

Un nuovo
metodo di
cubatura su
poligoni

Università degli Studi di Padova
Facoltà di Scienze MM.FF.NN
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Un nuovo metodo di cubatura su poligoni

24 settembre 2009

Relatore:
Dott. Alvisè Sommariva

Tesi di:
Federica Basaglia

Introduzione

Triangolazione
di poligoni

Triangolatori
Ear-cutting
Introduzione
L'algoritmo
Esempi

Nodi e pesi di
cubatura

WAMs
Punti di Fekete
Algoritmo di
estrazione
Nodi e pesi

Risultati
numerici

Risultati 1: nodi
Risultati 2:
errori

Introduzione

Un nuovo
metodo di
cubatura su
poligoni

Introduzione

Triangolazione
di poligoni

Triangolatori
Ear-cutting

Introduzione

L'algoritmo

Esempi

Nodi e pesi di
cubatura

WAMs

Punti di Fekete

Algoritmo di
estrazione

Nodi e pesi

Risultati
numerici

Risultati 1: nodi

Risultati 2:
errori

Si vuole approssimare numericamente:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy \approx \sum_{i=1}^M \omega_i \cdot f(x_i, y_i)$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è un poligono semplice e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua.

- **Splinegauss**: formula di **Gauss-Legendre** combinata con formula integrale di **Green**
 - 1 Problema bidimensionale \rightarrow unidimensionale
 - 2 Nodi anche esterni al dominio ('base-line')
- **Nuovo metodo di cubatura**
 - 1 Triangolazione del poligono
 - 2 WAMs e punti di Fekete

Triangolatori

Proprietà richieste:

- 1 Implementati in **Matlab**
- 2 Funzionare correttamente sia su poligoni **convessi** che **concavi**
- 3 Numero di triangoli **minore** o al più uguale al **numero di vertici** del poligono

Ricerca nel web:

- 1 **Linear-size nonobtuse triangulation** → numero eccessivo di triangoli
- 2 **Triangolazione di Delaunay** → problemi sui concavi
- 3 **Distmesh** → numero eccessivo di triangoli



NUOVO TRIANGOLATORE

Un nuovo
metodo di
cubatura su
poligoni

Introduzione

Triangolazione
di poligoni

Triangolatori

Ear-cutting

Introduzione

L'algoritmo

Esempi

Nodi e pesi di
cubatura

WAMs

Punti di Fekete

Algoritmo di
estrazione

Nodi e pesi

Risultati
numerici

Risultati 1: nodi

Risultati 2:
errori

Introduzione all'ear cutting

Un nuovo
metodo di
cubatura su
poligoni

Introduzione

Triangolazione
di poligoni

Triangolatori
Ear-cutting

Introduzione

L'algoritmo
Esempi

Nodi e pesi di
cubatura

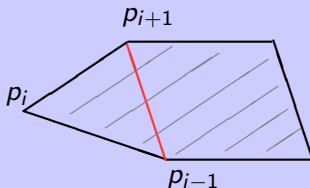
WAMs
Punti di Fekete
Algoritmo di
estrazione
Nodi e pesi

Risultati
numerici

Risultati 1: nodi
Risultati 2:
errori

Orecchio

*Un vertice p_i di un poligono semplice è detto **orecchio** se la diagonale condotta per p_{i-1} e p_{i+1} è interamente contenuta nel poligono e ne interseca il bordo solo nei punti p_{i-1} e p_{i+1} .*

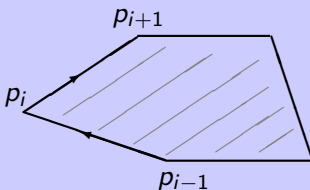


Teorema delle due orecchie

Ogni poligono semplice, eccetto il triangolo, ha almeno due orecchie che non si sovrappongono.

Vertice convesso

*Un vertice p_i di un poligono semplice P si definisce **convesso** se, muovendosi da p_{i-1} a p_{i+1} in senso orario lungo il bordo del poligono, viene fatta una svolta a destra in p_i .*



Lemma

Se un vertice convesso p_i non è un orecchio allora il triangolo di vertici p_{i-1} , p_i e p_{i+1} contiene un vertice concavo.

L'algoritmo "trova orecchio"

Un nuovo
metodo di
cubatura su
poligoni

Introduzione

Triangolazione
di poligoni

Triangolatori
Ear-cutting

Introduzione
L'algoritmo
Esempi

Nodi e pesi di
cubatura

WAMs
Punti di Fekete

Algoritmo di
estrazione
Nodi e pesi

Risultati
numerici

Risultati 1: nodi
Risultati 2:
errori

```
function trova_orecchio(P)
```

```
i=0;
```

```
orecchio_non_trovato = true;
```

```
if (p(i) è convesso)
```

```
    if (il triangolo di vertici p(i-1), p(i) e p(i+1)  
        non contiene vertici concavi)
```

```
        orecchio_non_trovato = false;
```

```
if (orecchio_non_trovato)
```

```
    i=i+1;
```

```
return p(i);
```

```
end
```

La triangolazione

Un nuovo
metodo di
cubatura su
poligoni

Introduzione

Triangolazione
di poligoni

Triangolatori
Ear-cutting

Introduzione

L'algoritmo
Esempi

Nodi e pesi di
cubatura

WAMs
Punti di Fekete
Algoritmo di
estrazione
Nodi e pesi

Risultati
numerici

Risultati 1: nodi
Risultati 2:
errori

Sia P un poligono semplice:

- ➊ Applicando l'algoritmo "trova orecchio" \rightarrow orecchio di P
- ➋ Rimuovendo tale orecchio da $P \rightarrow$ poligono semplice P'
- ➌ Applicando l'algoritmo a $P' \rightarrow$ orecchio di $P' \Rightarrow$ di P
- ➍ Iterando l'algoritmo \rightarrow tutte le orecchie di P



TRIANGOLAZIONE del POLIGONO

Un nuovo metodo di cubatura su poligoni

Introduzione

Triangolazione di poligoni

Triangolatori
Ear-cutting
Introduzione
L'algoritmo

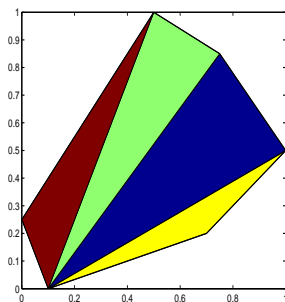
Esempi

Nodi e pesi di cubatura

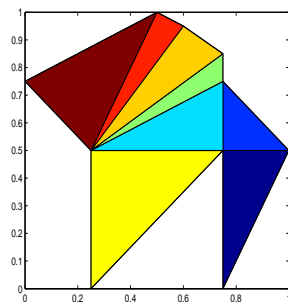
WAMs
Punti di Fekete
Algoritmo di estrazione
Nodi e pesi

Risultati numerici

Risultati 1: nodi
Risultati 2: errori



(a) poligono convesso di 6 lati



(b) poligono concavo di 10 lati

WAMs

Un nuovo
metodo di
cubatura su
poligoni

Si consideri un insieme compatto $K \subset \mathbb{R}^d$; sia poi \mathbb{P}_n^d lo spazio dei polinomi di grado al più n in d variabili.

WAM

*Si definisce **Mesh Debolmente Ammissibile** (Weakly Admissible Mesh, WAM) di K , una successione di sottoinsiemi discreti $A_n \subset K$ t.c.:*

$$\|p\|_K \leq C(A_n) \cdot \|p\|_{A_n}, \quad \forall p \in \mathbb{P}_n^d,$$

dove

$$N := \dim(\mathbb{P}_n^d) = \binom{n+d}{d} \leq \text{card}(A_n) = O(n^\alpha), \quad \alpha > 0$$

e

$$C(A_n) = O(n^\beta), \quad \beta > 0.$$

Introduzione

Triangolazione
di poligoni

Triangolatori
Ear-cutting

Introduzione

L'algoritmo
Esempi

Nodi e pesi di
cubatura

WAMs

Punti di Fekete

Algoritmo di
estrazione

Nodi e pesi

Risultati
numerici

Risultati 1: nodi

Risultati 2:
errori

Proposizione

Sia $\{B_n\}$ una WAM di Q e $t : Q \rightarrow K$ una mappa suriettiva polinomiale di grado k , ovvero $t(y) = (t_1(y), \dots, t_d(y))$, con $t_j \in \mathbb{P}_k^d$. Allora $A_n = t(S_n)$, $S_n = B_{kn}$, è una WAM di K tale che $C(A_n) = C(B_{kn})$.

- Nel caso del quadrato $[-1, 1]^2$ sono note molte WAMs
 \Rightarrow WAM su un generico triangolo.

- L'unione finita di WAMs è una WAM per l'unione dei corrispondenti insiemi compatti;

\Rightarrow WAM sul POLIGONO

Punti di Fekete

Un nuovo
metodo di
cubatura su
poligoni

Introduzione

Triangolazione
di poligoni

Triangolatori
Ear-cutting
Introduzione
L'algoritmo
Esempi

Nodi e pesi di
cubatura

WAMs
Punti di Fekete
Algoritmo di
estrazione
Nodi e pesi

Risultati
numerici

Risultati 1: nodi
Risultati 2:
errori

Sia $K \subset \mathbb{R}^d$ un insieme compatto e $B_n = \{p_1, \dots, p_N\}$ una base dello spazio dei polinomi \mathbb{P}_n^d ; se $Z_n = \{x_1, \dots, x_N\}$ è un sottoinsieme discreto di K di cardinalità N , allora:

$$V = \begin{pmatrix} p_1(x_1) & \dots & p_N(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(x_N) & \dots & p_N(x_N) \end{pmatrix}$$

punti di Fekete

*Si definiscono **punti di Fekete** un sottoinsieme di punti $F_n \subset K$ che massimizzano il determinante di Vandermonde.*



ottimi punti di interpolazione/cubatura

Sia $K \subset \mathbb{R}^d$ un insieme compatto, B_n una base dello spazio dei polinomi \mathbb{P}_n^d e $X \subset K$ un sottoinsieme discreto di cardinalità M .

Sistema dei pesi di quadratura:

$$\sum_{i=1}^M \omega_i \cdot p_j(x_i) = \int_K p_j(x) d\mu, \quad 1 \leq j \leq N$$

in forma matriciale:

$$V^t \cdot \omega = m$$

dove

$$m = \{m_j\} = \left\{ \int_K p_j(x) d\mu \right\}, \quad 1 \leq j \leq N$$

Algoritmo di estrazione dei punti di Fekete

Un nuovo
metodo di
cubatura su
poligoni

Introduzione

Triangolazione
di poligoni

Triangolatori
Ear-cutting
Introduzione
L'algoritmo
Esempi

Nodi e pesi di
cubatura

WAMs
Punti di Fekete
Algoritmo di
estrazione
Nodi e pesi

Risultati
numerici

Risultati 1: nodi
Risultati 2:
errori

$$\omega = V^t \setminus m;$$

$$ind=find(\omega \neq 0);$$

$$X_* = X(ind); \quad \omega_* = \omega(ind); \quad V_* = V(ind);$$

- Comando 'backslash': fattorizzazione QR della sottomatrice di V.d.M, $V_*^t \in \mathbb{R}^{N \times N}$.
- Algoritmo di selezione di N colonne di norma massima da $A \in \mathbb{R}^{N \times M}$.
- Estrarre da V^t la sottomatrice quadrata di determinante massimo \Rightarrow **punti di Fekete approssimati**

Se la discretizzazione iniziale X è una WAM \Rightarrow punti di Fekete approssimati hanno stessa distribuzione asintotica di quelli veri.

Un nuovo
metodo di
cubatura su
poligoni

Introduzione

Triangolazione
di poligoni

Triangolatori

Ear-cutting

Introduzione

L'algoritmo

Esempi

Nodi e pesi di
cubatura

WAMs

Punti di Fekete

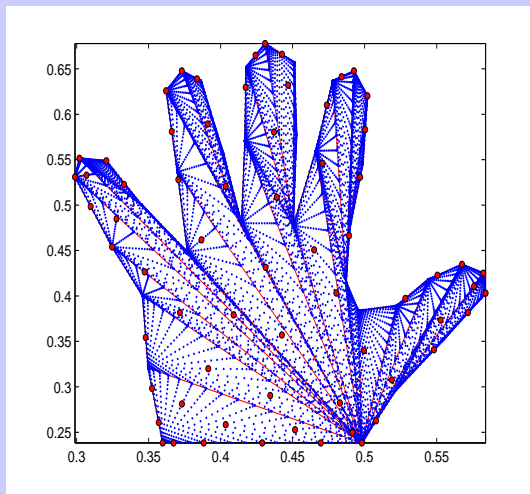
Algoritmo di
estrazione

Nodi e pesi

Risultati
numerici

Risultati 1: nodi

Risultati 2:
errori



(c) WAM (15435) e punti di Fekete (66), per $n = 10$
nel dominio *hand-like*

Nuovo metodo di cubatura

Un nuovo
metodo di
cubatura su
poligoni

Introduzione

Triangolazione
di poligoni

Triangolatori
Ear-cutting
Introduzione
L'algoritmo
Esempi

Nodi e pesi di
cubatura

WAMs
Punti di Fekete
Algoritmo di
estrazione
Nodi e pesi

Risultati
numerici

Risultati 1: nodi
Risultati 2:
errori

- 1 Triangolazione del poligono
- 2 Generazione di **mesh** sui triangoli \Rightarrow mesh sul poligono
- 3 Algoritmo di estrazione \rightarrow punti di **Fekete approssimati**

\downarrow
pesi di cubatura: ω_i^*

\Updownarrow
nodi di cubatura: (x_i^*, y_i^*)

$$\Rightarrow \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy \approx \sum_{i=1}^M \omega_i^* \cdot f(x_i^*, y_i^*)$$

Test numerici

Un nuovo
metodo di
cubatura su
poligoni

Introduzione

Triangolazione
di poligoni

Triangolatori
Ear-cutting
Introduzione
L'algoritmo
Esempi

Nodi e pesi di
cubatura

WAMs
Punti di Fekete
Algoritmo di
estrazione
Nodi e pesi

Risultati
numerici

Risultati 1: nodi
Risultati 2:
errori

① Poligoni:

- convesso di 6 lati ('*convesso*');
- concavo di 14 lati ('*concavo*');
- concavo di 10 lati ('*horse-like*');
- concavo di 37 lati ('*hand-like*').

② Mesh:

- mappa dal quadrato $[-1, 1]^2$ al triangolo (\mathcal{W});
- mappa dal triangolo standard al triangolo (\mathcal{M}).

③ Funzioni:

- $f(x, y) = \cos(x + y)$;
- $f(x, y) = \frac{1}{1 + 16(x^2 + y^2)}$;
- $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$.

Risultati 1: nodi di cubatura

Un nuovo
metodo di
cubatura su
poligoni

Introduzione

Triangolazione
di poligoni

Triangolatori
Ear-cutting
Introduzione
L'algoritmo
Esempi

Nodi e pesi di
cubatura

WAMs
Punti di Fekete
Algoritmo di
estrazione
Nodi e pesi

Risultati
numerici

Risultati 1: nodi
Risultati 2:
errori

Locazione nodi:

- * Nuovo metodo: nodi **tutti interni** al dominio;
- * Splinegauss: nodi **anche esterni** (dipende da 'base-line')

Cardinalità nodi:

- * Nuovo metodo: molto più piccola rispetto a mesh e nodi di Splinegauss

Cardinalità sul poligono *convesso*:

punti	$n = 5$	$n = 10$	$n = 15$	$n = 20$
\mathcal{W}	484	1764	3844	6724
\mathcal{M}	84	264	544	924
AFP	21	66	136	231
Splinegauss	90	*	480	*

Un nuovo metodo di cubatura su poligoni

Introduzione

Triangolazione di poligoni

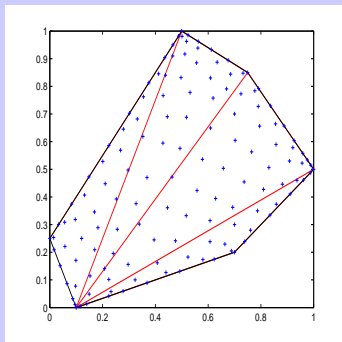
Triangolatori
Ear-cutting
Introduzione
L'algoritmo
Esempi

Nodi e pesi di cubatura

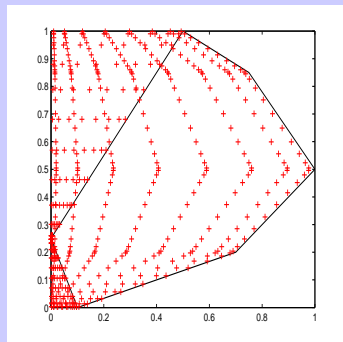
WAMs
Punti di Fekete
Algoritmo di estrazione
Nodi e pesi

Risultati numerici

Risultati 1: nodi
Risultati 2: errori



(d) Punti di Fekete da \mathcal{W} , per $n = 15$ nel poligono *convesso*



(e) nodi di Splinegauss con base-line=asse y

Un nuovo metodo di cubatura su poligoni

Introduzione

Triangolazione di poligoni

Triangolatori

Ear-cutting

Introduzione

L'algoritmo

Esempi

Nodi e pesi di cubatura

WAMs

Punti di Fekete

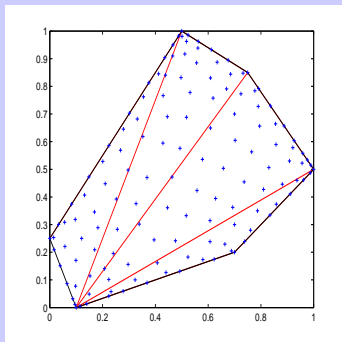
Algoritmo di estrazione

Nodi e pesi

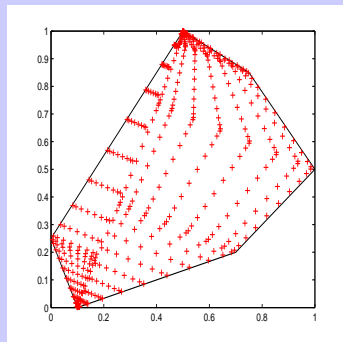
Risultati numerici

Risultati 1: nodi

Risultati 2: errori



(f) Punti di Fekete da \mathcal{W} , per $n = 15$ nel poligono *convesso*



(g) nodi di Splinegauss con base-line=diagonale massima

Risultati 2: errori di cubatura

Un nuovo
metodo di
cubatura su
poligoni

Introduzione

Triangolazione
di poligoni

Triangolatori
Ear-cutting
Introduzione
L'algoritmo
Esempi

Nodi e pesi di
cubatura

WAMs
Punti di Fekete
Algoritmo di
estrazione
Nodi e pesi

Risultati
numerici

Risultati 1: nodi
Risultati 2:
errori

Nuovo metodo:

- * **funzione 1**: errori simili con entrambe le mesh;
funzioni 2,3: errori minori con mesh \mathcal{W} ;
- * Errori più piccoli sul dominio *hand-like* (fino a 10^{-15} e 10^{-16} per $n = 20$);
- * Risultati confrontabili con Splinegauss:

Errori per funzione ' $\cos(x + y)$ ' sul dominio *convesso*:

		$n = 5$	$n = 10$	$n = 15$	$n = 20$
metodo	\mathcal{W}	3.3E-7	8.0E-14	4.3E-15	4.1E-15
proposto	\mathcal{M}	7.5E-8	7.3E-14	4.1E-15	1.1E-14
Spline-	asse y	7.6E-8	*	3.8E-15	*
gauss	diagonale	6.2E-11	*	4.2E-15	*