

Un nuovo  
metodo di  
cubatura su  
poligoni

Università degli Studi di Padova  
Facoltà di Scienze MM.FF.NN  
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Introduzione

Triangolazione  
di poligoni

Triangolatori  
Ear-cutting  
Introduzione  
L'algoritmo  
Esempi

Nodi e pesi di  
cubatura

WAMs  
Punti di Fekete  
Algoritmo di  
estrazione  
Nodi e pesi

Risultati  
numerici

Risultati 1: nodi  
Risultati 2:  
errori

# Un nuovo metodo di cubatura su poligoni

24 settembre 2009

Relatore:  
Dott. Alvise Sommariva

Tesi di:  
Federica Basaglia

# Introduzione

Un nuovo  
metodo di  
cubatura su  
poligoni

Introduzione

Triangolazione  
di poligoni

Triangolatori  
Ear-cutting  
Introduzione  
L'algoritmo  
Esempi

Nodi e pesi di  
cubatura

WAMs  
Punti di Fekete  
Algoritmo di  
estrazione  
Nodi e pesi

Risultati  
numerici

Risultati 1: nodi  
Risultati 2:  
errori

*Si vuole approssimare numericamente:*

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy \approx \sum_{i=1}^M \omega_i \cdot f(x_i, y_i)$$

*dove  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  è un poligono semplice e  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua.*

- Splinegauss: formula di Gauss-Legendre combinata con formula integrale di Green
  - ① Problema bidimensionale → unidimensionale
  - ② Nodi anche esterni al dominio ('base-line')
- Nuovo metodo di cubatura
  - ① Triangolazione del poligono
  - ② WAMs e punti di Fekete

# Triangolatori

Un nuovo  
metodo di  
cubatura su  
poligoni

Introduzione

Triangolazione  
di poligoni

Triangolatori  
Ear-cutting  
Introduzione  
L'algoritmo  
Esempi

Nodi e pesi di  
cubatura

WAMs  
Punti di Fekete  
Algoritmo di  
estrazione  
Nodi e pesi

Risultati  
numerici

Risultati 1: nodi  
Risultati 2:  
errori

## Proprietà richieste:

- ① Implementati in **Matlab**
- ② Funzionare correttamente sia su poligoni **convessi** che **concavi**
- ③ Numero di triangoli **minore** o al più uguale al **numero di vertici** del poligono

## Ricerca nel web:

- ① **Linear-size nonobtuse triangulation** → numero eccessivo di triangoli
- ② **Triangolazione di Delaunay** → problemi sui concavi
- ③ **Distmesh** → numero eccessivo di triangoli



**NUOVO TRIANGOLATORE**

# Introduzione all'ear cutting

Un nuovo  
metodo di  
cubatura su  
poligoni

Introduzione

Triangolazione  
di poligoni

Triangolatori

Ear-cutting

Introduzione

L'algoritmo

Esempi

Nodi e pesi di  
cubatura

WAMs

Punti di Fekete

Algoritmo di  
estrazione

Nodi e pesi

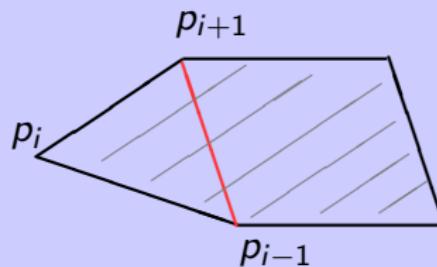
Risultati  
numerici

Risultati 1: nodi

Risultati 2:  
errori

## Orecchio

Un vertice  $p_i$  di un poligono semplice è detto **orecchio** se la diagonale condotta per  $p_{i-1}$  e  $p_{i+1}$  è interamente contenuta nel poligono e ne interseca il bordo solo nei punti  $p_{i-1}$  e  $p_{i+1}$ .



## Teorema delle due orecchie

Ogni poligono semplice, eccetto il triangolo, ha almeno due orecchie che non si sovrappongono.

Un nuovo  
metodo di  
cubatura su  
poligoni

Introduzione

Triangolazione  
di poligoni

Triangolatori  
Ear-cutting  
Introduzione  
L'algoritmo  
Esempi

Nodi e pesi di  
cubatura

WAMs  
Punti di Fekete  
Algoritmo di  
estrazione

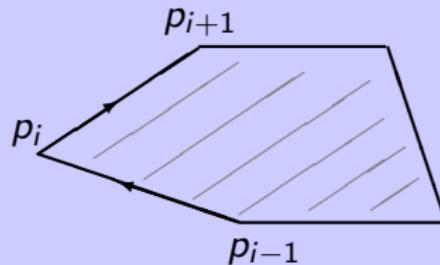
Nodi e pesi

Risultati  
numerici

Risultati 1: nodi  
Risultati 2:  
errori

## Vertice convesso

*Un vertice  $p_i$  di un poligono semplice  $P$  si definisce **convesso** se, muovendosi da  $p_{i-1}$  a  $p_{i+1}$  in senso orario lungo il bordo del poligono, viene fatta una svolta a destra in  $p_i$ .*



## Lemma

*Se un vertice convesso  $p_i$  non è un orecchio allora il triangolo di vertici  $p_{i-1}$ ,  $p_i$  e  $p_{i+1}$  contiene un vertice concavo.*

# L'algoritmo “trova orecchio”

Un nuovo  
metodo di  
cubatura su  
poligoni

Introduzione

Triangolazione  
di poligoni

Triangolatori  
Ear-cutting  
Introduzione  
L'algoritmo  
Esempi

Nodi e pesi di  
cubatura

WAMs  
Punti di Fekete  
Algoritmo di  
estrazione  
Nodi e pesi

Risultati  
numerici

Risultati 1: nodi  
Risultati 2:  
errori

```
function trova_orecchio(P)

    i=0;
    orecchio_non_trovato = true;

    if (p(i) è convesso)
        if (il triangolo di vertici p(i-1), p(i) e p(i+1)
            non contiene vertici concavi)
                orecchio_non_trovato = false;

    if (orecchio_non_trovato)
        i=i+1;

    return p(i);
end
```

# La triangolazione

Un nuovo  
metodo di  
cubatura su  
poligoni

Introduzione

Triangolazione  
di poligoni

Triangolatori  
Ear-cutting  
Introduzione

L'algoritmo  
Esempi

Nodi e pesi di  
cubatura

WAMs  
Punti di Fekete  
Algoritmo di  
estrazione  
Nodi e pesi

Risultati  
numerici

Risultati 1: nodi  
Risultati 2:  
errori

Sia  $P$  un poligono semplice:

- ① Applicando l'algoritmo “trova orecchio”  $\rightarrow$  orecchio di  $P$
- ② Rimuovendo tale orecchio da  $P \rightarrow$  poligono semplice  $P'$
- ③ Applicando l'algoritmo a  $P' \rightarrow$  orecchio di  $P' \Rightarrow$  di  $P$
- ④ Iterando l'algoritmo  $\rightarrow$  tutte le orecchie di  $P$



TRIANGOLAZIONE del POLIGONO

## Un nuovo metodo di cubatura su poligoni

Introduzione

Triangolazione  
di poligoni

Triangolatori  
Ear-cutting  
Introduzione  
L'algoritmo  
Esempi

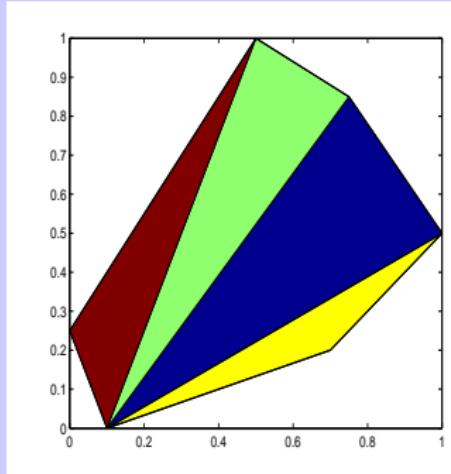
Nodi e pesi di  
cubatura

WAMs  
Punti di Fekete  
Algoritmo di  
estrazione

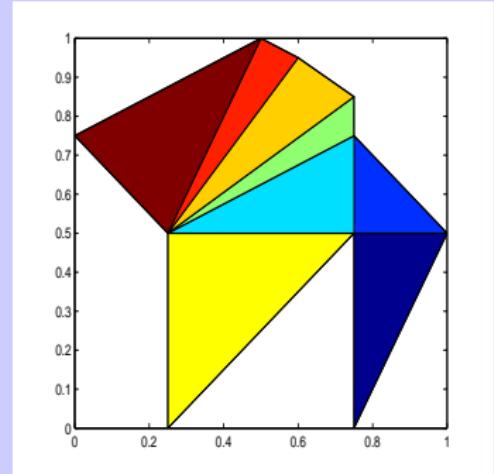
Nodi e pesi

Risultati  
numerici

Risultati 1: nodi  
Risultati 2:  
errori



(a) poligono convesso di 6 lati



(b) poligono concavo di 10 lati

# WAMs

Un nuovo  
metodo di  
cubatura su  
poligoni

Introduzione  
Triangolazione  
di poligoni  
Triangolatori  
Ear-cutting  
Introduzione  
L'algoritmo  
Esempi

Nodi e pesi di  
cubatura

WAMs  
Punti di Fekete  
Algoritmo di  
estrazione  
Nodi e pesi

Risultati  
numerici  
Risultati 1: nodi  
Risultati 2:  
errori

Si consideri un insieme compatto  $K \subset \mathbb{R}^d$ ; sia poi  $\mathbb{P}_n^d$  lo spazio dei polinomi di grado al più  $n$  in  $d$  variabili.

## WAM

*Si definisce **Mesh Debolmente Ammissibile** (*Weakly Admissible Mesh, WAM*) di  $K$ , una successione di sottoinsiemi discreti  $A_n \subset K$  t.c.:*

$$\|p\|_K \leq C(A_n) \cdot \|p\|_{A_n}, \quad \forall p \in \mathbb{P}_n^d,$$

*dove*

$$N := \dim(\mathbb{P}_n^d) = \binom{n+d}{d} \leqslant \text{card}(A_n) = O(n^\alpha), \quad \alpha > 0$$

*e*

$$C(A_n) = O(n^\beta), \quad \beta > 0.$$

Un nuovo  
metodo di  
cubatura su  
poligoni

Introduzione  
Triangolazione  
di poligoni

Triangolatori  
Ear-cutting  
Introduzione  
L'algoritmo  
Esempi

Nodi e pesi di  
cubatura

WAMs  
Punti di Fekete  
Algoritmo di  
estrazione  
Nodi e pesi

Risultati  
numerici

Risultati 1: nodi  
Risultati 2:  
errori

## Proposizione

Sia  $\{B_n\}$  una WAM di  $Q$  e  $t : Q \longrightarrow K$  una mappa suriettiva polinomiale di grado  $k$ , ovvero  $t(y) = (t_1(y), \dots, t_d(y))$ , con  $t_j \in \mathbb{P}_k^d$ . Allora  $A_n = t(S_n)$ ,  $S_n = B_{kn}$ , è una WAM di  $K$  tale che  $C(A_n) = C(B_{kn})$ .

- Nel caso del quadrato  $[-1, 1]^2$  sono note molte WAMs  
 $\Rightarrow$  **WAM su un generico triangolo.**
- L'unione finita di WAMs è una WAM per l'unione dei corrispondenti insiemi compatti;

$\Rightarrow$  **WAM sul POLIGONO**

# Punti di Fekete

Un nuovo  
metodo di  
cubatura su  
poligoni

Introduzione

Triangolazione  
di poligoni

Triangolatori  
Ear-cutting  
Introduzione  
L'algoritmo  
Esempi

Nodi e pesi di  
cubatura

WAMs  
Punti di Fekete

Algoritmo di  
estrazione

Nodi e pesi

Risultati  
numerici

Risultati 1: nodi

Risultati 2:  
errori

Sia  $K \subset \mathbb{R}^d$  un insieme compatto e  $B_n = \{p_1, \dots, p_N\}$  una base dello spazio dei polinomi  $\mathbb{P}_n^d$ ; se  $Z_n = \{x_1, \dots, x_N\}$  è un sottoinsieme discreto di  $K$  di cardinalità  $N$ , allora:

$$V = \begin{pmatrix} p_1(x_1) & \dots & p_N(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(x_N) & \dots & p_N(x_N) \end{pmatrix}$$

## punti di Fekete

Si definiscono **punti di Fekete** un sottoinsieme di punti  $F_n \subset K$  che massimizzano il determinante di Vandermonde.



ottimi punti di interpolazione/cubatura

Un nuovo  
metodo di  
cubatura su  
poligoni

Introduzione

Triangolazione  
di poligoni

Triangolatori  
Ear-cutting  
Introduzione  
L'algoritmo  
Esempi

Nodi e pesi di  
cubatura

WAMs  
Punti di Fekete  
Algoritmo di  
estrazione  
Nodi e pesi

Risultati  
numerici  
Risultati 1: nodi  
Risultati 2:  
errori

Sia  $K \subset \mathbb{R}^d$  un insieme compatto,  $B_n$  una base dello spazio dei polinomi  $\mathbb{P}_n^d$  e  $X \subset K$  un sottoinsieme discreto di cardinalità  $M$ .

Sistema dei pesi di quadratura:

$$\sum_{i=1}^M \omega_i \cdot p_j(x_i) = \int_K p_j(x) d\mu, \quad 1 \leq j \leq N$$

in forma matriciale:

$$V^t \cdot \omega = m$$

dove

$$m = \{m_j\} = \left\{ \int_K p_j(x) d\mu \right\}, \quad 1 \leq j \leq N$$

# Algoritmo di estrazione dei punti di Fekete

Un nuovo  
metodo di  
cubatura su  
poligoni

Introduzione

Triangolazione  
di poligoni

Triangolatori  
Ear-cutting  
Introduzione  
L'algoritmo  
Esempi

Nodi e pesi di  
cubatura

WAMs  
Punti di Fekete  
Algoritmo di  
estrazione  
Nodi e pesi

Risultati  
numerici

Risultati 1: nodi  
Risultati 2:  
errori

$$\omega = V^t \setminus m;$$

$$ind = find(\omega \neq 0);$$

$$X_* = X(ind); \quad \omega_* = \omega(ind); \quad V_* = V(ind);$$

- Comando ‘backslash’: fattorizzazione QR della sottomatrice di V.d.M,  $V_*^t \in \mathbb{R}^{N \times N}$ .
- Algoritmo di selezione di N colonne di norma massima da  $A \in \mathbb{R}^{N \times M}$ .
- Estrarre da  $V^t$  la sottomatrice quadrata di determinante massimo  $\Rightarrow$  punti di Fekete approssimati

Se la discretizzazione iniziale  $X$  è una WAM  $\Rightarrow$  punti di Fekete approssimati hanno stessa distribuzione asintotica di quelli veri.

## Un nuovo metodo di cubatura su poligoni

Introduzione

Triangolazione  
di poligoni

Triangolatori  
Ear-cutting  
Introduzione  
L'algoritmo  
Esempi

Nodi e pesi di  
cubatura

WAMs  
Punti di Fekete

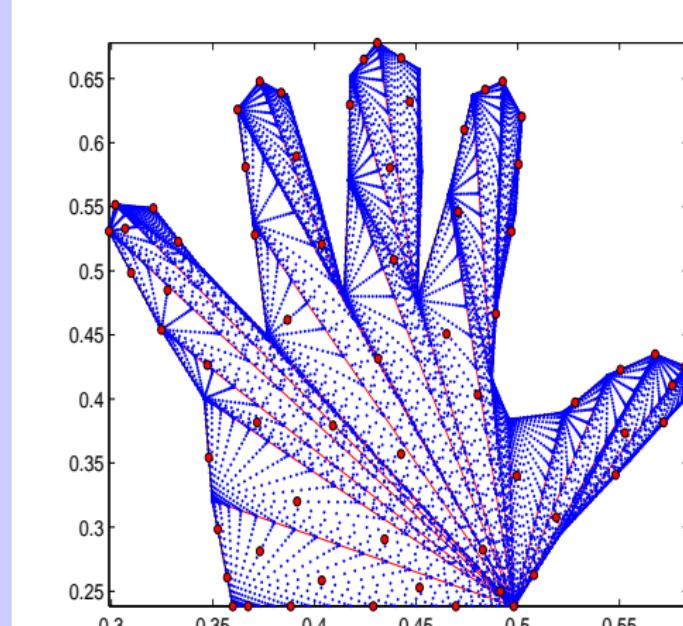
Algoritmo di  
estrazione

Nodi e pesi

Risultati  
numerici

Risultati 1: nodi

Risultati 2:  
errori



(c) WAM (15435) e punti di Fekete (66), per  $n = 10$   
nel dominio *hand-like*

# Nuovo metodo di cubatura

Un nuovo  
metodo di  
cubatura su  
poligoni

Introduzione

Triangolazione  
di poligoni

Triangolatori  
Ear-cutting  
Introduzione  
L'algoritmo  
Esempi

Nodi e pesi di  
cubatura

WAMs  
Punti di Fekete  
Algoritmo di  
estrazione

Nodi e pesi

Risultati  
numerici

Risultati 1: nodi  
Risultati 2:  
errori

## ① Triangolazione del poligono

## ② Generazione di mesh sui triangoli $\Rightarrow$ mesh sul poligono

## ③ Algoritmo di estrazione $\rightarrow$ punti di Fekete approssimati



pesi di cubatura:  $\omega_i^*$



nodi di cubatura:  $(x_i^*, y_i^*)$

$$\Rightarrow \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy \approx \sum_{i=1}^{M} \omega_i^* \cdot f(x_i^*, y_i^*)$$

# Test numerici

Un nuovo  
metodo di  
cubatura su  
poligoni

Introduzione

Triangolazione  
di poligoni

Triangolatori  
Ear-cutting  
Introduzione  
L'algoritmo  
Esempi

Nodi e pesi di  
cubatura

WAMs  
Punti di Fekete  
Algoritmo di  
estrazione

Nodi e pesi

Risultati  
numerici

Risultati 1: nodi  
Risultati 2:  
errori

## ① Poligoni:

- convesso di 6 lati ('convesso');
- concavo di 14 lati ('concavo');
- concavo di 10 lati ('horse-like');
- concavo di 37 lati ('hand-like').

## ② Mesh:

- mappa dal quadrato  $[-1, 1]^2$  al triangolo ( $\mathcal{W}$ );
- mappa dal triangolo standard al triangolo ( $\mathcal{M}$ ).

## ③ Funzioni:

- $f(x, y) = \cos(x + y);$
- $f(x, y) = \frac{1}{1 + 16(x^2 + y^2)};$
- $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}.$

# Risultati 1: nodi di cubatura

Un nuovo  
metodo di  
cubatura su  
poligoni

Introduzione

Triangolazione  
di poligoni

Triangolatori  
Ear-cutting  
Introduzione  
L'algoritmo  
Esempi

Nodi e pesi di  
cubatura

WAMs  
Punti di Fekete  
Algoritmo di  
estrazione

Nodi e pesi

Risultati  
numerici

Risultati 1: nodi  
Risultati 2:  
errori

## Locazione nodi:

- \* Nuovo metodo: nodi **tutti interni** al dominio;
- \* Splinegauss: nodi **anche esterni** (dipende da 'base-line')

## Cardinalità nodi:

- \* Nuovo metodo: molto più piccola rispetto a mesh e nodi di Splinegauss

## Cardinalità sul poligono **convesso**:

punti	$n = 5$	$n = 10$	$n = 15$	$n = 20$
$\mathcal{W}$	484	1764	3844	6724
$\mathcal{M}$	84	264	544	924
AFP	21	66	136	231
Splinegauss	90	*	480	*

## Un nuovo metodo di cubatura su poligoni

### Introduzione

#### Triangolazione di poligoni

Triangolatori  
Ear-cutting  
Introduzione  
L'algoritmo  
Esempi

#### Nodi e pesi di cubatura

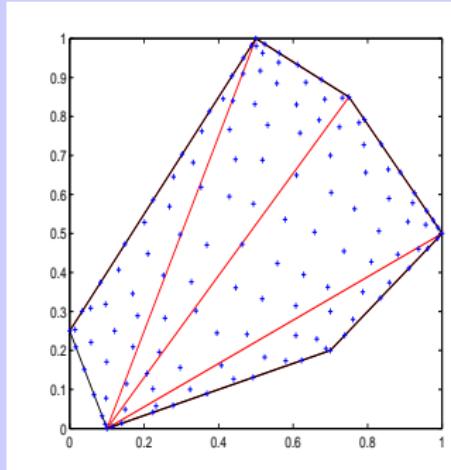
WAMs  
Punti di Fekete  
Algoritmo di  
estrazione

#### Nodi e pesi

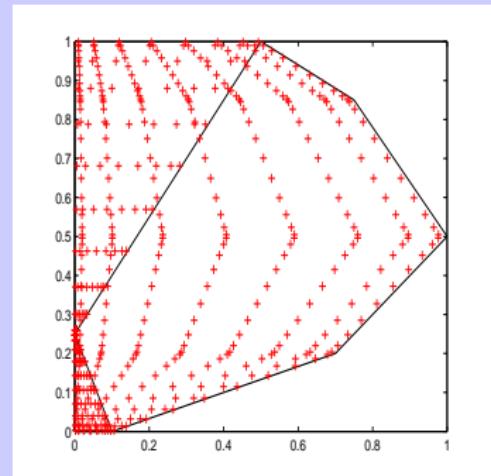
#### Risultati numerici

#### Risultati 1: nodi

#### Risultati 2: errori



(d) Punti di Fekete da  $\mathcal{W}$ , per  
 $n = 15$  nel poligono convesso



(e) nodi di Splinegauss con  
base-line=asse y

## Un nuovo metodo di cubatura su poligoni

### Introduzione

#### Triangolazione di poligoni

Triangolatori  
Ear-cutting  
Introduzione  
L'algoritmo  
Esempi

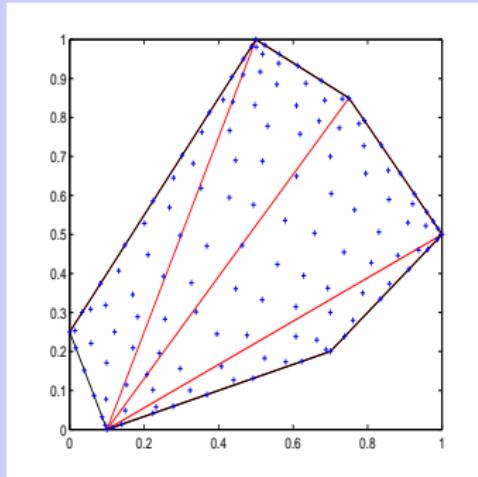
#### Nodi e pesi di cubatura

WAMs  
Punti di Fekete  
Algoritmo di  
estrazione

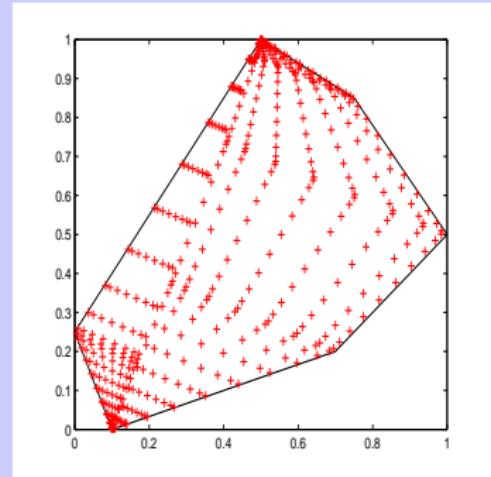
#### Nodi e pesi

#### Risultati numerici

Risultati 1: nodi  
Risultati 2:  
errori



(f) Punti di Fekete da  $\mathcal{W}$ , per  
 $n = 15$  nel poligono convesso



(g) nodi di Splinegauss con  
base-line=diagonale massima

# Risultati 2: errori di cubatura

Un nuovo metodo di cubatura su poligoni

Introduzione

Triangolazione di poligoni

Triangolatori  
Ear-cutting  
Introduzione  
L'algoritmo  
Esempi

Nodi e pesi di cubatura

WAMs  
Punti di Fekete  
Algoritmo di estrazione

Nodi e pesi

Risultati numerici

Risultati 1: nodi  
Risultati 2: errori

Nuovo metodo:

- \* **funzione 1:** errori simili con entrambe le mesh;
- funzioni 2,3:** errori minori con mesh  $\mathcal{W}$ ;
- \* Errori più piccoli sul dominio *hand-like* ( fino a  $10^{-15}$  e  $10^{-16}$  per  $n = 20$ );
- \* **Risultati confrontabili con Splinegauss:**

Errori per funzione ' $\cos(x + y)$ ' sul dominio *convesso*:

		$n = 5$	$n = 10$	$n = 15$	$n = 20$
metodo	$\mathcal{W}$	3.3E-7	8.0E-14	4.3E-15	4.1E-15
proposto	$\mathcal{M}$	7.5E-8	7.3E-14	4.1E-15	1.1E-14
Spline-gauss	asse $y$	7.6E-8	*	3.8E-15	*
	diagonale	6.2E-11	*	4.2E-15	*