minore di  $\pi$  e di voler costruire un settore  $S_j^l$  che soddisfi alle condizioni, a meno di una rotazione possiamo inoltre supporre i due centri disposti orizzontalmente come in figura. Il nuovo settore deve avere l'arco  $\gamma_j^l$  esterno alla circonferenza per non ricadere in un assurdo e per soddisfare le condizioni può attraversare la circonferenza del disco  $D_i$  solo nella parte crocettata in rosso. Deve avere quindi raggio maggiore della distanza del centro  $C_j$  con gli estremi dell'arco  $\gamma_i^k$  (per arrivarci almeno alla parte evidenziata) ma quindi l'arco  $\gamma_i^k$  è contenuto in  $D_j$  e questo è assurdo.  $\square$

Un'alternativa più sintetica e elegante a questa dimostrazione è riportarsi a un caso generale, come fatto in questa dimostrazione alternativa.

*Dimostrazione 2.* Siano  $S_i^k$  e  $S_j^l$  i settori in questione, perché possano avere intersezione si deve avere che  $\dot{D}_i \cap \dot{D}_j \neq \emptyset$ , in caso contrario l'intersezione non ha luogo e l'enunciato è verificato. consideriamo ora  $S_i^*$  il settore costruito su  $\gamma_{ij} = \Gamma_i \cap (\Gamma_i \cap D_j)^c$  (dove l'apice c indica il complementare) ovvero la porzione di  $\partial D_i$  esterna al disco  $D_j$  e allo stesso modo definiamo  $S_j^*$ . Ora se gli archi  $\gamma_i^k$  e  $\gamma_j^l$  appartengono alla frontiera  $\partial\Omega$  allora devono quantomeno

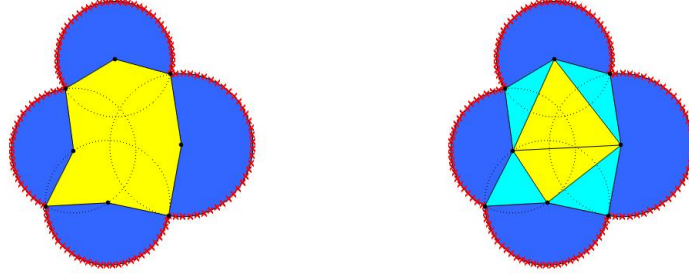


Figura 1.7: A sinistra il poligono da ticoprire in questa configurazione di dischi. A destra il ricoprimento fatto con triangoli, in azzurro gli esterni, in giallo gli interni.

appartenere rispettivamente a  $\gamma_{ij}$  e  $\gamma_{ji}$  e quindi  $S_i^k \subseteq S_i^*$  e  $S_j^l \subseteq S_j^*$ . È sufficiente quindi studiare il caso dei settori  $S_i^*$  e  $S_j^*$  la cui intersezione è di misura nulla per costruzione (o con i risultati nella dimostrazione 1 se proprio uno non si fida)).  $\square$

In questo modo è dimostrato che non ci sono intersezioni tra i settori e che ogni arco della frontiera ha un settore associato, possiamo quindi concludere che la parte di dominio rimanente è composta dall'unione di poligoni con al più vertici in comune.

Vediamo ora come trattarli.

### Partizione della regione rimanente

Lavoreremo ora su  $\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^M \bigcup_{k=1}^{n_i} S_i^k$ . Nella sezione precedente abbiamo determinato una parte della partizione costituita dall'unione di settori circolari  $\Omega_1 = \bigcup_{i=1}^M \bigcup_{k=1}^{n_i} S_i^k$ , di conseguenza analizzeremo ora  $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$  composta da un certo numero  $n_{Pol}$  di poligoni  $Pol_j$ , cioè  $\Omega_2 = \bigcup_{j=1}^{n_{Pol}} Pol_j$ . Seguiremo due metodi alternativi per determinare nomi e pesi su  $\Omega_2$ .

Il procedimento più diretto è identificare ciascuno dei poligoni  $Pol_j$   $j = 1, \dots, n_{Pol}$  e utilizzare un programma che partendo da i vertici restituisca come output nodi e pesi, come ad esempio **polygauss** [[4]]. In questo modo una volta determinati i lati di un poligono e orientato i vertici in senso antiorario si hanno direttamente i risultati desiderati.

**Triangolazione dei poligoni** Un approccio alternativo consiste nel triangolare opportunamente  $\Omega_2 = \bigcup_{j=1}^{n_{Pol}} Pol_j$ , seppure in letteratura esistano vari triangolatori provvederemo come segue.

Si costruiscono due famiglie di triangoli,  $T_P^e$  che chiameremo esterni e altri interni che invece indichiamo con  $T_{abc}^i$ , la cui unione ricopre i poligoni e le cui intersezioni a due a due sono al più i lati.

I triangoli esterni vengono costruiti per primi in quanto di semplice definizione. Per ogni punto  $P$  della frontiera  $\partial\Omega$  in comune a due archi  $\gamma_i^k$  relativo al settore  $S_i^k$  sul disco  $D_i$  e  $\gamma_j^l$  relativo al settore  $S_j^l$  sul disco  $D_j$  costruiamo il triangolo che ha per vertici  $P, C_i$  e  $C_j$ , dove  $C_i$  è il centro di  $D_i$  e  $C_j$  è il centro

di  $D_j$ , e lo indichiamo con  $T_P^e$ , indichiamo inoltre con  $V^e$  l'insieme dei punti  $P$  definiti. Per poter fare questo dobbiamo dimostrare che tale area è interna a  $\Omega$  e non interseca al suo interno alcun settore o altro triangolo.

**Teorema 2.** *Per ogni triangolo esterno  $T_P^e$  di vertici  $P = \gamma_i^k \cap \gamma_j^l$ ,  $C_i$  centro di  $D_i$  e  $C_j$  centro di  $D_j$  valgono le seguenti:*

$$T_P^e \subset \Omega, \quad T_P^e \cap T_Q^e = \emptyset \quad \forall Q \in V^e,$$

$$T_P^e \cap S_a^b = \emptyset \quad \forall a = 1, \dots, M \quad \forall b = 1, \dots, n_a$$

*Dimostrazione.* Il triangolo  $T_P^e$  è contenuto in  $\Omega$ . Infatti sia  $P_\perp$  la proiezione ortogonale di  $P$  sul segmento  $\overline{C_i C_j}$ , allora i triangoli  $\triangle PC_i P_\perp \subset D_i$  e  $\triangle PC_j P_\perp \subset D_j$  sono una partizione di  $T_P^e$  e ovviamente contenuti in  $D_i \cup D_j \subseteq \Omega$  da cui  $T_P^e \subseteq \Omega$ . Lo stesso vale per un triangolo simmetrico a questo rispetto a  $C_i, C_j$ , per simmetria dell'unione tra cerchi.

Mostriamo dapprima che il triangolo  $T_P^e$  non ha intersezioni con altri settori. Se un settore  $S_a^b$  avesse l'arco  $\gamma_a^b$  relativo anche solo in parte contenuto in  $T_P^e$  questo sarebbe in parte contenuto in  $\Omega$  fatto impossibile per costruzione di  $\gamma_a^b \in \partial\Omega$ .

Se il vertice  $C_a = (x_a, y_a)$  relativo al settore  $S_a^b$  fosse contenuto in  $T_P^e$  allora il suo raggio  $r_a$  dovrebbe essere maggiore della distanza tra  $C_a$  e  $P$  altrimenti si avrebbe  $\gamma_a^b \subseteq D_a \subset (\dot{D}_i \cup \dot{D}_j)$  e questo è impossibile per costruzione, se effettivamente è maggiore si ha che l'interno del disco  $\dot{D}_a$  interseca gli archi  $\gamma_i^k$  e  $\gamma_j^l$  e anche questo è assurdo per costruzione della frontiera.

Se uno dei vertici del triangolo  $T_P^e$  fosse contenuto nell'interno di un settore  $S_a^b$  anche un suo intorno aperto lo sarebbe, per costruzione tale aperto ha intersezione non vuota con almeno uno dei settori  $S_i^k$  e  $S_j^l$ , quindi ci sarebbe un'intersezione tra settori e questo è assurdo per costruzione.

Se infine l'intersezione tra  $T_P^e$  e  $S_a^b$  fosse tale da non comprendere né i vertici del triangolo né  $C_a$  né l'arco  $\gamma_a^b$  allora il settore intersecherebbe due lati di  $T_P^e$ , almeno uno dei quali è adiacente a uno tra i settori  $S_i^k$  e  $S_j^l$ , e quindi si avrebbe un'intersezione tra settori, impossibile per il Teorema 1.  $\square$

Il Teorema 2 stabilisce quindi che se  $\Omega_2^e = \bigcup_{q \in V^e} T_q^e$  e  $\Omega_1 = \bigcup_{i=1}^M \bigcup_{k=1}^{n_i} S_i^k$  allora  $T_{q_1}^e \cap T_{q_2}^e = \emptyset$  qualora  $q_1 \neq q_2$  e  $\Omega_1 \cap \Omega_2^e = \emptyset$  quindi i triangoli esterni così definiti possono essere utilizzati quali elementi della partizione di  $\Omega$ .

Fatto questo la porzione di  $\Omega$  non ancora coperta dalla partizione è un insieme di poligoni, in generale più semplici di quelli originari e con centri di dischi come vertici. Detto  $V^i$  l'insieme di tutti i centri di dischi vertici di triangoli esterni e  $Pol_j$  il  $j$ -esimo di questi poligoni si ha

$$\Omega \setminus \left( \bigcup_{i=1}^M \bigcup_{k=1}^{n_i} S_i^k \cup \bigcup_{q \in P} T_q^e \right) = \bigcup_{j=1}^m Pol_j$$

$$\partial Pol_j = \{ \overline{C_i C_{i+1}} : C_i = (x_i, y_i), \forall i \in J \subseteq \{1, \dots, N\} \} \quad \forall j \in \{1, \dots, n_{Pol}\}$$

dove  $(x_i, y_i)$  sono sempre le coordinate del centro dell' $i$ -esimo disco  $D_i$ .

Per riempire anche questa parte utilizziamo i cosiddetti triangoli interni  $T_{ijk}^i$  dove  $ijk$  indicano gli indici dei dischi i cui centri fanno da vertici al triangolo. In altre parole detti  $C_i = (x_i, y_i), C_j = (x_j, y_j)$  e  $C_k = (x_k, y_k)$  i centri

rispettivamente di  $D_i, D_j$  e  $D_k$  il triangolo  $T_{ijk}^i$  è

$$T_{ijk}^i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \lambda_1 x_i + \lambda_2 x_j + \lambda_3 x_k, \\ y = \lambda_1 y_i + \lambda_2 y_j + \lambda_3 y_k, \forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0 \text{ } \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1\}$$

Per fare questo si utilizza un programma triangolatore che, considerati due lati consecutivi di uno dei poligoni da partizionare costruisce un triangolo con i tre estremi come vertici nel caso in cui l'area racchiusa sia ancora interamente non coperta da altri elementi della partizione. Le condizioni si traducono nell'avere un triangolo interno al poligono e non avere nessun vertice di tale poligono all'interno della superficie del potenziale triangolo.

Alla fine del processo si ottiene il ricoprimento desiderato da cui estrarremo nodi e pesi.

#### 1.2.4 Nodi e pesi

Una volta ottenuta la partizione di  $\Omega$  si procede con l'individuazione dei nodi  $p_i$  e il calcolo dei pesi  $w_i > 0$  per la formula di cubatura; su ciascuna delle figure che appartengono al ricoprimento si calcolano singolarmente in base alla "forma".

Per determinare nodi  $\{p_i\}$  e nodi  $\{w_i\}$  di cubatura per i settori facenti parte della partizione si utilizza il programma **gqellblend** [[3];[1]]. Tale routine, fissato il grado algebrico di precisione, fornisce i punti  $\{p_i\}$  mediante una matrice e i pesi  $\{w_i\}$  in un vettore.

La regione  $S_i^k$  di vertice  $C_i$  e relativo all'arco  $\gamma_i^k(\theta)$   $\theta \in [\alpha_i^k, \beta_i^k]$  viene descritta come

$$S_i^k = \{(x, y) \in \sigma(\theta, s) : \sigma(\theta, s) = (1 - s)\gamma_i^k(\theta) + s v_i; \theta \in [\alpha, \beta], s \in [0, 1]\} \quad (1.7)$$

ovvero la superficie ottenuta facendo collassare l'arco  $\gamma_i^k$  sul centro del disco  $C_i$ .

Tale parametrizzazione ha il vantaggio di utilizzare polinomi trigonometrici di primo grado invece dei polinomi algebrici di secondo grado necessari per descrivere la stessa regione, accorgimento che consente di ridurre la complessità del procedimento come spiegato sempre in [[1]].

Va inoltre considerato che i pesi prodotti dal programma sono non-negativi e consentono l'applicazione di algoritmi per la compressione della misura.

Per i singoli triangoli della partizione  $\{T_k\}_k$ , allo scopo di velocizzare il processo, si calcola dapprima una formula su un triangolo di riferimento  $\mathcal{T}$  avente area 1, esprimendo i nodi in coordinate baricentriche. Essendo la posizione dei nodi rispetto ai vertici dipendente solo dal *gdp* desiderato, per ogni  $T_k$ , interno o esterno che sia, si determinano i punti con le stesse coordinate baricentriche di quelli di  $\mathcal{T}$ , mentre ai pesi  $\{w_i\}_i$  di  $\mathcal{T}$  corrispondono si ottengono  $\{\sigma_k w_i\}_i$  dove  $\sigma_k$  indica l'area del triangolo  $T_k$ . Per fare questo si usano i programmi in [[2]] i quali restituiscono pesi positivi.

Per additività le liste di nodi e pesi di ciascuna componente della partizione si possono unire ottenendo così la formula di cubatura desiderata per l'intero dominio  $\Omega$ .

La lista complessiva così formata di punti  $\{p_i\}_i$  e dei pesi  $\{w_i\}_i$  si può comprimere per semplificare il calcolo delle approssimazioni di integrali  $I_n(f)$  e per

fare questo si utilizza il programma **compresscub**[[1],[3]]. Questo passaggio è lecito data la positività dei pesi, condizione necessaria per l'applicabilità della routine. A questo punto si ha tutto ciò che serve per costruire una formula di cubatura per il dominio  $\Omega$ .



## Capitolo 2

# Esperimenti numerici

Per verificare l'effettiva funzionalità delle formule estratte tramite l'algoritmo proposto confronteremo gli integrali calcolati con queste con quelli derivanti dal programma **gqbultibubble** [[3],[1]] e con programma **gqmultibubbles** basato anchesso su un algoritmo che partiziona il dominio fornito dal professore A. Sommariva (in fase di ultima revisione).

Per prima cosa verificheremo che il grado di precisione algebrica delle formule sia quello desiderato ovvero, nel caso bidimensionale, data la formula a grado di precisione  $n$  si deve avere che l'integrale è esatto su ogni  $p(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} c_{ij} x^i y^j$  polinomio di grado minore o uguale a  $n$ . Per linearità dell'integrale è sufficiente analizzare il caso dei monomi  $x^i y^j \forall i \in \{0, \dots, n\}, j \in \{0, \dots, n-i\}$  che sono una base per lo spazio dei polinomi che stiamo considerando.

Nella tabella presentiamo, al variare del  $gdp$  e del dominio, i seguenti valori per il confronto

- errore relativo massimo riscontrato nel calcolo tramite la formula e errore assoluto da cui dipende;
- errore relativo massimo riscontrato nel calcolo tramite la formula con l'applicazione dell'algoritmo di compressione e errore assoluto da cui dipende;
- Numero di nodi (e pesi) necessari a ciascuna formula.

Con l'indice uno si intende il confronto con **gqmultibubble**, con l'indice 2 quello con il programma **gqmultibubbles**. Da notare che i monomi che generano l'errore massimo possono essere (e in effetti sono sempre) diversi nel caso del confronto con l'uno o l'altro programma.

L'analisi si ferma al 100-esimo  $gdp$  in quanto il numero di monomi su cui testare cresce come  $\frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \mathcal{O}(\frac{n^2}{2})$  e anche il numero di nodi cresce in modo sostanziale, rendendo il processo piuttosto lento e non fornendo risultati particolarmente interessanti (non so come metterla giù meglio, dire che se solo ci provo il mio computer chiama i sindacati mi pare brutto.)). In ogni caso con domini anche semplici risulterà spesso impossibile anche solo estrarre le formule per  $gdp$  alti quindi non è limitativo.

Con riferimento alle figure nelle pagine finali queste tabelle mostrano i risultati sui monomi peggiori con e senza l'applicazione della compressione dei nodi.

I domini scelti sono nel caso 2, 3, 4, risultato di una scelta random, mentre negli altri casi sono stati costruiti per evidenziare particolarità degli algoritmi in esame.

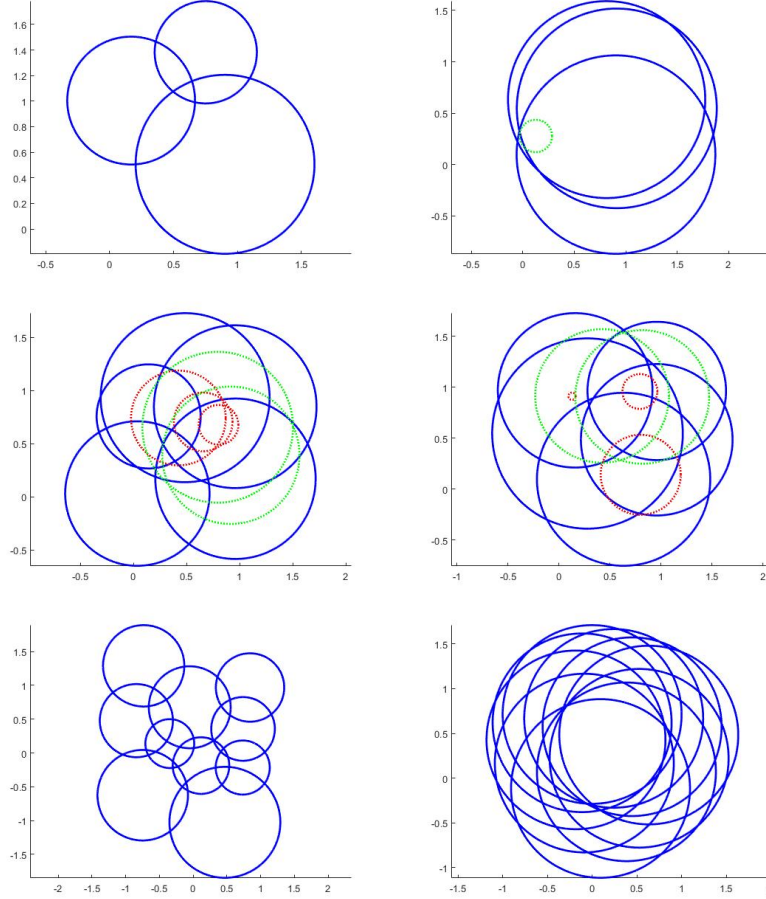


Figura 2.1: Nell'ordine da sinistra a destra e discendente i domini i sei domini presi in esame. In blu i cerchi necessari alla definizione del dominio  $\Omega$ , in rosso quelli eliminabili a priori, in verde i cerchi eliminabili ma non riconoscibili con un confronto descritto nella sottosezione 1.2.1 .

Confrontando la tabella 1 e 2 si vedono le prime differenze in termini del costo computazionale degli algoritmi su semplici domini con 3 o 4 dischi. Aggiungendo a un dominio con la stessa forma (n. di archi sul dominio, tipi di intersezioni tra i cerchi...) un disco che non dia contributo alla definizione di  $\Omega$  ma non riconoscibile a priori come interamente contenuto in un altro disco dell'unione si vede come gli algoritmi che si basano su una partizione non aumentino la cardinalità dell'insieme dei nodi mentre **gqmultibubble** basandosi sul numero cerchi e sulle intersezioni tra questi veda aumentare la cardinalità. La cardinalità dei nodi per l'algoritmo proposto e per il programma di confronto **gqbultibubble** sono in questo caso simili come ordine di grandezza, mentre i nodi estratti del programma **gqmultibubbles** si mantengono più bassi. L'er-

rore si mantiene contenuto ma peggiora ((leggermente)) al crescere del grado di precisione. Nonostante il numero di nodi richiesto dalla formula compressa sia estremamente più basso questa mantiene l'errore nello stesso ordine di grandezza, o di poco superiore con gradi alti. Il massimo *gdp* per cui la formula di compressione porta a termine il processo è 45, per valori superiori la memoria della macchina si rivela insufficiente.

Confrontando ora le tabelle 3 e 4 sono evidenti gli effetti dell'aumento del numero di dischi insistenti sulla stessa intersezione sul costo computazionale del processo con **gqmultibubble**. Facendo crescere il numero di dischi a 10 di cui solo 5 nella prima e 7 nella seconda necessari alla definizione di  $\Omega$  si vede come il numero di nodi tenda a crescere molto più velocemente per **gqbultibubble** mentre gli altri due programmi si mantengono su cardinalità più basse. Anche in questo caso gli errori sia della formula normale che di quella compressa si mantengono estremamente bassi, con un peggioramento crescente fino a un massimo di due ordini di grandezza per quella compressa. Per quanto riguarda la compressione il programma si interrompe per esaurimento della memoria con *gdp* 42 sul primo dominio e 43 sul secondo.

Le tabelle 5 e 6 fanno riferimento agli ultimui due domini, entrambi da 10 dischi ma con un diverso numero massimo di cerchi partecipanti alla stessa intersezione. Il numero di dischi massimi che partecipa a un intersezione è 3 nel primo caso. Questo facilita l'esecuzione del programma **gqmultibubble**, infatti come si vede il numero di nodi si mantiene più basso rispetto al secondo caso in cui tutti i dieci dischi intersecano la stessa zona centrale, la condizione teoricamente peggiore per **gqmultibubble**. Con grado di precisione 50 infatti il processo si interrompe per esaurimento della memoria, testando solo gli altri due programmi il processo si conclude senza intoppi con una cardinalità dell'insieme dei nodi pressochè identica nei due casi e di ordini di grandezza paragonabili ai casi precedenti. L'errore non varia sensibilmente nonostante il numero di nodi di diversi ordini di grandezza inferiori. Applicando l'algoritmo di compressione, che funziona fino al *gdp* 34, nel primo caso e 34 nel secondo la differenza è ancor più notevole, pur mantenendo l'errore relativo al di sotto di  $10^{-13}$  nel caso peggiore.

In definitiva i risultati mostrano come l'errore relativo si mantenga vicino alla precisione di macchina sui domini testati, con errori

Dominio 1	5	10	15	20
err assoluto 1	$1.0636 \cdot 10^{-13}$	$1.0614 \cdot 10^{-13}$	$1.0436 \cdot 10^{-13}$	$1.0658 \cdot 10^{-13}$
err relativo 1	$8.7497 \cdot 10^{-14}$	$8.7314 \cdot 10^{-14}$	$8.5853 \cdot 10^{-14}$	$8.7679 \cdot 10^{-14}$
err ass comp 1	$1.0547 \cdot 10^{-13}$	$1.0436 \cdot 10^{-13}$	$1.0791 \cdot 10^{-13}$	$1.0569 \cdot 10^{-13}$
err rel comp 1	$8.6766 \cdot 10^{-14}$	$8.5853 \cdot 10^{-14}$	$8.8775 \cdot 10^{-14}$	$8.6949 \cdot 10^{-14}$
err assoluto 2	$1.3323 \cdot 10^{-15}$	$1.0658 \cdot 10^{-14}$	$2.1316 \cdot 10^{-14}$	$1.4211 \cdot 10^{-14}$
err relativo 2	$9.1697 \cdot 10^{-16}$	$8.9642 \cdot 10^{-16}$	$1.2063 \cdot 10^{-15}$	$1.1743 \cdot 10^{-15}$
err ass comp 2	$4.4409 \cdot 10^{-16}$	$3.1086 \cdot 10^{-15}$	$7.3275 \cdot 10^{-15}$	$9.8588 \cdot 10^{-14}$
err rel comp 2	$4.0927 \cdot 10^{-16}$	$1.2398 \cdot 10^{-15}$	$4.1659 \cdot 10^{-15}$	$1.6936 \cdot 10^{-14}$
card 1	192	540	1107	1815
card 2	68	180	378	605
card	156	474	976	1639
card comp	21	66	136	231
Dominio 1	30	40	50	100
err assoluto 1	$1.0481 \cdot 10^{-13}$	$1.0481 \cdot 10^{-13}$	$1.0347 \cdot 10^{-13}$	$1.0258 \cdot 10^{-13}$
err assoluto 1	$8.6218 \cdot 10^{-14}$	$8.6218 \cdot 10^{-14}$	$8.5122 \cdot 10^{-14}$	$8.4391 \cdot 10^{-14}$
err relativo 1	$1.0078 \cdot 10^{-10}$	$1.1866 \cdot 10^{-10}$	$6.6589 \cdot 10^{-9}$	*
err relativo 1	$3.0640 \cdot 10^{-12}$	$6.2231 \cdot 10^{-13}$	$3.0048 \cdot 10^{-12}$	*
err assoluto 2	$2.3283 \cdot 10^{-9}$	$1.1369 \cdot 10^{-12}$	$3.5018 \cdot 10^{-7}$	$5.0463 \cdot 10^6$
err assoluto 2	$3.3450 \cdot 10^{-15}$	$3.8149 \cdot 10^{-15}$	$5.3523 \cdot 10^{-15}$	$1.4985 \cdot 10^{-14}$
err relativo 2	$1.0082 \cdot 10^{-10}$	$1.1866 \cdot 10^{-10}$	$6.6539 \cdot 10^{-9}$	*
err relativo 2	$3.0653 \cdot 10^{-12}$	$6.2231 \cdot 10^{-13}$	$3.0025 \cdot 10^{-12}$	*
card 1	3840	6615	10140	39015
card 2	1280	2205	3380	13005
card	350	6069	9334	36159
card comp	496	861	1326	*

Dominio 2	5	10	15	20
err assoluto 1	$7.3774 \cdot 10^{-14}$	$7.2775 \cdot 10^{-14}$	$1.0274 \cdot 10^{-11}$	$1.0070 \cdot 10^{-11}$
err relativo 1	$1.9925 \cdot 10^{-13}$	$1.9655 \cdot 10^{-13}$	$1.0618 \cdot 10^{-12}$	$1.0106 \cdot 10^{-12}$
err ass comp 1	$2.5997 \cdot 10^{-12}$	$1.0266 \cdot 10^{-11}$	$1.0294 \cdot 10^{-11}$	$1.0221 \cdot 10^{-11}$
err rel comp 1	$9.7914 \cdot 10^{-13}$	$1.0608 \cdot 10^{-12}$	$1.0638 \cdot 10^{-12}$	$1.0562 \cdot 10^{-12}$
err assoluto 2	$9.9920 \cdot 10^{-16}$	$1.9318 \cdot 10^{-14}$	$8.5265 \cdot 10^{-14}$	$1.1369 \cdot 10^{-12}$
err relativo 2	$4.3950 \cdot 10^{-16}$	$8.6169 \cdot 10^{-14}$	$1.1212 \cdot 10^{-15}$	$3.6574 \cdot 10^{-15}$
err ass comp 2	$3.5527 \cdot 10^{-15}$	$1.2434 \cdot 10^{-14}$	$8.6402 \cdot 10^{-8}$	$1.3358 \cdot 10^{-12}$
err rel comp 2	$1.3381 \cdot 10^{-15}$	$2.8104 \cdot 10^{-15}$	$4.7952 \cdot 10^{-13}$	$2.6518 \cdot 10^{-14}$
card 1	336	972	1971	3276
card 2	68	180	378	605
card	156	474	976	1639
card comp	21	66	136	231
Dominio 2	30	40	50	100
err assoluto 1	$1.6623 \cdot 10^{-11}$	$1.0255 \cdot 10^{-11}$	$1.0118 \cdot 10^{-11}$	$1.0104 \cdot 10^{-11}$
err relativo 1	$1.0630 \cdot 10^{-12}$	$1.0597 \cdot 10^{-12}$	$1.0456 \cdot 10^{-12}$	$1.0441 \cdot 10^{-12}$
err ass comp 1	$1.6609 \cdot 10^{-11}$	$1.0255 \cdot 10^{-11}$	*	*
err rel comp 1	$1.0621 \cdot 10^{-12}$	$1.0597 \cdot 10^{-12}$	*	*
err assoluto 2	$1.1823 \cdot 10^{-11}$	$3.8563 \cdot 10^{-10}$	$2.0981 \cdot 10^{-5}$	$3.8972 \cdot 10^4$
err relativo 2	$6.3401 \cdot 10^{-15}$	$7.9043 \cdot 10^{-15}$	$3.5794 \cdot 10^{-15}$	$2.1180 \cdot 10^{-14}$
err ass comp 2	$2.5352 \cdot 10^{-11}$	$1.9852 \cdot 10^{-8}$	*	*
err rel comp 2	$2.8809 \cdot 10^{-14}$	$9.8860 \cdot 10^{-13}$	*	*
card 1	6912	3276	18252	70227
card 2	1280	605	3380	13005
card	3504	6069	9334	36159
card comp	496	861	*	*

Dominio 3	5	10	15	20
err assoluto 1	$6.1195 \cdot 10^{-12}$	$4.6461 \cdot 10^{-12}$	$1.1138 \cdot 10^{-12}$	$3.2827 \cdot 10^{-12}$
err relativo 1	$8.9961 \cdot 10^{-13}$	$9.2198 \cdot 10^{-13}$	$6.8299 \cdot 10^{-13}$	$9.2532 \cdot 10^{-13}$
err ass comp 1	$1.0998 \cdot 10^{-12}$	$1.1069 \cdot 10^{-12}$	$1.1133 \cdot 10^{-12}$	$1.1267 \cdot 10^{-12}$
err rel comp 1	$6.7442 \cdot 10^{-13}$	$6.7877 \cdot 10^{-13}$	$6.8272 \cdot 10^{-13}$	$6.9089 \cdot 10^{-13}$
err assoluto 2	$6.6613 \cdot 10^{-16}$	$1.0460 \cdot 10^{-14}$	$4.2633 \cdot 10^{-14}$	$2.4158 \cdot 10^{-13}$
err relativo 2	$3.3833 \cdot 10^{-16}$	$6.2654 \cdot 10^{-15}$	$1.8439 \cdot 10^{-15}$	$3.9986 \cdot 10^{-15}$
err ass comp 2	$8.8818 \cdot 10^{-16}$	$1.2790 \cdot 10^{-13}$	$7.4607 \cdot 10^{-14}$	$1.1653 \cdot 10^{-11}$
err rel comp 2	$4.3677 \cdot 10^{-16}$	$2.6896 \cdot 10^{-15}$	$3.6650 \cdot 10^{-15}$	$1.4464 \cdot 10^{-12}$
card 1	47288	123588	260883	415393
card 2	124	324	684	1089
card	240	750	1520	2585
card comp	21	66	136	231
Dominio 3	30	40	50	100
err assoluto 1	$3.2725 \cdot 10^{-12}$	$1.0798 \cdot 10^{-12}$	$1.1253 \cdot 10^{-12}$	*
err relativo 1	$9.2244 \cdot 10^{-13}$	$6.6216 \cdot 10^{-13}$	$6.9007 \cdot 10^{-13}$	*
err ass comp 1	$1.0255 \cdot 10^{-12}$	$9.4813 \cdot 10^{-8}$	*	*
err rel comp 1	$1.0597 \cdot 10^{-13}$	$2.0635 \cdot 10^{-12}$	*	*
err assoluto 2	$1.8190 \cdot 10^{-12}$	$1.1642 \cdot 10^{-10}$	$2.2888 \cdot 10^{-5}$	$4.4531 \cdot 10^{-1}$
err relativo 2	$2.6567 \cdot 10^{-15}$	$2.4391 \cdot 10^{-15}$	$5.9601 \cdot 10^{-15}$	$1.0818 \cdot 10^{-14}$
err ass comp 2	$2.5466 \cdot 10^{-11}$	$9.5257 \cdot 10^{-8}$	*	*
err rel comp 2	$1.4368 \cdot 10^{-14}$	$2.0731 \cdot 10^{-12}$	*	*
card 1	878848	1513953	2320708	*
card 2	2304	3969	6084	23409
card	5520	9555	14690	56865
card comp	496	861	*	*

Dominio 4	5	10	15	20
err assoluto 1	$3.4568 \cdot 10^{-12}$	$4.6345 \cdot 10^{-12}$	$5.2660 \cdot 10^{-12}$	$4.6185 \cdot 10^{-12}$
err relativo 1	$1.5472 \cdot 10^{-12}$	$1.5851 \cdot 10^{-12}$	$1.6456 \cdot 10^{-12}$	$1.5796 \cdot 10^{-12}$
err ass comp 1	$3.4555 \cdot 10^{-12}$	$4.6354 \cdot 10^{-12}$	$5.2665 \cdot 10^{-12}$	$4.6181 \cdot 10^{-12}$
err rel comp 1	$1.5466 \cdot 10^{-12}$	$1.5854 \cdot 10^{-12}$	$1.6457 \cdot 10^{-12}$	$1.5795 \cdot 10^{-12}$
err assoluto 2	$1.9984 \cdot 10^{-15}$	$1.4211 \cdot 10^{-14}$	$4.6185 \cdot 10^{-14}$	$4.9738 \cdot 10^{-14}$
err relativo 2	$1.0094 \cdot 10^{-15}$	$7.6628 \cdot 10^{-16}$	$1.8987 \cdot 10^{-15}$	$2.6232 \cdot 10^{-15}$
err ass comp 2	$5.3291 \cdot 10^{-16}$	$5.6843 \cdot 10^{-14}$	$1.3145 \cdot 10^{-13}$	$8.8107 \cdot 10^{-13}$
err rel comp 2	$8.4359 \cdot 10^{-15}$	$1.7711 \cdot 10^{-15}$	$7.2039 \cdot 10^{-15}$	$1.1588 \cdot 10^{-14}$
card 1	2376	61956	130491	208241
card 2	124	324	684	1089
card	240	750	1520	2585
card comp	21	66	136	231
Dominio 4	30	40	50	100
err assoluto 1	$4.6234 \cdot 10^{-12}$	$4.6074 \cdot 10^{-12}$	$4.6416 \cdot 10^{-12}$	*
err relativo 1	$1.5813 \cdot 10^{-12}$	$1.5758 \cdot 10^{-12}$	$1.5875 \cdot 10^{-12}$	*
err ass comp 1	$4.6301 \cdot 10^{-12}$	$4.6079 \cdot 10^{-12}$	*	*
err rel comp 1	$1.5836 \cdot 10^{-12}$	$1.5760 \cdot 10^{-12}$	*	*
err assoluto 2	$7.2760 \cdot 10^{-12}$	$5.0932 \cdot 10^{-11}$	$1.6298 \cdot 10^{-8}$	$2.9297 \cdot 10^{-3}$
err relativo 2	$2.3842 \cdot 10^{-15}$	$2.9590 \cdot 10^{-15}$	$7.4965 \cdot 10^{-15}$	$8.5095 \cdot 10^{-15}$
err ass comp 2	$1.4893 \cdot 10^{-10}$	$3.8250 \cdot 10^{-8}$	*	*
err rel comp 2	$8.3031 \cdot 10^{-14}$	$8.8598 \cdot 10^{-13}$	*	*
card 1	440576	758961	1163396	*
card 2	2304	3969	6084	56865
card	5520	9555	14690	23409
card comp	496	861	*	*

Dominio 5	5	10	20	
err assoluto 1	$3.0573 \cdot 10^{-14}$	$3.2335 \cdot 10^{-14}$	$3.0101 \cdot 10^{-14}$	$3.2446 \cdot 10^{-14}$
err relativo 1	$3.0615 \cdot 10^{-13}$	$3.2380 \cdot 10^{-13}$	$3.0143 \cdot 10^{-13}$	$3.2492 \cdot 10^{-13}$
err ass comp 2	$3.3945 \cdot 10^{-14}$	$2.9879 \cdot 10^{-14}$	$2.5813 \cdot 10^{-14}$	$3.4084 \cdot 10^{-14}$
err rel comp 2	$3.3992 \cdot 10^{-13}$	$2.9921 \cdot 10^{-13}$	$2.5849 \cdot 10^{-13}$	$3.4131 \cdot 10^{-13}$
err assoluto 2	$1.1935 \cdot 10^{-15}$	$1.1935 \cdot 10^{-15}$	$5.4401 \cdot 10^{-15}$	$2.0373 \cdot 10^{-14}$
err relativo 2	$6.2654 \cdot 10^{-15}$	$6.2654 \cdot 10^{-15}$	$2.0359 \cdot 10^{-14}$	$7.2379 \cdot 10^{-14}$
err ass comp 2	$2.7478 \cdot 10^{-15}$	$1.5277 \cdot 10^{-13}$	$8.8263 \cdot 10^{-15}$	$3.3529 \cdot 10^{-14}$
err rel comp 2	$2.7516 \cdot 10^{-14}$	$3.2623 \cdot 10^{-14}$	$4.6335 \cdot 10^{-14}$	$1.1912 \cdot 10^{-13}$
card 1	1416	3888	8046	13068
card 2	208	540	1143	1815
card	438	1362	2768	4697
card comp	21	66	136	231
Dominio 5	30	40	50	100
err assoluto 1	$3.8813 \cdot 10^{-13}$	$3.2099 \cdot 10^{-14}$	$9.1926 \cdot 10^{-13}$	$1.9162 \cdot 10^{-13}$
err relativo 1	$9.0550 \cdot 10^{-13}$	$3.2144 \cdot 10^{-13}$	$3.5328 \cdot 10^{-13}$	$4.4705 \cdot 10^{-13}$
err ass comp 2	$5.1426 \cdot 10^{-13}$	*	*	*
err rel comp 2	$1.1997 \cdot 10^{-12}$	*	*	*
err assoluto 2	$1.3600 \cdot 10^{-14}$	$5.8575 \cdot 10^{-13}$	$1.5743 \cdot 10^{-13}$	$3.1814 \cdot 10^{-6}$
err relativo 2	$4.8318 \cdot 10^{-14}$	$2.2511 \cdot 10^{-13}$	$3.6728 \cdot 10^{-13}$	$3.4154 \cdot 10^{-13}$
err ass comp 2	$1.3856 \cdot 10^{-13}$	*	*	*
err rel comp 2	$3.2325 \cdot 10^{-13}$	*	*	*
card 1	27648	47628	73008	280908
card 2	3840	6615	10140	39015
card	10032	17376	26702	103377
card comp	496	*	*	*



Dominio 6	5	10	15	20
err assoluto 1	$3.2830 \cdot 10^{-12}$	$5.4323 \cdot 10^{-12}$	$5.4234 \cdot 10^{-12}$	$9.2932 \cdot 10^{-12}$
err relativo 1	$6.4283 \cdot 10^{-12}$	$7.1040 \cdot 10^{-12}$	$7.0924 \cdot 10^{-12}$	$7.1026 \cdot 10^{-12}$
err ass comp 1	$3.2829 \cdot 10^{-12}$	$5.4330 \cdot 10^{-12}$	$5.4308 \cdot 10^{-12}$	$9.3059 \cdot 10^{-12}$
err rel comp 1	$6.4281 \cdot 10^{-12}$	$7.1049 \cdot 10^{-12}$	$7.1020 \cdot 10^{-12}$	$7.1123 \cdot 10^{-12}$
err assoluto 2	$8.8818 \cdot 10^{-16}$	$2.4869 \cdot 10^{-14}$	$1.3323 \cdot 10^{-15}$	$5.9686 \cdot 10^{-13}$
err relativo 2	$1.7391 \cdot 10^{-15}$	$1.9705 \cdot 10^{-15}$	$2.6086 \cdot 10^{-15}$	$5.2179 \cdot 10^{-15}$
err ass comp 2	$6.6613 \cdot 10^{-16}$	$3.3307 \cdot 10^{-15}$	$7.0166 \cdot 10^{-14}$	$3.0411 \cdot 10^{-12}$
err rel comp 2	$1.5512 \cdot 10^{-15}$	$2.7646 \cdot 10^{-15}$	$1.4367 \cdot 10^{-14}$	$2.6586 \cdot 10^{-14}$
card 1	124736	321264	682236	1079804
card 2	264	684	1449	2299
card	426	1374	2736	4719
card comp	21	66	136	231
Dominio 6	30	40	50	100
err assoluto 1	$5.5476 \cdot 10^{-12}$	$9.2686 \cdot 10^{-12}$	*	*
err relativo 1	$7.2547 \cdot 10^{-12}$	$7.0838 \cdot 10^{-12}$	*	*
err ass comp 1	$5.5475 \cdot 10^{-12}$	*	*	*
err rel comp 1	$7.2546 \cdot 10^{-12}$	*	*	*
err assoluto 2	$9.0949 \cdot 10^{-12}$	$9.7789 \cdot 10^{-9}$	$5.2154 \cdot 10^{-7}$	$3.3651 \cdot 10^{-11}$
err relativo 2	$5.9121 \cdot 10^{-15}$	$5.8411 \cdot 10^{-15}$	$6.7851 \cdot 10^{-15}$	$1.4018 \cdot 10^{-14}$
err ass comp 2	$2.3434 \cdot 10^{-11}$	*	*	*
err rel comp 2	$7.8942 \cdot 10^{-13}$	*	*	*
card 1	2284544	3935484	*	*
card 2	4864	8369	12844	49419
card	10064	17409	26754	103479
card comp	496	*	*	*

# Bibliografia

- [1] A. Sommariva e M. Vianello, *Algebraic quadrature on the intersection of planar disks*, 2015, preprint online su <http://www.math.unipd.it/~marcov/publications.html>
- [2] J.N. Lyness, Ronald Cools, *emphA Survey of Numerical Cubature over Triangles*, 1994
- [3] G. Da Fies, A. Sommariva e M. Vianello, *SUBP : Matlab package for subperiodic trigonometric quadrature and multivariate applications - version 1.1*. <http://www.math.unipd.it/~marcov/subp.html>
- [4] A. Sommariva software webpage <http://www.math.unipd.it/~alvise/software.html>