

Indice

Introduzione	iii
1 Richiami teorici preliminari	1
1.1 Criteri di classificazione per le formule di cubatura	1
1.2 Cubatura numerica in dimensione generica	2
1.3 Formule di cubatura simmetriche	4
1.4 Le formule minimali	5
2 Il disco	9
2.1 Simmetrie	9
2.1.1 Algoritmo per il calcolo dei valori $(t_1, t_2 + t_3, t_4)$	12
2.1.2 (t_1, t_2, t_3, t_4) ottimali	13
2.1.3 Risultati numerici	16
2.2 Formule note in letteratura	18
3 Verifiche sperimentali	19
3.1 Note teoriche	20
3.1.1 Polinomi di Koornwinder	20
3.1.2 Polinomi di Zernike	21
3.1.3 Polinomi di Logan-Shepp	21
3.1.4 Brevi note sul calcolo tensoriale	22
3.2 Risultati	22

Introduzione

Date una funzione continua $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, dove Ω è un dominio compatto, e una funzione peso $w : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, definiamo

$$I_w(f) = \int_{\Omega} f(\underline{x})w(\underline{x})d\underline{x}. \quad (1)$$

Il problema della cubatura numerica consiste nell'approssimare la formula (1) mediante una funzione lineare.

Una formula di cubatura di grado N rispetto alla funzione peso w è infatti una funzione lineare del tipo

$$Q_n(f) := \sum_{j=1}^n w_j f(\underline{x}_j), \quad w_j \in \mathbb{R}, \quad \underline{x}_j \in \mathbb{R}^d \quad (2)$$

tale che valga la relazione $I_w(f) = Q_n(f)$ per ogni polinomio f di grado al più N e che esista un polinomio f_k di grado $N+1$ per cui $I_w(f_k) \neq Q_n(f_k)$.

I termini w_i e \underline{x}_i sono detti rispettivamente pesi e nodi. Generalmente i nodi appartengono ad \mathbb{R}^d ma poiché la funzione f è definita in Ω spesso si richiede che $\underline{x}_i \in \Omega$. Inoltre se tutti i pesi di cubatura w_i sono positivi diremo che $Q_n(f)$ è una formula di cubatura positiva, mentre per Rabinowitz e Richter [1] se tutti i nodi sono interni alla regione Ω e tutti i pesi sono positivi diremo che la formula di cubatura è buona.

Uno dei modi più comuni per definire i nodi ed i pesi di una formula di quadratura consiste nel fissare una famiglia discreta di funzioni continue e linearmente indipendenti $(\phi_k)_{k=1,\dots,m}$, con $\phi_k : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ come la funzione f , e calcolare dei nodi $(\underline{x}_i)_{i=1,\dots,n}$ e dei pesi $(w_i)_{i=1,\dots,n}$ tali che

$$I(\phi_k) = Q_n(\phi_k), \quad \text{per } k = 1, \dots, m. \quad (3)$$

Le formule Q_n che soddisfano quest'ultima relazione usando il minor numero di nodi possibile sono dette formule minimali per lo spazio $(\phi_k)_{k=1,\dots,m}$.

Inoltre denotato con P_N lo spazio dei polinomi di grado inferiore od uguale ad N e con $(\phi_k)_{k=1,\dots,m}$ una base per tale spazio, diciamo che una formula $I(\phi_k) = Q_n(\phi_k)$ ha grado algebrico di esattezza uguale ad N . Ovvero una formula $I(\phi_k) = Q_n(\phi_k)$ ha grado di precisione almeno N se e solo se è esatta per tutti i polinomi di grado inferiore od uguale ad N .

L'estensione delle formule di quadratura ($d=1$) alle formule di cubatura ($d > 1$) non è semplice in quanto il problema di interpolazione in due o più dimensioni è molto più delicato poiché i nodi non sono noti a priori.

Nel caso particolare in cui Ω sia un intervallo e w una funzione peso definita su tale insieme si può dimostrare che esistono $\lceil \frac{N+1}{2} \rceil$ nodi e pesi per cui la formula associata Q_n ha grado di precisione esattamente N . Tali formule sono dette **gaussiane** e sono formule **minimali**. I corrispettivi nodi e pesi sono calcolabili per le più classiche funzioni peso grazie ad un algoritmo dovuto a **Wiff e Gelub**, perfezionato da Gautschi e Laurie [2].

Nel caso in cui $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, con $d > 1$, come anticipato, l'analisi è in generale più complessa. Questo problema negli ultimi anni ha portato ad un rallentamento della ricerca, come menzionato da R.Cools [4]. Quello che ci si propone di fare in questa tesi è analizzare il caso in cui Ω sia un cerchio e si cercherà di determinare formule aventi grado di esattezza N con un numero **minimo** di nodi e pesi.

Nel primo capitolo, in particolare, ci occuperemo della catalogazione e descrizione generale di una formula di cubatura, nel secondo invece verrà presentato il caso particolare del disco unitario e verranno presentate le formule note in letteratura e nel terzo cercheremo **di migliorare** quanto trovato fino a questo momento e di ottenere nuovi e migliori nodi mediante l'implementazione di un algoritmo.

Capitolo 1

Richiami teorici preliminari

1.1 Criteri di classificazione per le formule di cubatura

Definizione 1. Una formula di cubatura è una regola numerica per cui il valore di un integrale definito viene approssimato mediante informazioni riguardo l'integrandi in un insieme discreto di punti.

Secondo Rabinowitz e Richter si parla di una buona formula di cubatura se essa ha tutti i nodi \underline{x}_i interni alla regione Ω e tutti i pesi w_i positivi. Questo perché può diventare **difficoltoso** applicare una formula di cubatura quando i punti sono esterni alla regione Ω .

Sono stati sviluppati vari criteri per classificare le formule di cubatura, basati sul loro comportamento relativamente a specifiche classi di funzioni.

I più utilizzati sono quattro:

il primo è più antico basato sul grado algebrico della formula (dovuto a James Clerk Maxwell nel 1877); **il secondo** basato sul grado trigonometrico della formula, dovuto a Frolov; **il terzo** noto come **metodo di Monte Carlo** (dovuto a Ulam, Metropolis e Neumann nel 1945), che consiste nel valutare la funzione integranda in un certo numero di punti scelti in modo random e fa uso del valore medio della funzione e infine **il quarto**, conosciuto come **metodo quasi-Monte Carlo** (dovuto a R. D. Richtmyer nel 1952), in cui viene usata come nel metodo precedente una formula di cubatura a pesi costanti ma in questo caso i punti vengono scelti con maggiore attenzione. Ci occuperemo in seguito dei primi due metodi, affrontando però in primis due questioni.

Perché il grado algebrico di una formula di cubatura è un buon criterio per determinarne la qualità? Innanzitutto si presuppone che una funzione che ha un buon comportamento sia ben approssimata da un polinomio e di conseguenza che il rispettivo integrale venga ben approssimato da una formula di cubatura avente grado algebrico sufficientemente elevato. Analogamente il grado trigonometrico di una formula di cubatura è un buon criterio per determinarne la qualità poiché si presuppone che una funzione che ha un buon comportamento sia ben approssimata da un polinomio trigonometrico, ad esempio dalla sua serie di Fourier e quindi che l'integrale corrispondente venga ben approssimato da una formula di cubatura avente grado trigonometrico sufficientemente elevato.

Una volta scelto il criterio di qualità da utilizzare ci sono comunque molte strade che è possibile seguire per raggiungere l'obiettivo prefissato.

Si possono usare formule di quadratura diverse per ogni integrale uno-dimensionale; è possibile operare un cambio di variabili, ovvero si tenta di trasformare il problema sconosciuto in uno più familiare di cui si conosce la soluzione; può accadere che la regione di integrazione abbia una forma così inusuale che non permette l'uso di formule di cubatura, ma che possa invece essere suddivisa in sotto-regioni standard dove queste sono permesse e allora la somma delle formule ottenute su tali sotto-regioni viene detta formula composta.

Quelli elencati fino ad ora sono tutti approcci indiretti per la costruzione di formule di cubatura, noi invece vedremo come costruire in modo diretto tali regole.

1.2 Cubatura numerica in dimensione generica

Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio di integrazione precedentemente fissato, $f_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$ delle funzioni continue linearmente indipendenti, si consideri una formula di cubatura tale che:

$$\sum_{i=1}^n w_i f_j(\underline{x}_i) = \int_{\Omega} f_j(\underline{x}) w(\underline{x}) d\underline{x},$$

per ogni $j = 1, \dots, m$.

Come anticipato, un criterio importante di cui tenere conto per la qualità delle formule di cubatura è il grado polinomiale di esattezza del polinomio algebrico o trigonometrico. La costruzione di tali formule con un fissato grado esattezza richiede la soluzione di particolari equazioni denominate equazioni dei momenti: più precisamente, denotato con \mathbb{P}_n^d lo spazio vettoriale dei polinomi (algebrici e trigonometrici) in n variabili di grado al massimo d , per costruire una formula di cubatura avente grado d è necessario risolvere le seguenti equazioni, dette equazioni dei momenti:

$$Q(f_j) = I(f_j) \text{ con } j = 1, 2, \dots, \dim(\mathbb{P}_n^d) \quad (1.1)$$

dove $\{f_j\}_j$ formano una base per lo spazio \mathbb{P}_n^d e $\dim(\mathbb{P}_n^d)$ indica la dimensione di tale spazio.

Si noti che le equazioni (1.1) non sono lineari rispetto ai nodi incogniti e che il numero di equazioni dei momenti può essere molto grande: più alto è il grado di precisione desiderato maggiore diventa la dimensione del sistema (1.1). Ad esempio il numero di equazioni del momento per il grado di esattezza algebrica $d = 5$ e dimensione $n = 10$ è 3003.

L'enorme dimensione di questi sistemi di equazioni non lineari rende la loro risoluzione molto difficile se non impossibile.

Un modo per ovviare a tale problema è quello suggerito da Sobolev per la costruzione delle cosiddette formule cubatura invarianti (DCI). Tale metodo utilizza la teoria invariante [5] e rende possibile la riduzione della dimensione dei sistemi da risolvere. L'idea originale è che, poiché molte regioni di integrazione (come il cubo unitario,

la sfera, ecc) mostrano un elevato grado di simmetria, sembra ragionevole cercare formule di cubatura che rispettino tale simmetria.

Nel seguito analizzeremo il tutto facendo uso della funzione peso di Legendre $w(\underline{x}) = 1$.

Definiamo il momento j -esimo come

$$m_j = \int_{\Omega} f_j(\underline{x}) d\underline{x}$$

e la matrice di Vandermonde V componente per componente come $V_{ij} = f_i(\underline{x}_j)$. Posto $\underline{w} = (w_i)_i$ il vettore n -dimensionale dei pesi, affinché la formula di cubatura abbia le proprietà richieste, è necessario che venga soddisfatto il seguente sistema:

$$\begin{pmatrix} f_1(\underline{x}_1) & \dots & f_1(\underline{x}_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ f_m(\underline{x}_1) & \dots & f_m(\underline{x}_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ m_m \end{pmatrix}$$

o in forma più compatta:

$$V \cdot \underline{w} = \underline{m}.$$

Supponiamo ora di eliminare dalla formula il k -esimo nodo \underline{x}_k e il relativo peso w_k . La matrice di Vandermonde e il vettore pesi corrispondenti assumono la seguente forma:

$$V_{\setminus k} = \begin{pmatrix} f_1(\underline{x}_1) & \dots & f_1(\underline{x}_{k-1}) & f_1(\underline{x}_{k+1}) & \dots & f_1(\underline{x}_n) \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ f_m(\underline{x}_1) & \dots & f_m(\underline{x}_{k-1}) & f_m(\underline{x}_{k+1}) & \dots & f_m(\underline{x}_n) \end{pmatrix}, \quad \underline{w}_{\setminus k} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{k-1} \\ w_{k+1} \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

dove in generale $V_{\setminus k} \cdot \underline{w}_{\setminus k} - \underline{m} = 0$.

Il nostro obiettivo è quello di determinare $n-1$ nuovi nodi \underline{x}_i e $n-1$ nuovi pesi w_i per cui la formula di cubatura sia esatta in relazione alla famiglia di funzioni f_1, \dots, f_m . Quindi se V è la matrice di Vandermonde nei nuovi punti \underline{x}_i , sia nuovamente $V \cdot \underline{w} = \underline{m}$. Numericamente, richiederemo che per una certa tolleranza ε e una norma vettoriale $\|\cdot\|$, valga $\|V_{\setminus k} \cdot \underline{w}_{\setminus k} - \underline{m}\| < \varepsilon$.

Vediamo quindi come raggiungere tale obiettivo. Definita $V(\{x_i\}_i)$ la matrice di Vandermonde relativa ai nodi $\{\underline{x}_i\}_i$ e alle funzioni $\{f_j\}_j$, consideriamo la funzione $F: \{\underline{x}_i, w_i\} \rightarrow V(\{x_i\}_i) \cdot \underline{w} - \underline{m}$ risolvendo il problema di minimizzare $\|V_{\setminus k} \cdot \underline{w}_{\setminus k} - \underline{m}\|$. Se $\|V_{\setminus k} \cdot \underline{w}_{\setminus k} - \underline{m}\| < \varepsilon$, si procede eliminando altri nodi e pesi. Il vantaggio di questa scelta è che potendo forzare le variabili a stare all'interno di una regione prefissata durante la risoluzione del problema di minimo è possibile imporre la positività dei pesi della formula di cubatura (proprietà molto importante legata alla sua stabilità). Lo svantaggio è tuttavia quello di aumentare la complessità dell'algoritmo.

Può essere un problema capire quando è stato raggiunto un buon numero di nodi per un dato grado di precisione. Infatti, per dimensioni $d > 1$ non si **conosce** quale sia il numero minima di nodi necessari alla formula di cubatura per il grado scelto.

1.3 Formule di cubatura simmetriche

In questa sezione **analizzeremo l'utilità delle** formule di cubatura simmetriche, le quali sono di grande importanza in quanto permettono di ridurre notevolmente la complessità computazionale dell'algoritmo utilizzato. Il numero minimo di nodi, infatti, dipende molto dalla scelta della regione di integrazione Ω e della funzione peso w .

Sono stati pubblicati molti articoli riguardo le formule di integrazione di tipo simmetrico: **Lyness e Jespersen**, [6] ad esempio, hanno compiuto un elaborato studio di formule di **quadratura** simmetriche sul triangolo in coordinate polari, Laursen e Gellert [7] hanno fornito una tavola di formule di integrazione simmetrica sul triangolo.

Sia G un gruppo di trasformazioni ortogonali che hanno un punto fisso come origine e si definisca $|G|$ la cardinalità di tale insieme.

Definizione 2. Una trasformazione ortogonale è una trasformazione lineare $f : E \rightarrow E$, dove E è uno spazio euclideo, che preserva il prodotto scalare, cioè $\langle f(x_1), f(x_2) \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle$, per ogni $x_1, x_2 \in E$.

In particolare se gruppo G è l'insieme delle **riflessioni** rispetto ad un punto (x_0, y_0) viene detto di simmetria centrale e viene denotato **come**

$$G_{cs} = \{x' = -x + 2x_0, y' = -y + 2y_0\}$$

Definizione 3. Un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ si dice **invariante** rispetto al gruppo G se $g(\Omega) = \Omega$ per ogni $g \in G$.

Una funzione f si dice invariante rispetto al **gruppo** G se $f(x) = f(g(x))$ per ogni scelta di $g \in G$.

Per quanto detto sopra segue che un integrale è invariante rispetto al gruppo G se sia la funzione peso che la regione di integrazione sono invarianti rispetto alle trasformazioni in G .

Definizione 4. La G -orbita di un punto $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ è l'insieme $\{g(\mathbf{y}) : g \in G\}$.

Si noti che una G -orbita di un dato punto è un insieme G -invariante. È ora possibile definire cos'è una formula di cubatura invariante.

Definizione 5. Una formula di cubatura si dice **invariante rispetto a un gruppo** G se la regione Ω e la funzione peso $\omega(x)$ sono entrambe G -invarianti e se l'insieme dei punti è unione di G -orbite. Inoltre tutti i nodi appartenenti alla stessa orbita hanno lo stesso peso.

L'utilità dei gruppi di simmetria per la costruzione delle formule di cubatura è stata evidenziata da Sobolev (1962).

Sia F uno spazio vettoriale di funzioni definito su Ω che è G -invariante, cosicché $g(f) \in F$ per ogni $f \in F$ e $g \in G$.

Le funzioni G -invarianti di F formano un sottospazio:

$$F(G) = \{f \in F : g(f) = f \text{ per ogni } g \in G\}.$$

Date queste definizioni è ora possibile enunciare il teorema seguente:

Teorema 6 (Teorema di Sobolev). *Sia Q una formula di cubatura G -invariante. Tale formula di cubatura ha grado d se è esatta per tutti i polinomi invarianti di grado al più d e se esiste almeno un polinomio avente grado $d+1$ per cui non lo è.*

La scelta di una regione simmetrica porta ad una notevole semplificazione del problema. Se vogliamo una formula di cubatura G -invariante la condizione necessaria e sufficiente (3) viene rimpiazzata da un sistema ridotto di equazioni lineari:

$$Q(\phi_i) = I(\phi_i), \quad i = 1, \dots, \dim V_d^n(G) \quad (1.2)$$

dove i ϕ_i formano una base per $V_d^n(G)$.

Commento. La teoria dell'invarianza si rivela molto utile per la costruzione dei sistemi non lineari di equazioni per le formule di cubatura aventi particolari caratteristiche:

- il numero di equazioni da risolvere viene ridotto;
- è possibile trovare una base per lo spazio dei polinomi invarianti in modo tale che le equazioni siano facilmente risolvibili;
- se la base è stata scelta con attenzione, tutti i sottosistemi di equazioni non lineari sono risolvibili senza troppe difficoltà poiché hanno la stessa forma di quello che determina la formula di cubatura.

1.4 Le formule minimali

Si noti che dato che siamo interessati a formule di cubatura minimali possiamo restringere la nostra attenzione a quelle interpolatorie.

Definizione 7. Se i pesi di una formula di cubatura di grado d sono univocamente determinati dai nodi, allora tale formula è detta interpolatoria.

~~È molto importante definire un lower bound sui nodi o sui pesi poiché qualsiasi metodo (implicito od esplicito) si decida di utilizzare per la costruzione delle formule di cubatura è in relazione con la stima data, anzi la richiede.~~

Si consideri una formula di cubatura della forma:

$$Q(f) = \sum_{j=1}^n w_j f(\underline{x}_j), \quad w_j \in \mathbb{R}, \underline{x}_j \in \mathbb{R}^d. \quad (1.3)$$

per l'approssimazione dell'integrale (1).

In questa sezione presteremo maggiore attenzione alle formule di cubatura aventi tutti i nodi interni ad Ω . Identificando i polinomi che sono identici sulla regione di integrazione Ω , lo spazio dei polinomi rimane invariato se e solo se la regione Ω contiene punti interni.

Un possibile lower-bound per i nodi della formula di cubatura è fornito dal seguente teorema, dove con V_d^n si intende lo spazio vettoriale delle funzioni aventi grado d ed n variabili.

Teorema 8. *Se la formula di cubatura (1.3) è esatta per tutti i polinomi di V_{2k}^n , allora il numero di punti soddisfa $N \geq \dim(V_{k|\Omega}^n)$.*

Questo teorema è stato presentato per la prima volta da Radon nel 1948 ma solamente per formule di cubatura algebriche costruite a partire da nodi interni alla regione scelta, dove con nodi interni si intendono punti appartenenti alla regione in questione. Tale risultato è stato poi in seguito esteso per un grado n generico da Stroud nel 1960, mentre per le superfici delle palle n -dimensionali e le formule di grado trigonometrico è necessario aspettare Mysovskikh (1977-1988).

Il seguente teorema ci dà invece qualche informazione riguardante i pesi, ed è una generalizzazione del teorema di Mysovskikh (1981).

Teorema 9. *Se la formula di cubatura (2) è esatta per tutti i polinomi di grado $d > 0$ e ha nodi e pesi reali, allora ha almeno $N \geq \dim(V_k^n)$ pesi positivi, con $k = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$.*

Una conseguenza immediata è che il teorema (8) ci dà il medesimo lower-bound per le formule di grado pari e di grado dispari.

Corollario 10. *Se una formula di cubatura raggiunge il minimo numero di nodi specificato nel teorema (8), allora tutti i pesi sono positivi.*

I teoremi (??) e (8) forniscono un lower-bound per il numero di G -orbite nel caso di una formula di cubatura G -invariante; questo minimo può essere riscritto come un lower-bound per il numero di nodi semplicemente moltiplicandolo per la cardinalità della più grande G -orbita. Generalmente però in questo modo non sono date grandi restrizioni.

Si consideri una formula di cubatura a simmetria centrale di grado algebrico $2k+1$ con k pari e si indichi con G_{cs} il gruppo di tali formule. Vediamo quali sono questi limiti; per il teorema (8) il numero di orbite, K , soddisfa:

$$K \geq 2 \dim(\mathbb{P}_k^n(G_{cs})) = \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} \binom{n-1+2i}{n-1}.$$

Tale limite come detto precedentemente fornisce poi un ulteriore lower-bound per i nodi:

$$N \geq 2 \dim(\mathbb{P}_k^n(G_{cs})) - 1. \quad (1.4)$$

In seguito si è visto che il minimo numero di nodi dato da (1.4) in realtà è generalmente troppo basso per le formule di cubatura avente grado d dispari. Limiti inferiori

maggiori di quelli precedentemente trovati devono però prendere in considerazione un numero maggiore di informazioni riguardanti sia la regione di integrazione Ω sia la funzione peso w .

Teorema 11. *Siano R_{2k} e R_{2k+1} , rispettivamente lo spazio dei polinomi pari e dispari di $\mathbb{P}_{2k+1|\Omega}^n$, con $k \in \mathbb{N}_0$. Se il grado di una formula di cubatura per una simmetria centrale è $d = 2k + 1$, allora:*

$$\begin{aligned} N \geq 2 \dim(R_k) - 1, & \text{ se } k \text{ è pari e } 0 \text{ un nodo} \\ N \geq 2 \dim(R_k), & \text{ altrimenti.} \end{aligned}$$

Questo teorema fornisce quindi migliori lower-bound anche per gradi dispari. Inoltre una formula di cubatura che raggiunge tali limiti è a simmetria centrale e ha tutti i pesi positivi.

Capitolo 2

Il disco

2.1 Simmetrie

Le formule di cubatura simmetriche per il disco unitario sono state studiate in un primo momento da Hammer e Stroud [11] che hanno presentato formule per gradi di precisione dispari dal grado 3 all' 11 e per il grado 15, la selezione di nodi da loro utilizzata è però differente da quella che considereremo noi e purtroppo i loro risultati al crescere del grado di precisione si sono rivelati inutilizzabili poiché richiedono l'uso di un gran numero di nodi.

Successivamente anche Rabinowitz e Richter [1] hanno pubblicato delle formule per i gradi di precisione dal 9 al 15. Mentre per gradi maggiori i loro metodi sono risultati inutilizzabili.

In questa sezione si è deciso di seguire l'approccio utilizzato da Kim e Song [12], considerando come funzione peso quella di Lebesgue, ovvero $w(x, y) \equiv 1$.

Definiamo una funzione polinomiale f di grado k avente coefficienti $c_{\alpha\beta}$:

$$f(x, y) = \sum_{0 \leq \alpha + \beta \leq k} c_{\alpha\beta} x^{\alpha} y^{\beta} \quad (2.1)$$

dove α e β sono due interi non negativi.

Si noti che una formula di cubatura simmetrica per il disco unitario in uno spazio due dimensionale è caratterizzata da quattro tipi di nodi e pesi:

tipo	numero per tipo	pesi	nodi
I	t_1	w_1	$(0, 0)$
II	t_2	$w_{2,i}$	$(\pm(x_i), 0), (0, \pm(x_i))$
III	t_3	$w_{3,i}$	$(\pm(x_i), \pm(x_i))$
IV	t_4	$w_{4,i}$	$(\pm(x_i), \pm(y_i)), (\pm(y_i), \pm(x_i))$

Tabella 2.1: Tipologie di nodi e pesi

Partiamo dal caso base e vediamo come calcolare l'integrale sul disco unitario di un monomio qualsiasi $x^{\alpha} y^{\beta}$ (nel caso di un polinomio è sufficiente ripetere il

ragionamento per ogni monomio che lo compone). Se il monomio in questione ha una potenza dispari, cioè α è dispari o β è dispari allora il suo integrale sul disco risulta essere nullo mentre se α e β sono entrambe pari l'integrale dipende unicamente dagli esponenti e non dai loro ordini.

Affinché per ogni polinomio completo, ovvero tale che abbia tutti i termini da quello di grado massimo fino a quello di grado 0, di grado al massimo k si abbia che l'approssimazione sia esatta è necessario che la formula lo sia per tutti i monomi f del tipo $x^\alpha y^\beta$ con $\alpha \geq \beta \geq 0$, $\alpha + \beta \leq k$, α e β pari e k intero. Quindi affinché la formula di cubatura simmetrica possa valutare la funzione polinomiale $f(x, y)$, completa e di grado k , servono m equazioni non lineari indipendenti della forma seguente, dove m è il numero di elementi dell'insieme $\{(\alpha, \beta) | \alpha \geq \beta \geq 0, \alpha + \beta \leq k \text{ e } \alpha \text{ e } \beta \text{ sono entrambe pari}\}$ e dipende dal grado k della funzione:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\alpha + \beta + 2} \int_0^{2\pi} \cos(\theta)^\alpha \sin(\theta)^\beta d\theta &= \omega_1 0^\alpha 0^\beta \\
 &+ 2 \sum_{i=1}^{t_2} \omega_{2,i} (x_i^\alpha 0^\beta + 0^\alpha x_i^\beta) \\
 &+ 4 \sum_{i=t_2+1}^{t_2+t_3} \omega_{3,i} (x_i^{\alpha+\beta}) \\
 &+ 4 \sum_{i=t_2+t_3+1}^{t_2+t_3+t_4} \omega_{4,i} (x_i^\alpha y_i^\beta + y_i^\alpha x_i^\beta)
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Il termine a sinistra dell'equazione (2.2) è l'integrale sul disco unitario del monomio $x^\alpha y^\beta$ in coordinate polari.

Il termine destro invece è la formula di quadratura simmetrica usata per la sua approssimazione: il primo addendo è relativo all'origine del piano cartesiano, il secondo ai 4 punti simmetrici sugli assi cartesiani, il terzo ai 4 punti simmetrici sulle bisettrici e il quarto agli 8 punti simmetrici, due per ogni quadrante.

Per costruire una formula di cubatura simmetrica minimale è necessario imporre delle condizioni:

- il numero di incognite n deve essere uguale al numero di equazioni m ;
- bisogna scegliere il minimo t_4 tale che non crei equazioni che siano in conflitto con le m ottenute.

Il primo obiettivo quindi è determinare t_4 per dei gradi fissati, in particolare quelli trattati da Kim e Song [12]. In un secondo momento basandoci sui risultati trovati descriviamo l'algoritmo che permette di calcolare $t_1, t_2 + t_3, t_4$.

Si considerino i gradi $k = 9, 13, 17$.

Sia $k = 9$, le coppie (α, β) , soddisfacenti alle proprietà precedentemente descritte, per tale grado sono $\{(0, 0), (2, 0), (4, 0), (2, 2), (6, 0), (4, 2), (8, 0), (6, 2), (4, 4)\}$.

Prendendo $t_4 = 0$ l'equazione (2.2) calcolata in $(\alpha, \beta) = (6, 2)$ e quella calcolata in

$(\alpha, \beta) = (4, 4)$ danno luogo a un conflitto. Quindi è necessario prendere come il minimo valore $t_4 = 1$ in modo tale che non si creino conflitti tra le 9 equazioni per $k=9$. Sia $k = 13$, le coppie (α, β) corrispondenti sono $\{(0, 0), (2, 0), (4, 0), (4, 2), (4, 4), (6, 0), (6, 2), (6, 4), (8, 0), (8, 2), (8, 4), (6, 6), (2, 2), (10, 0), (10, 2), (12, 0)\}$. Prendendo $t_4 = 1$ come valore minimo si ottengono 4 equazioni aventi 3 incognite rispetto alle 16 iniziali; la prima sottraendo l'equazione (2.2) ricavata ponendo $(\alpha, \beta) = (6, 2)$ da quella con $(\alpha, \beta) = (4, 4)$, le altre in modo del tutto analogo con le coppie seguenti: (8, 2) e (6, 4), (10, 2) e (8, 4), (8, 4) e (6, 6). Poiché per $t_4 = 1$ c'è una situazione di conflitto il minimo valore è $t_4 = 2$.

Sia $k = 17$ prendendo $t_4 = 2$, si ottengono 9 equazioni con 6 incognite dalle 25 iniziali. Allora il minimo valore per t_4 è 3.

Basandosi ora sulle relazioni trovate è possibile costruire un algoritmo per la selezione ottimale del valore di t_4 come riportato nel paragrafo seguente.

Restano ora da determinare in modo opportuno i valori di t_1, t_2, t_3 .

Per fare ciò in primis si sceglie il valore di t_1 , affinché sia soddisfatta la relazione $m = n$ e poi si determina $t_2 + t_3$. Ovvero dopo aver posto $t_1 = 0, 1$ la strategia adottata per trovare $(t_1, t_2 + t_3, t_4)$, con un numero minimo di nodi di quadratura simmetrici è descritta nell'algoritmo analizzato nella prossima sezione.

Una volta noti questi dati, eseguendo un programma contenente DUNLSF come subroutine, si usa un metodo di prova ed errore per la scelta di (t_2, t_3) finché non si trova una formula il più possibile esatta.

La subroutine DUNLSF viene usata per la risoluzione di sistemi di equazioni non lineari e ci permette di ottenere dei nodi di integrazione per le nuove formule cubatura invarianti tenendo conto del grado di precisione polinomiale.

2.1.1 Algoritmo per il calcolo dei valori $(t_1, t_2 + t_3, t_4)$

I valori $(t_1, t_2 + t_3, t_4)$ e il tempo impiegato per il loro calcolo dipendono fortemente dal grado di precisione scelto. Descriviamo ora l'algoritmo usato per il calcolo esplicito di tali valori attraverso degli step successivi.

Notazione: $[x] =$ parte intera di $x \bmod(a,b)$ lo usiamo al posto di $\frac{a}{b}$

STEP 1: input k

viene ricevuto in input il più grande grado di precisione k per il quale la formula di quadratura simmetrica è esatta;

STEP 2: la formula è la stessa per gradi pari $2d$ o dispari $2d + 1$ con d intero;

```
if mod(k,2)=1 then
    k = k - 1
end if
```

STEP 3: calcolo di t_4 in modo tale da scegliere il minimo numero di nodi di cubatura simmetrici;

```
if k = 0 or k = 2 then t4 = 0
end if
```

$im = 0$

```
for i = 2 :  $\frac{k}{2}$  do
    j = 2 * i
    if mod(j, 2) = 0 then im = im +  $(\frac{1}{2}) * (\frac{j}{2}) - 1$ 
    else im = im +  $\frac{1}{2} * ([\frac{j}{2}] - 1) - 1$ 
    end if
end for
```

```
if mod(im, 3) = 0 then t4 =  $\frac{im}{3}$ 
else t4 =  $\frac{im}{3} + 1$ 
end if
```

STEP 4: denotato con m il numero di equazioni non lineari si ottengono le formule per $t_2 + t_3$ e t_1 ;

$$t_2 + t_3 = \left[\frac{m - 3 * t_4}{2} \right]$$

$$t_1 = m - 2 * (t_2 + t_3) - 3 * t_4$$

STEP 5: output $t_1, t_2 + t_3, t_4$

2.1.2 (t_1, t_2, t_3, t_4) ottimali

L'algoritmo descritto nella sezione precedente ha reso possibile il calcolo esplicito di $t_1, t_2 + t_3, t_4$. Nella tabella seguente sono riportate le scelte ottimali per t_1, t_2, t_3, t_4 grado per grado.

Si ricorda che k è il grado del monomio in questione, m è il numero di equazioni da risolvere e t_1, t_2, t_3, t_4 sono i numeri dei nodi per le quattro tipologie possibili, come viene descritto nella tabella (2.1).

k	m	t_1	t_2	t_3	t_4
1	1	1	0	0	0
3	2	0	1	0	0
3	2	0	0	1	0
5	4	0	1	1	0
5	4	1	0	0	1
7	6	0	1	2	0
9	9	0	2	1	1
11	12	1	0	4	1
11	12	0	0	3	2
13	16	0	3	2	2
15	20	0	4	3	2
17	25	0	4	4	3
17	25	0	3	2	5
19	30	0	3	6	4
19	30	0	4	2	6

Tabella 2.2: Tipologie di nodi e pesi

Una volta selezionati i punti di cui alla Tabella (2.1) come i nodi usati per la formula di quadratura simmetrica, è possibile ottenere la colonna $\#$ della Tabella (2.4) utilizzando l'algoritmo descritto nella sezione precedente. Più in generale nella tabella seguente [12] sono elencati in modo compatto i relativi pesi e nodi per una formula di quadratura simmetrica per i gradi dispari. La seconda colonna indica il numero di nodi per la formula di cubatura corrispondente. Non necessariamente tali dati corrispondono a quelli noti in letteratura per le formule minimali. Infatti è possibile osservare che per alcuni gradi sono date più formule anche con un numero di nodi diverso, come ad esempio per il grado 5.

k	punti	peso	x	y	tipo di nodo
1	1	3.141592653589793	.0000000000000000	.0000000000000000	I
3	4	.785398163397448	.707106781186548	.0000000000000000	II
3	4	.785398163397448	.5000000000000000	.5000000000000000	III
5	8	.732786462492640	.650115167343736	.0000000000000000	II
5	8	.052611700904808	.888073833977115	.888073833977115	III
5	9	.785398163397449	.0000000000000000	.0000000000000000	I
5	9	.294524311274043	.754344479484572	.312459714103782	IV
7	12	.232710566932577	.866025403784439	.0000000000000000	II
7	12	.387077796006226	.322914992067400	.322914992067400	III
7	12	.165609800458645	.644171310389465	.644171310389465	III
9	20	.071488826617391	.952458896434417	.0000000000000000	II
9	20	.327176874928167	.415187657878755	.0000000000000000	II
9	20	.005591341512851	.834794942216211	.834794942216211	III
9	20	.190570560169519	.740334457173511	.379016937530835	IV
11	25	-.103220620849181	.0000000000000000	.0000000000000000	I
11	25	.000561120485457	1.081713912649978	1.081713912649978	III
11	25	.234185472691706	.329855087221954	.329855087221954	III
11	25	.123731369524117	.163309595229403	.163309595229403	III
11	25	.194337435615691	.582963679648472	.582963679648472	III
11	25	.129193960146342	.862551409331466	.191706749096887	IV
11	28	.051310052712355	.680167267076408	.680167267076408	III
11	28	.208368275231940	.232463234651158	.232463234651158	III
11	28	.113628206510048	.547722557505169	.547722557505169	III
11	28	.126977836503225	.652159581445885	.174745633184644	IV
11	28	.079067977968328	.904823085572323	.242446615072141	IV
13	36	.156239869837333	.283402832348825	.0000000000000000	II
13	36	.069447409266977	.920575474036251	.0000000000000000	II
13	36	.138145910534871	.649007230578002	.0000000000000000	II
13	36	.043376583887155	.677355106028069	.677355106028069	III
13	36	.150228334140010	.412672216763289	.412672216763289	III
13	36	.018199321926118	.938694583835123	.335767600829539	IV
13	36	.095780705939433	.752042776803954	.379717011170077	IV
15	44	.125290208564338	.252863797091293	.0000000000000000	II
15	44	.016712625496982	.989746802511614	.0000000000000000	II
15	44	.109500391126365	.577728928444958	.0000000000000000	II
15	44	.066237455796397	.873836956645035	.0000000000000000	II
15	44	.026102860184358	.689299380791136	.689299380791136	III
15	44	.066000934661100	.597614304667208	.597614304667208	III
15	44	.127428372681720	.375416824626170	.375416824626170	III
15	44	.042523065826681	.883097111318591	.365790800400663	IV
15	44	.081539591616413	.707438744960070	.293030722710664	IV

17	56	.034218732123473	.000061843487605	.0000000000000000	II
17	56	.016529016194279	.980790725733799	.0000000000000000	II
17	56	.128441621643862	.536380801743208	.0000000000000000	II
17	56	.057523498415081	.859692027602019	.0000000000000000	II
17	56	.000019445945395	.890507932479849	.890507932479849	III
17	56	.029882788585530	.597728327225623	.597728327225623	III
17	56	.086625257876566	.472638508474430	.472638508474430	III
17	56	.135289763196368	.256583368615187	.256583368615187	III
17	56	.030442743336826	.915666628257231	.290750921163427	IV
17	56	.036355668706617	.775130682141990	.550400039905684	IV
17	56	.081635607665003	.722293685844502	.274942296086914	IV
17	60	.107540143418461	.233779702361770	.0000000000000000	II
17	60	.021291625083247	.974967664200431	.0000000000000000	II
17	60	.082028519637405	.670603246539245	.0000000000000000	II
17	60	.000480959036869	.767149887105600	.767149887105600	III
17	60	.055918006547614	.529910286773986	.529910286773986	III
17	60	.020154425991986	.920197160917920	.324880277222329	IV
17	60	.056453982349758	.696315960030871	.353373943382497	IV
17	60	.038487694687371	.763756057536127	.554819904211117	IV
17	60	.096415834450115	.455714401760160	.222878364006045	IV
17	60	.047557517357696	.855907714936672	.165103693017075	IV
19	68	-.336959088794964	.860125674956782	.0000000000000000	II
19	68	-.252102704609804	.860125119919931	.0000000000000000	II
19	68	.131164048626801	.547071550894734	.0000000000000000	II
19	68	-.010919895825604	.927565701076356	.927565701076356	III
19	68	.010744805554708	.928162274936277	.928162274936277	III
19	68	.004798012482265	.755935467576794	.755935467576794	III
19	68	.072711702889623	.618205357502056	.618205357502056	III
19	68	.115883691032049	.398705530364909	.398705530364909	III
19	68	.123519504105529	.175541035301314	.175541035301314	III
19	68	.022426281825809	.959568314399471	.155454100986327	IV
19	68	.033906878046312	.851375493057155	.435023471372536	IV
19	68	.332072154179621	.858667011279674	.030948726948493	IV
19	68	.074873729916680	.711569636216547	.300178547400372	IV
19	72	.082558858859169	.204668989256100	.0000000000000000	II
19	72	.009721593541193	.992309839464756	.0000000000000000	II
19	72	.061920685878045	.740931035494388	.0000000000000000	II
19	72	.079123279187043	.477987648986077	.0000000000000000	II
19	72	.087526733002317	.306138805262459	.306138805262459	III
19	72	.057076811471306	.524780156099700	.524780156099700	III
19	72	.020981864256888	.921806074110042	.310920075968188	IV
19	72	.015226392255721	.790235832571934	.579897645710646	IV
19	72	.033136884897617	.725790566968788	.525045580895713	IV
19	72	.044853730819348	.788230650371813	.290244481132460	IV
19	72	.065321481701811	.584894890453686	.264317463415838	IV
19	72	.024214746797802	.909637445684200	.092571132370888	IV

Tabella 2.3: Punti per le formule di quadratura simmetriche

Si noti che i nodi per la formula di quadratura simmetrica così descritti sono esattamente gli stessi per grado dispari, $2k + 1$, e per grado pari, $2k$, dove k è un numero intero. Nella Tabella (2.4) confrontiamo dunque i risultati ottenuti facendo uso dell'algoritmo descritto con quelli dovuti a P.C.Hammer e A.H.Stroud [11] e a P.Rabinowitz e N.Richter [1] e con quelli presentati nella tabella (2.3). La prima colonna corrisponde al grado di precisione della formula, mentre nelle altre vengono elencati i numeri di nodi corrispondenti a tali gradi di precisione:

k	[11]	[1]	(2.3)	#
1			1	1
3	4		4	4
5	7,9		8,9	8
7	12,16		12	12
9	21	20,21	20	20
11	32	28	25,28	25
13		37	36	36
15	64	44	44	44
17			56,60	56
19			68,72	68

Tabella 2.4: Confronto delle formule di quadratura sul disco unitario

Si può notare ad esempio che per il grado 3 i risultati ottenuti sono tutti uguali e coincidono esattamente con quello minimale, in quanto per $k = 3$ il numero minimo di nodi richiesto è 4.

La tabella precedente riporta quindi tutti i dati, minimi e non, finora noti per i gradi dispari.

2.1.3 Risultati numerici

Per provare numericamente che quanto detto fino a questo momento è corretto si considerino i seguenti integrali sul disco unitario:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int \int_R \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} dx dy = 2\pi(\sqrt{2} - 1) \\
 I_2 &= \int \int_R \exp(x^2 + y^2) dx dy = \pi(e - 1) \\
 I_3 &= \int \int_R \sin(x^2 + y^2) dx dy = \pi(1 - \cos(1)) \\
 I_4 &= \int \int_R \sum_{0 \leq \alpha + \beta \leq k} dx dy
 \end{aligned}$$

nella seguente tabella sono confrontati i risultati numerici ottenuti mediante formule di quadratura simmetriche per funzioni aventi grado di precisione $1 \leq k \leq 19$:

tipo	I_1	I_2	I_3
valore esatto	2.602580569137	5.398141569083	1.444182898756
$p = 11(28$ punti)	2.602561981220	5.398139389947	1.444183520647
$p = 13(36$ punti)	2.602578202105	5.398141626340	1.444182867908
$p = 15(44$ punti)	2.602580199560	5.398141567340	1.444182898262
$p = 17(60$ punti)	2.602580480601	5.398141569177	1.444182898803
$p = 19(72$ punti)	2.602580560958	5.398141569082	1.444182898757

Tabella 2.5: Confronto dei risultati numerici per I_1 I_2 I_3

tipo	valore esatto	formule di quadratura simmetriche
$p = 11(28$ punti)	5.10549712362685	5.10549712362685
$p = 13(36$ punti)	5.22120310305594	5.22120310305594
$p = 15(44$ punti)	5.31247495993513	5.31247495993514
$p = 17(60$ punti)	5.38750153416485	5.38750153416485
$p = 19(72$ punti)	5.45031325373879	5.45031325373879

Tabella 2.6: Confronto dei risultati numerici per I_4

Si vede così che i valori esatti sono approssimati in modo adeguato dalle formule di cubatura trovate.

Commento. Com'è possibile vedere nelle tabelle precedenti per $k = 3$ è stato trovato un risultato esatto e quello di $\#$ per $(0,1,0,0)$ coincide esattamente con quello pubblicato da Hammer e Stroud [11].

Per $k = 5$ i risultati più recenti sono riportati nella tabella (2.3); quello ottenuto con 8 punti ha alcuni nodi esterni al disco unitario, mentre quello con 9 è costituito da punti interni e pesi positivi.

Per $k = 7$ il risultato presentato nella tabella (2.3) coincide esattamente con quello pubblicato da Hammer e Stroud [11] con 12 punti.

Per $k = 9$ il risultato della tabella (2.3) coincide con quello pubblicato da Rabinowitz e Richter [1] con 20 punti.

Per $k = 11$ è stata ottenuta un'ottima formula di quadratura con 28 punti e per $k = 13$ con 36 punti con buona precisione.

Per $k = 15$ è stato ottenuto lo stesso risultato della tabella (2.3), fino a 13 cifre decimali, che è lo stesso di quello pubblicato da Rabinowitz e Richter [1].

Il sottoprogramma DUNLSF utilizzato per il calcolo esplicito di t_2, t_3 richiede stime iniziali e queste se sono diverse possono dare luogo a risultati discordi per un dato grado k , anche se è stata fatta la stessa scelta di (t_1, t_2, t_3, t_4) .

Quando viene eseguito un programma con subroutine DUNLSF una buona scelta per le stime iniziali può essere data dall'analisi dei risultati precedentemente ottenuti.

2.2 Formule note in letteratura

Come detto precedentemente i dati trovati fino a questo momento non sono tutti minimali, solo alcuni di essi lo sono. Ad ogni grado di precisione corrispondono diverse formule di cubatura aventi un numero di nodi diverso, nella tabella che segue riportiamo la ricerca fatta da Cools e Kim [13] limitandoci però ai gradi dal 1 al 19. Oltre al numero di nodi minimali e non, per le formule di cubatura riportiamo anche la tipologia di pesi e la posizione dei nodi utilizzati:

- P: tutti i pesi sono positivi;
- E: tutti i pesi sono uguali;
- N: alcuni pesi sono negativi;
- ?: i pesi non sono noti in modo esplicito;
- I: tutti i punti sono interni al disco unitario;
- B: alcuni punti giacciono sulla circonferenza, gli altri sono interni;
- O: alcuni punti sono esterni al disco unitario.

Per maggiore chiarezza indicizziamo con un asterisco il numero di nodi corrispondente alla formula minimale.

Grado	N	Tipologia	Grado	N	Tipologia	Grado	N	Tipologia
2	3*	PI	9	18*	PO		60	PO
3	4*	PI		19	PI		61	PI
		PB		20	PI		68	NO
4	6*	PI			PO		69	PO
		?O		21	PI		71	PO
	10	EI			PO		72	PI
5	7*	PI	11	25	PO		76	PI
	8	PO			NO			
	9	PI		26	PI			
		PB		28	PI			
	12	EI		32	PI			
6	10*	PO	13	34	PO			
	11	PO		35	PB			
	14	EI		36	PI			
7	12*	PI		37	PI			
	16	EI		41	PI			
		PI	15	44	PI			
	18	EI		48	PI			
	20	EI	17	56	PO			
8	16	PI		57	PI			

Tabella 2.7: Dati noti in letteratura

Capitolo 3

Verifiche sperimentali

In questa sezione ci occuperemo della parte più applicativa. Il nostro obiettivo è ora verificare che i nodi e i pesi dati nella tabella (2.3) permettano la costruzione di formule di cubatura il più possibile esatte. Poiché in tale tabella sono presenti solamente i gradi dispari, per i gradi pari andremo a considerare il grado dispari successivo. Si procede dunque mediante alcuni step:

- si raccolgono tutti i pesi rappresentati in (2.3) che vengono suddivisi nei vettori w_1, w_2, \dots, w_{19} relativi a ciascun grado di precisione;
- si raccolgono tutti i punti cartesiani (x_i, y_i) rappresentati in (2.3) e si suddividono nei vettori $xy_1, xy_2, \dots, xy_{19}$ relativi a ciascun grado di precisione;¹
- calcolo diretto delle formule di cubatura:
nel nostro caso potranno venire utilizzati i polinomi di Koornwinder, Zernike o di Logan-Shepp, i quali sono tutti ortogonali sul disco rispetto a dei pesi specifici (li descriveremo in seguito);
- si calcolano gli integrali sul disco unitario di funzioni convenienti che sappiamo dare l'integrale esatto, e si confrontano questi risultati con quelli ottenuti al punto precedente così da verificare la correttezza dei dati e la precisione delle formule.

¹E' opportuno notare che per alcuni gradi di precisione nella tabella sono elencate più di una formula di cubatura, noi nei programmi le andremo ad indicare entrambe ma riporteremo i risultati solamente per quelle aventi il minor numero di nodi. Nel caso particolare del grado 3 dove sono descritte due formule di cubatura aventi lo stesso numero di nodi sceglieremo la prima.

3.1 Note teoriche

Per verificare se i dati presenti nella tabella sono corretti è possibile utilizzare diversi metodi.

Noi abbiamo deciso di utilizzare la base di Koornwinder per la prima parte e ... per la seconda parte. Ma erano possibili anche approcci di tipo diverso, come ad esempio...(questo paragrafo è da sistemare una volta finiti i programmi) Qui di seguito diamo delle definizioni e delle informazioni riguardanti la base scelta, altri polinomi ortogonali sul disco e sul calcolo tensoriale.

Definizione 12. Si denoti con Π_n lo spazio dei polinomi reali in due variabili di grado totale al più n . Un polinomio $p \in \Pi_n$ si dice polinomio ortogonale rispetto alla funzione peso $w(\underline{x})$ se

$$(p, q) = \int_{\Omega} p(\underline{x}) q(\underline{x}) w(\underline{x}) d\underline{x} = 0$$

per ogni $q \in \Pi_n - n - 1$.

3.1.1 Polinomi di Koornwinder

Nel 1975 [15], Tom Koornwinder ha studiato esempi in due variabili analoghi ai polinomi di Jacobi in due variabili. Alcuni di questi esempi sono dei classici e ben noti polinomi ortogonali in due variabili, come ad esempio i polinomi ortogonali sulla palla unitaria, sul simplex o il prodotto tensoriale dei polinomi di Jacobi in una variabile, ma i restanti casi non sono considerati classici dagli altri studiosi.

Prima di tutto è utile ricordare una proprietà basilare dei polinomi di Jacobi in una variabile, i quali sono ortogonali rispetto al prodotto interno:

$$\langle f, g \rangle = \int_1^1 f(x) g(x) w^{(\alpha, \beta)}(x)$$

dove la funzione peso è data da: $w^{(\alpha, \beta)}(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$.

Inoltre è possibile ridefinire i classici polinomi di Jacobi nell'intervallo $[0,1]$ ed in tal caso la funzione peso diventa: $w^{(\alpha, \beta)}(x) = (1-x)^\alpha x^\beta$, $\alpha, \beta > -1$.

Koornwinder partendo da qui ha quindi definito i polinomi di Koornwinder di tipo II, in due variabili, ortogonali sul disco unitario in relazione alla funzione peso $w^{(\alpha)}(x, y) = (1-x^2-y^2)^\alpha$, $\alpha > -1$ aventi forma

$$P_{n-k, k}^\alpha(x, y) = P_{n-k}^{(\alpha+k+\frac{1}{2}, \alpha+k+\frac{1}{2})}(x) (1-x^2)^{\frac{1}{2}k} P_k^{(\alpha, \alpha)}((1-x^2)^{-\frac{1}{2}}y), n \geq k \geq 0$$

La base data dai polinomi di Koornwinder è dunque ortogonale sul disco.

3.1.2 Polinomi di Zernike

Zernike osservò che era conveniente espandere una qualsiasi funzione sul disco come una serie di Fourier valutata nell'angolo e combinata con i polinomi unilaterali di Jacobi valutati nel raggio.

I polinomi di Zernike si differenziano in due classi:

- pari: $Z_n^m(r, \theta) = R_n^m(r) \cos(m\theta)$
- dispari: $Z_n^{-m}(r, \theta) = R_n^m(r) \sin(m\theta)$

dove n, m sono interi non negativi con $n \geq m$, r è la distanza radiale, θ è l'angolo azimutale e R_n^m sono detti polinomi radiali e vengono definiti come segue

$$R_n^m(r) = \sum_{k=0}^{\frac{n-m}{2}} \frac{(-1)^k (n-k)!}{k! (\frac{n+m}{2} - k)! (\frac{n-m}{2} - k)!} r^{(n-2k)},$$

quando $n-m$ è pari, $R_n^m(r) = 0$ altrimenti.

Questi possono inoltre essere anche definiti in termini dei polinomi di Jacobi:

$$R_n^m(r) = (-1)^{(n-m)/2} r^m P_{(n-m)/2}^{(m,0)}(1-2r^2).$$

I polinomi di Zernike sono polinomi bivariati nelle coordinate cartesiane (x, y) e sono ortogonali sul disco unitario rispetto alla funzione peso di Lebesgue $w(x, y) \equiv 1$.

3.1.3 Polinomi di Logan-Shepp

Logan e Shepp hanno definito una classe di polinomi di grado N come

$$P_{N,k}(x, y) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} U_N(x \cos(\frac{k\pi}{N+1}) + y \sin(\frac{k\pi}{N+1})), \quad k = 0, 1, \dots, N$$

dove U_N è un polinomio di Chebyshev di secondo tipo di grado N ,

$$U_N(x) = \frac{\sin([N+1] \arccos(x))}{\sin(\arccos(x))}.$$

Questi polinomi così definiti sono ortonormali sul disco unitario, infatti

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 P_{M,j}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) P_{N,k}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r dr d\theta = \delta_{MN} \delta_{jk}, \quad j, k = 0, 1, \dots, N.$$

Essendo queste funzioni ortonormali è possibile estendere una qualsiasi $f(x, y)$ in termini di $P_{N,k}(x, y)$ nel modo seguente

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_{n,k} P_{n,k}(x, y),$$

dove

$$a_{n,k} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) P_{n,k}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r dr d\theta.$$

Tale integrale può essere calcolato usando una formula di quadratura numerica in r e θ .

I polinomi di Logan-Shepp come quelli di Zernike sono ortogonali sul disco unitario rispetto al peso di Lebesgue.

Le basi di Zernike e di Logan-Shepp sono sempre equivalenti per quanto riguarda la precisione per un dato troncamento e generalmente convergono più velocemente della base di Chebyshev.

Tuttavia la somma parziale, come anche la somma scomposta possono essere applicate solamente alla base di Zernike che dunque presenta maggiori applicazioni. La base di Logan-Shepp invece si presta bene a risolvere l'equazione di Poisson tramite il Dual Reciprocity Method.

3.1.4 Brevi note sul calcolo tensoriale

Le formule di cubatura a prodotto tensoriale sono una particolare classe di formule di cubatura multidimensionali costruite a partire da una formula di cubatura univariata. Queste formule si possono ottenere per diversi domini multidimensionali.

3.2 Risultati

Bibliografia

- [1] P.RABINOWITZ AND N.RICHTER: *Perfectly symmetric two dimensional integration formulas with minimal number of points*, Math. Comp. 23 (1969), pp. 765-779.
- [2] WALTER GAUTSCHI:
<https://www.cs.purdue.edu/archives/2002/wxg/codes/OPQ.html>
- [3] RONALD COOLS: *Constructing cubature formulae: the science behind the art*, Cambridge University Press, 1997, Acta Numerica (1997), pp. 1-54.
- [4] RONALD COOLS: *Monomial cubature rules since Stroud, a compilation - part 2*, J.Comp. and Appl. Math. 112 (1999), pp. 21-27.
- [5] S.L. SOBOLEV: *Formulas of mechanical cubature on the surface of a sphere*, Sibirsk. Math. Z. 3 (1962) 769–796 (in Russian).
- [6] J.N.LYNNE AND D.JESPERSEN: *Moderate degree symmetric quadrature rules for the triangle*, Inst.Maths.Applies. 15 (1975), pp. 19-32.
- [7] M.E.LAURSEN AND M.GELLERT: *Some criteria for numerically integrated matrices and quadrature formulas for triangles*, Int.J.Numer.Methods Eng. 12 (1978), pp. 67-76.
- [8] I.P.MYSOVSKIKH: *A proof of minimality of the number of nodes of a cubature formulas for a hypersphere*, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. 6 (1966), 621-630. Russian.
- [9] A.H.STROUD: *Approximate calculation of multiple integrals*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ (1971).
- [10] H.M.MÖLLER: *Polynomideale und Kubaturformeln*, PhD thesis, Universitat Dortmund, (1973).
- [11] P.C.HAMMER AND A.H.STROUD: *Numerical evaluation of multiple integrals II*, MTAC 12 (1958), pp. 272-280.
- [12] KYOUNGJOONG KIM AND MANSUK SONG: *Symmetric quadrature formulas over a unit disk*, Korean J. Comp. e Appl. Math. Vol. 4 (1997), No. 1, pp. 179–192.

- [13] RONALD COOLS AND KYUNGJOONG KIM: *A survey of known and new cubature formulas for the unit disk*, Report TW 300, February 2000
- [14] ALVISE SOMMARIVA AND MARCO VIANELLO:
www.math.unipd.it/~alvise/POINTSETS/BASIS
- [15] TOM KOORNWINDER: *Two-Variable Analogues of the Classical Orthogonal Polynomials*, Academic Press, INC, 1975