

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA “TULLIO LEVI-CIVITA”

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di Laurea

Approssimazione uniforme di funzioni a valori reali in RKHS

Relatore:

Prof. Alvise Sommariva

Laureando: Francesco Lando

Matricola: 2004486

Anno Accademico 2024/2025

11/04/2025

Indice

Introduzione	5
1 Nozioni preliminari	7
1.1 Teoria dei reproducing kernel	7
1.2 Teoria della misura	13
1.3 Geometria differenziale	14
2 Su un metodo Kernel	15
2.1 Introduzione	15
2.2 Il metodo kernel	18
3 Esperimenti numerici	25
3.1 Discussione del codice utilizzato	26
3.2 Esperimenti numerici sul disco unitario	28
3.3 Esperimenti numerici su un triangolo	32
3.4 Esperimenti numerici su un poligono con un lato curvo	36
4 Appendice	43
4.1 La funzione <code>demo_RK</code>	43
4.2 La funzione <code>RRKeval</code>	43
5 Ringraziamenti	45

Introduzione

In un recente articolo W. Themistoklakis e M. Van Barel [10] hanno proposto un metodo kernel che in un certo senso generalizza la iperinterpolazione di I.H. Sloan.

Nell'articolo sopramenzionato, si assumono dati una sequenza di spazi di Hilbert $\mathcal{H}_n$ di dimensione finita, con reproducing kernel K_n , tali che

$$\mathcal{H}_n \subset \mathcal{H}_{n+1}, \quad n \geq 0, \quad \phi \in \mathcal{H}_i, \psi \in \mathcal{H}_j \text{ implica } \phi \cdot \psi \in \mathcal{H}_{i+j}$$

ed inoltre che $f : X \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{H}$ sia una funzione continua definita in una varietà riemanniana compatta X , con $\mathcal{H}$ RKHS il cui prodotto scalare é

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} = \int_X f(x)g(x)d\mu(x)$$

con μ misura di Borel σ -finita su X .

Assunto che l'errore di migliore approssimazione $E_n(f)$ di f in $\mathcal{H}_n$ sia infinitesimo in n , tipicamente si forniscono approssimazioni via proiezioni $S_n(f) = \langle f, K_n(x, \cdot) \rangle_{\mathcal{H}}$ o loro varianti ottenute discretizzando il prodotto scalare mediante una formula di quadratura di grado $2n$ a pesi positivi.

Come alternativa, in [10], si propone invece il kernel $v_n^m(x, y) = \frac{K_n(x, y)K_m(x, y)}{K_m(x, x)}$ e similmente al caso precedente di approssimare f con $V_n^m f(x) = \langle f, v_n^m(x, \cdot) \rangle_{\mathcal{H}}$ (o sue varianti discrete, via opportune formule di quadratura).

Si dimostra che tali approssimazioni sono proiezioni in $\mathcal{H}_{n-m}$ e in vari esperimenti numerici talvolta corroborati da una robusta teoria che su ipercubi le costanti di Lebesgue relativamente alla norma infinito risultano limitate.

In questo lavoro, dopo aver introdotto quanto svolto in [10], ripercorriamo tale proposito su domini quali il disco unitario, il triangolo e un poligono curvo, evidenziando le difficoltà numeriche incontrate, nel caso $\mathcal{H}_n$ sia lo spazio $\mathbb{P}_n$ dei polinomi aventi grado totale n .

In particolare si vede che per $m \ll n$, utilizzando funzioni test di regolarità variabile, la performance nel caso del disco é prossima a quella dell'interpolazione,

ma la costante di Lebesgue cresce troppo rapidamente, mentre nel caso $m \approx n/2$, la costante di Lebesgue cresce molto lentamente, ma la qualità dell'approssimazione risulta inferiore. Inoltre verifichiamo la proprietà di proiezione.

Nei casi del triangolo e del poligono curvo si evidenziano simili analogie, ma in qualche caso anche un inatteso decadimento dell'approssimazione al crescere di n che necessita una futura analisi.

Capitolo 1

Nozioni preliminari

In questo primo capitolo introdurremo alcune nozioni teoriche necessarie per la completa esposizione e comprensione del nostro studio.

1.1 Teoria dei reproducing kernel

Partiamo con l'enunciare alcune definizioni di base, che per completezza saranno date sul campo complesso $\mathbb{C}$ e dalle quali seguono le analoghe su quello reale $\mathbb{R}$.

Definizione 1.1. Uno spazio vettoriale E su $\mathbb{C}$ dotato di un prodotto interno cioè di una funzione $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ con le seguenti proprietà:

- i) $\langle x, x \rangle \geq 0$ per ogni $x \in E$; inoltre $\langle x, x \rangle = 0$ se e solo se $x = 0$,
- ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ per ogni $x, y \in E$,
- iii) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ per ogni $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{C}$,
- iv) $\langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$ per ogni $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{C}$,
- v) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ per ogni $x, y, z \in E$,

si dice *spazio euclideo* su $\mathbb{C}$.

Osserviamo che l'operazione appena introdotta è bilineare, ossia vale anche $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ per ogni $x, y, z \in E$: infatti

$$\langle x + y, z \rangle = \overline{\langle z, x + y \rangle} = \overline{\langle z, x \rangle} + \overline{\langle z, y \rangle} = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle.$$

A partire dal prodotto interno si può inoltre definire lo spazio normato $(E, \|\cdot\|_E)$ ponendo $\|f\|_E = \sqrt{\langle f, f \rangle}$. Può succedere però che, pur considerando una successione convergente di elementi di E , il limite sia un elemento che non appartiene all'insieme. Per evitare ciò nel seguito considereremo una particolare classe di spazi euclidei:

Definizione 1.2. Uno spazio vettoriale $\mathbb{V}$ é *completo* se é dotato di norma ed é completo rispetto ad essa, cioè per ogni successione di Cauchy $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ in $\mathbb{V}$ esiste un elemento $x \in \mathbb{V}$ tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

In particolare ci soffermeremo su:

Definizione 1.3. Sia $\mathcal{H}$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ dotato del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$. $\mathcal{H}$ é uno *spazio di Hilbert*, o *Hilbertiano*, se $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ é completo, dove $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ é la norma indotta dal prodotto scalare.

Esempio 1.1. Esempi di spazi di Hilbert sono:

1. Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ con l'usuale prodotto vettore,
2. Lo spazio delle successioni quadrato-sommabili

$$l^2(\mathbb{R}) := \{ \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty \}$$

con prodotto interno $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ dove $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $y = \{y_m\}_{m \in \mathbb{N}}$,

3. Lo spazio delle funzioni quadrato-integrabili

$$L^2(\mathbb{R}^n) := \{ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : \int |f(x)|^2 < +\infty \}$$

con prodotto interno $\langle f, g \rangle = \int f(x)g(x) dx$.

Introduciamo ora il concetto matematico di *kernel* che é fondamentale importanza per il nostro studio, facendo riferimento a [4].

Definizione 1.4. Sia X un insieme non vuoto. Una funzione $K : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ é detta *kernel* se esistono uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ su $\mathbb{R}$ ed una mappa $\phi : X \rightarrow \mathcal{H}$ tale che se $x, x' \in X$ allora

$$K(x, x') := \langle \phi(x), \phi(x') \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Osserviamo che non abbiamo posto alcuna condizione su X , nemmeno che il prodotto interno sia definito sugli elementi di X .

Si possono dimostrare i seguenti asserti.

- Proposizione 1.1.** i) *Dati $\alpha > 0$ e i kernel K, K_1, K_2 definiti su X , allora αK e $K_1 + K_2$ sono kernel su X .*
- ii) *Siano X e $\bar{X}$ due insiemi e definiamo una mappa $A : X \rightarrow \bar{X}$. Definiamo inoltre un kernel K su $\bar{X}$. Allora il kernel $K(A(\cdot), A(\cdot))$ è definito su X .*
- iii) *Dati K_1 kernel su X_1 e K_2 kernel su X_2 , allora $K_1 \times K_2$ è kernel su $X_1 \times X_2$.*

Un concetto importante è quello di kernel (semi-)definito positivo:

Definizione 1.5. Una funzione simmetrica $K : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ è *semidefinita positiva* se per ogni $n \geq 1$, $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j K(x_i, x_j) \geq 0.$$

La funzione $K(\cdot, \cdot)$ è *definita positiva* se per x_i distinti l'uguaglianza vale se e solo se tutti gli a_i sono nulli.

Vale il seguente asserto.

Proposizione 1.2. *Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert, X un insieme non vuoto e $\phi : X \rightarrow \mathcal{H}$. Allora $K(x, y) := \langle \phi(x), \phi(y) \rangle_{\mathcal{H}}$ è funzione semidefinita positiva.*

Dimostrazione. Basta osservare che in virtù della bilinearità del prodotto scalare

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j K(x_i, x_j) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle a_i \phi(x_i), a_j \phi(x_j) \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n a_i \phi(x_i), \sum_{j=1}^n a_j \phi(x_j) \right\rangle_{\mathcal{H}} = \left\| \sum_{i=1}^n a_i \phi(x_i) \right\|_{\mathcal{H}}^2 \geq 0. \end{aligned}$$

□

Un concetto fondamentale é quello di *Reproducing Kernel*, introdotto da Aronszajn nel 1950.

Definizione 1.6. Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert di funzioni reali definite su un insieme non vuoto X . Una funzione $K : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ è detto un *reproducing kernel* di $\mathcal{H}$ (e $\mathcal{H}$ un *reproducing kernel Hilbert space*) se K soddisfa:

- per ogni $x \in X$ si ha che $K(\cdot, x) = \langle \phi(\cdot), \phi(x) \rangle_{\mathcal{H}} \in \mathcal{H}$;
- per ogni $x \in X$ si ha che $\langle f, K(\cdot, x) \rangle_{\mathcal{H}} = f(x)$ (la *proprietà di riproduzione*).

In particolare, per qualsiasi $x, y \in X$ si ha che $K(x, y) = \langle K(\cdot, x), K(\cdot, y) \rangle_{\mathcal{H}}$.

La proprietà di riproduzione ha conseguenze interessanti per funzioni in uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$.

Definizione 1.7. La funzione $\Phi : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$, dove $\mathbb{U}$ e $\mathbb{V}$ sono spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ è un *operatore lineare* se

$$\Phi(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 \Phi(f_1) + \alpha_2 \Phi(f_2),$$

per ogni $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \forall f_1, f_2 \in \mathbb{U}$.

Se $\mathbb{V} = \mathbb{R}$ un operatore lineare è detto *funzionale*.

Definizione 1.8. La *norma operatoriale* di un operatore lineare $\Phi : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ è definita come

$$\|\Phi\| := \sup_{f \in \mathbb{U}} \frac{\|\Phi(f)\|_{\mathbb{V}}}{\|f\|_{\mathbb{U}}}.$$

Φ è detto *limitato* se $\|\Phi\| < \infty$.

Definizione 1.9. Sia $\mathcal{H} = L^2(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty\}$ per un insieme non vuoto X . Dato un elemento $x \in X$, un *funzionale di Dirac in x* è un funzionale $\delta_x : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f(x)$ tale che $\delta_x(f) = f(x)$.

Osservazione 1.1. Questa definizione si può estendere anche ad un generico spazio di Hilbert. In tal caso il funzionale viene detto *di valutazione*.

Applicando:

Teorema 1.1 (rappresentazione di Riesz). *Se Φ è un funzionale limitato su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, allora esiste un unico $h \in \mathcal{H}$ tale che $\Phi(f) = \langle f, h \rangle_{\mathcal{H}}$ per ogni $f \in \mathcal{H}$.*

otteniamo che per ogni funzionale δ_x esiste un unico $K_x \in \mathcal{H}$ tale che $\delta_x(f) = f(x) = \langle f, K_x \rangle_{\mathcal{H}}$. Possiamo ora formulare una nuova definizione di RKHS.

Definizione 1.10. Uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ è un *reproducing kernel Hilbert space* se per ogni $x \in X$ il funzionale ad esso associato è limitato, cioè esiste una costante $\lambda_x \geq 0$ tale che per ogni $f \in \mathcal{H}$ si ha $|f(x)| = |\delta_x| \leq \lambda_x \|f\|_{\mathcal{H}}$.

Questa definizione è equivalente alla precedente, infatti:

Teorema 1.2. *Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert di funzioni reali sull'insieme X . Allora i funzionali δ_x sono limitati e continui se e solo se $\mathcal{H}$ ha un reproducing kernel.*

Dimostrazione. Se $\mathcal{H}$ è un RKHS allora

$$\begin{aligned} |\delta_x(f)| &= |f(x)| = |\langle f, K(\cdot, x) \rangle_{\mathcal{H}}| \leq \|K(\cdot, x)\|_{\mathcal{H}} \|f\|_{\mathcal{H}} \\ &= \sqrt{\langle K(\cdot, x), K(\cdot, x) \rangle_{\mathcal{H}}} \|f\|_{\mathcal{H}} = \sqrt{K(x, x)} \|f\|_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

e quindi $\delta_x : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ è un operatore lineare limitato, dove $\lambda_x = \sqrt{K(x, x)}$.

Viceversa supponiamo che $\delta_x : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ sia un funzionale limitato. Il teorema di rappresentazione di Riesz implica che esiste una funzione $f_{\delta_x} \in \mathcal{H}$ tale che $\delta_x(f) = \langle f, f_{\delta_x} \rangle_{\mathcal{H}}$ per ogni $f \in \mathcal{H}$. Poniamo $K(x', x) := f_{\delta_x}(x')$ per ogni $x, x' \in X$. Poiché

$$K(\cdot, x) = f_{\delta_x} \quad e \quad \langle f, K(\cdot, x) \rangle_{\mathcal{H}} = \delta_x(f) = f(x)$$

K è un reproducing kernel per $\mathcal{H}$. □

Studiamo ora alcune proprietà utili dei reproducing kernel.

Proposizione 1.3. *Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert di funzioni $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ con reproducing kernel K . Allora:*

1. $K(x, y) = \langle K(\cdot, x), K(\cdot, y) \rangle_{\mathcal{H}}$ per $x, y \in X$,
2. $K(x, y) = K(y, x)$ per $x, y \in X$,

3. se $f, f_n \in \mathcal{H}$, $n \in \mathbb{N}$ sono tali che f_n converge ad f in $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, allora f_n converge anche puntualmente ad f .

Dimostrazione.

1. segue dalla proprietà di riproduzione.
2. è conseguenza del punto precedente e della simmetria del prodotto interno.
3. dati $f, f_n \in \mathcal{H}$, $n \in \mathbb{N}$ tali che $\|f - f_n\|_{\mathcal{H}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, abbiamo:

$$|f_n(x) - f(x)| = |\langle f_n - f, K(\cdot, x) \rangle_{\mathcal{H}}| \leq \|f - f_n\|_{\mathcal{H}} \|K(\cdot, x)\|_{\mathcal{H}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

□

Per completare il discorso enunciamo un teorema fondamentale di questa teoria:

Teorema 1.3 (Moore-Aronszajn). *Ogni kernel semidefinito positivo è associato ad un unico RKHS.*

Concludiamo questa parte con degli esempi:

Esempio 1.2. L'RKHS più semplice è dato dal già citato spazio delle funzioni quadrato-integrabili $L^2(X, \mu)$ dove X è un insieme e μ è la misura che conta i punti. Per un punto $x \in X$ il reproducing kernel è la sua funzione indicatrice $\chi_{\{x\}}(x)$.

Bisogna osservare inoltre che non tutti i kernel sono reproducing kernel:

Esempio 1.3. Sia $X = \mathbb{R}^2$ e sia $K(x, y) = \langle x, y \rangle^2$. Possiamo riscrivere tale kernel come

$$K(x, y) = x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 + 2x_1 x_2 y_1 y_2 = \left\langle \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \sqrt{2}x_1 x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1^2 \\ y_2^2 \\ \sqrt{2}y_1 y_2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

con $\phi(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \sqrt{2}x_1 x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{H} = \mathbb{R}^3$. Vale anche la seguente riscrittura:

$$K(x, y) = x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 + 2x_1 x_2 y_1 y_2 = \left\langle \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_1 x_2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1^2 \\ y_2^2 \\ y_1 y_2 \\ y_1 y_2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\text{con } \tilde{\phi}(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_1 x_2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{H} = \mathbb{R}^4.$$

Lo stesso kernel è associato a due diversi spazi di Hilbert, dunque non può essere un reproducing kernel, in virtù del teorema di Moore-Aronszajn.

1.2 Teoria della misura

Facciamo dei brevi richiami di Teoria della misura, utilizzando le definizioni presenti in [3].

Definizione 1.11. Sia X un insieme non vuoto. Un'algebra $\mathcal{A}$ di insiemi su X è un sottoinsieme di parti di X , ovvero $\mathcal{P}(X)$, tale che

- se $A, B \in \mathcal{A}$ allora $A \cup B \in \mathcal{A}$;
- se $A \in \mathcal{A}$ allora il suo complementare $\bar{A} \in \mathcal{A}$.

Una σ -algebra è un'algebra che è chiusa per unioni numerabili di insiemi, ovvero se $A_i \in \mathcal{A}$ per $i = 1, 2, \dots$ implica che $\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.

Alternativamente, un'algebra è una σ -algebra se è chiusa rispetto ad intersezioni finite di insiemi.

Definizione 1.12. Se X è uno spazio metrico (o più in generale uno spazio topologico) la σ -algebra generata dalla famiglia degli insiemi aperti in X (o equivalentemente dalla famiglia dei chiusi di X) è detta σ -algebra di Borel o dei Boreliani.

Definizione 1.13. Sia X un insieme dotato di σ -algebra $\mathcal{M}$. Una misura su $\mathcal{M}$ (o su $(X, \mathcal{M})$, o su X se $\mathcal{M}$ è noto) è una funzione $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ tale che:

- i) $\mu(\emptyset) = 0$,
- ii) se $\{E_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ è una successione di insiemi a due a due disgiunti in $\mathcal{M}$, allora $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$. (proprietà di σ -additività)

Inoltre $(X, \mathcal{M})$ si dice *spazio misurabile* e gli insiemi in $\mathcal{M}$ sono detti *insiemi misurabili*. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ è invece detto *spazio con misura*.

Infine:

Definizione 1.14. Una misura su uno spazio misurabile $(X, \mathcal{M})$ μ si dice *finita* se $\mu(X) < +\infty$, *σ -finita* se X è unione numerabile di insiemi misurabili di misura finita: $X = \bigcup_n A_n$, dove $A_n \in \mathcal{M}$ e $\mu(A_n) < +\infty$.

1.3 Geometria differenziale

Terminiamo questo capitolo con brevi accenni alla Geometria differenziale, tratti dall'*Encyclopedia of Mathematics*.

Definizione 1.15. Un insieme $M \subset \mathbb{R}^n$ è una *sottovarietà differenziabile* di $\mathbb{R}^n$ di classe C^k , $k \geq 1$, e di dimensione d , con $1 \leq d \leq n - 1$, se per ogni $x \in M$ esistono $\delta > 0$ ed $f \in C^k(B_\delta(x); \mathbb{R}^{n-d})$ tali che:

- i) $B_\delta(x) \cap M = \{x \in B_\delta(x) : f(x) = 0\}$
- ii) $rk(J_f(x)) = n - d$ in ogni punto $x \in B_\delta(x)$, dove J_f è la matrice Jacobiana di f .

Definizione 1.16. Una *metrica riemanniana* è una funzione distanza indotta da una forma quadratica definita positiva.

Definizione 1.17. Una *varietà riemanniana* è una sottovarietà differenziabile dotata di metrica riemanniana.

L'introduzione delle varietà riemanniane non è casuale: gli spazi di Hilbert sono dotati per definizione di un prodotto scalare, ossia di una forma quadratica definita positiva. Ciò ci permette di estendere le conclusioni del nostro studio ad un contesto più generale di quello degli spazi normati.

Capitolo 2

Su un metodo Kernel

2.1 Introduzione

Sia $\mathcal{H}$ un RKHS infinito dimensionale dotato di prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} = \int_X f(x)g(x) d\mu(x) \quad f, g \in \mathcal{H}$$

dove X è una varietà riemanniana compatta e μ è una misura di Borel σ -finita su X .

In [10] gli autori si propongono di approssimare una data funzione continua $f \in \mathcal{H}$ rispetto alla norma uniforme $\|\cdot\|_{\infty}$ e non alla norma indotta dal prodotto scalare $\|\cdot\|_{\mathcal{H}} = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}}$. Esponiamo di seguito l'approccio utilizzato.

A tal proposito, assumiamo che

1. esista una successione di sottospazi di $\mathcal{H}$ di dimensione finita

$$\{0\} \neq \mathcal{H}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{H}_n \subset \mathcal{H}_{n+1} \subset \cdots \subset \mathcal{H}, \text{ con } \dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{H}_n) = d_n$$

tali che se

$$\phi \in \mathcal{H}_r, \psi \in \mathcal{H}_s \text{ allora } \phi \cdot \psi \in \mathcal{H}_{r+s}, \text{ per ogni } r, s \in \mathbb{N}; \quad (2.1)$$

2. la funzione $f \in \mathcal{H}$ può essere approssimata uniformemente nei sottospazi appena introdotti con la precisione desiderata. Per i nostri scopi, assumiamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(f) = 0 \quad (2.2)$$

dove

$$E_n(f) := \inf_{g \in \mathcal{H}_n} \|f - g\|_{\infty} < +\infty, \quad \|f\|_{\infty} := \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Si osservi che gli $\mathcal{H}_n$ che soddisfano (2.1) possono essere, ad esempio, gli spazi $\mathbb{P}_n(X)$ dei polinomi su X di grado totale n o, più in generale, spazi finito dimensionali le cui funzioni che compongono la base soddisfano (2.2).

Inoltre, (2.1) è soddisfatta, per esempio, dalle funzioni continue sul compatto X mentre (2.2) vale, in un contesto polinomiale, per il teorema di Weierstrass per l'approssimazione uniforme di funzioni continue.

Sotto le precedenti ipotesi, il nostro obiettivo è cercare una successione $P_n f$, $n \in \mathbb{N}$, che approssimi f e tale che

- sia calcolabile utilizzando degli algoritmi che siano sia veloci che stabili;
- non appartenga necessariamente ad $\mathcal{H}_n$, ma converga ad f alla stessa velocità dell'errore di miglior approssimazione di f in $\mathcal{H}_n$, ossia di $E_n(f)$.

In questo contesto classiche approssimazioni sono fornite dalle proiezioni ortogonali di f negli spazi $\mathcal{H}_n$

$$S_n f(x) := \langle f, K_n(x, \cdot) \rangle_{\mathcal{H}}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.3)$$

dove $K_n(x, \cdot)$ è il reproducing kernel di $\mathcal{H}_n$ rispetto al prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$.

Supponiamo di avere a disposizione un insieme di dati del tipo

$X_N = \{(\xi_j, f(\xi_j))\}_{j=1, \dots, N}$ ove i nodi $\{\xi_j\}_{j=1, \dots, N}$ sono tali che, per certi $\lambda_j > 0$

$$\langle \phi, \psi \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{j=1}^N \lambda_j \phi(\xi_j) \psi(\xi_j), \quad \text{per ogni } \phi, \psi \in \mathcal{H}_n \quad (2.4)$$

dove $N = N(n) \geq d_n$ dipende da n . Applicando (2.4) a (2.3), si possono definire le seguenti proiezioni di f in $\mathcal{H}_n$

$$L_n f(x) := \sum_{j=1}^N f(\xi_j) \ell_{j,n}(x), \quad \text{con } \ell_{j,n}(x) = \lambda_j K_n(x, \xi_j), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.5)$$

Più in dettaglio, dalla proprietà di riproduzione e dalla simmetria dei reproducing kernel segue che $S_n f = f$. Poiché $S_n f$ e $K_n(x, \cdot)$ appartengono a $\mathcal{H}_n$ abbiamo

$$\begin{aligned} S_n f(x) &= \langle S_n f, K_n(x, \cdot) \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{j=1}^N \lambda_j S_n f(\xi_j) K_n(x, \xi_j) \\ &\approx \sum_{j=1}^N \lambda_j f(\xi_j) K_n(x, \xi_j) = L_n f(x). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Se $f \in \mathcal{H}_n$, essendo $S_n f = f$, ricaviamo che, poiché $\mathcal{H}_n$ è un sottospazio di $\mathcal{H}$, $L_n(f) = f$, ossia che l'operatore lineare L_n coincide con l'identità in $\mathcal{H}_n$.

Si osservi che per determinare le quantità $L_n f$ si chiedono esclusivamente le valutazioni di f sui nodi di quadratura, e non il calcolo di certi integrali definiti.

Nota 2.1. *Per comprendere quanto sopra, consideriamo il caso in cui $\mathcal{H}$ contenga lo spazio $\mathcal{H}_n = \mathbb{P}_n(\Omega)$ dei polinomi di grado totale n su Ω , per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Se $\mathbb{P}_n$ dispone di una base ortonormale $\{\phi_k\}_{k=1, \dots, d_n}$ (rispetto a una certa funzione peso ω) allora

$$K_n(x, y) = \sum_{k=1}^{d_n} \phi_k(x) \phi_k(y)$$

è un reproducing kernel per $\mathcal{H}_n = \mathbb{P}_n(\Omega)$. Se $\{\xi_j\}_{j=1, \dots, N}$, $\{\lambda_j\}_{j=1, \dots, N}$ sono i nodi e i pesi di una formula di quadratura che calcola esattamente $\langle \phi, \psi \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \phi, \psi \rangle_{\mathcal{H}_n}$ per $\phi, \psi \in \mathcal{H}_n$ (tale uguaglianza segue dal fatto che $\mathcal{H}_n$ è un sottospazio di $\mathcal{H}$) allora

$$\begin{aligned} L_n f(x) &= \sum_{j=1}^N f(\xi_j) \lambda_j K_n(x, \xi_j) \\ &= \sum_{j=1}^N f(\xi_j) \lambda_j \sum_{k=1}^{d_n} \phi_k(x) \phi_k(\xi_j) \\ &= \sum_{k=1}^{d_n} \left(\sum_{j=1}^N \lambda_j f(\xi_j) \phi_k(\xi_j) \right) \phi_k(x) \end{aligned} \tag{2.7}$$

ovvero la classica iperinterpolazione polinomiale a grado n .

In alcuni casi (quando $N = d_n$) tale formula interpola la funzione nei nodi di quadratura, ossia $L_n f(\xi_j) = f(\xi_j)$ vale per $j = 1, \dots, N$. In particolar modo nel caso multivariato è più comune invece imbattersi nel caso $N > d_n$ e in questo caso l'approssimante $L_n f$ è detta *iperinterpolante* di f per sottolineare che richiede di conoscere il valore della funzione in un numero di nodi maggiore della dimensione dello spazio a cui appartiene.

I comportamenti delle precedenti approssimazioni sono stimati dalla costante di Lebesgue associata, ovvero

$$\Lambda_n := \sup_{f \neq 0} \frac{\|\mathcal{L}_n f\|_{\infty}}{\|f\|_{\infty}}$$

con $\mathcal{L}_n = S_n$ oppure $\mathcal{L}_n = L_n$.

In particolare si ha

$$E_n(f) \leq \|f - P_n f\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n) E_n(f) \quad (2.8)$$

Di conseguenza si hanno problemi nel caso in cui la costante di Lebesgue tenda ad ∞ per $n \rightarrow \infty$. In tal caso, la convergenza dei metodi è assicurata qualora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n \cdot E_n(f) = 0. \quad (2.9)$$

Però, anche se (2.9) vale e la convergenza, generalmente più lenta, è garantita nella teoria, nella pratica costanti di Lebesgue troppo grandi rendono l'approssimante instabile per via del malcondizionamento.

Nel corso del tempo, per ovviare a tali criticità, sono state apportate modifiche ad S_n ed L_n , come le iperinterpolazioni filtrate. Questo approccio, però, richiede particolare attenzione nella scelta della funzione filtro, che spesso è causa della scomparsa delle proprietà di interpolazione, se presenti. Inoltre, le stime della costante di Lebesgue associate sono spesso molto tecniche, variano da caso a caso e dipendono da costanti difficili da calcolare.

In seguito studieremo un molto più semplice approccio ed introdurremo delle approssimazioni lineari di f , sia nel caso discreto che in quello continuo. Esse sono definite similmente ad $S_n f$ e $L_n f$, ma con una nuova funzione kernel. Tale kernel e le risultanti approssimazioni hanno la proprietà di dipendere, oltre che da n , anche da un parametro libero intero $0 < m < n$. Tale parametro può essere opportunamente modificato in modo da migliorare ulteriormente la stima dell'errore ma senza richiedere nuovi valori iniziali. Inoltre, nel caso discreto, per ogni scelta di m la nuova approssimazione interpola f nell'insieme X_N descritto in precedenza, se lo stesso vale per $L_n f$.

2.2 Il metodo kernel

Sotto le ipotesi del capitolo precedente, per tutte le coppie di interi positivi $m < n$ definiamo la seguente funzione kernel:

Definizione 2.1. Dati $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, definiamo

$$v_n^m(x, y) := \frac{K_n(x, y) K_m(x, y)}{K_m(x, x)}, \quad x, y \in X$$

dove K_n e K_m sono i reproducing kernel di $\mathcal{H}_n$ e $\mathcal{H}_m$ rispettivamente.

Osserviamo che tale funzione è ben definita poiché $K_m(x, x) > 0$, per ogni $m \in \mathbb{N}$, $x \in X$. Infatti, dalla proprietà di riproduzione, si ha

$$K_m(x, x) = \langle K_m(x, \cdot), K_m(x, \cdot) \rangle_{\mathcal{H}} = \|K_m(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}}^2 \geq 0.$$

Dunque, se fosse $K_m(x, x) = 0$ sarebbe pure $\|K_m(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}} = 0$ e quindi $K_m(x, \cdot) = 0$ per ogni $x \in X$, da cui otteniamo $\mathcal{H}_m = \{0\}$, in contraddizione col fatto che i sottoinsiemi $\mathcal{H}_n$ sono di dimensione finita non nulla. Osserviamo inoltre che il kernel v_n^m può essere facilmente calcolato se si conoscono i reproducing kernel K_m e K_n : a questo scopo ricordiamo che se $\{\phi_{j,n}\}_{j=1,\dots,d_n}$ è una base ortonormale di $\mathcal{H}_n$, allora abbiamo

$$K_n(x, y) = \langle K_n(\cdot, x), K_n(\cdot, y) \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{j=1}^{d_n} \phi_{j,n}(x) \phi_{j,n}(y), \text{ per ogni } x, y \in X, n \in \mathbb{N}.$$

In generale, v_n^m non è un operatore simmetrico: infatti, considerato come funzione della variabile y , applicando (2.1) abbiamo che $v_{n,x}^m(y) \in \mathcal{H}_{n+m}$, poiché $K_m(x, x)$ è costante rispetto ad y , ma considerato come funzione della variabile x $v_{n,y}^m(x) \notin \mathcal{H}_r$ in generale, per qualsiasi $r \in \mathbb{N}$.

Definizione 2.2. Per ogni coppia di numeri interi $0 < m < n$ definiamo l'operatore

$$\mathcal{V}_n^m f(x) := \langle f, v_n^m(x, \cdot) \rangle_{\mathcal{H}} = \int_X f(y) v_n^m(x, y) d\mu(y), \quad x \in X \quad (2.10)$$

e, supponendo di conoscere un insieme di punti $\{(\xi_j, f(\xi_j)) : j = 1, \dots, N\}$ ed applicando (2.4), possiamo anche definire la versione discreta:

$$\begin{aligned} V_n^m f(x) &:= \langle f(\cdot), v_n^m(x, \cdot) \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{j=1}^N \lambda_j f(\xi_j) v_n^m(x, \xi_j) = \sum_{j=1}^N f(\xi_j) \phi_{j,n}^m(x) \\ \phi_{j,n}^m(x) &:= \lambda_j v_n^m(x, \xi_j), \quad x \in X. \end{aligned} \quad (2.11)$$

In generale tali approssimanti non appartengono ad alcuno degli spazi Hilbertiani introdotti ma, restringendoci al caso $f \in \mathcal{H}_{n-m}$, si ottiene che:

Teorema 2.1. Per tutte le coppie di interi $0 < m < n$ vale

$$\mathcal{V}_n^m f = V_n^m f = f, \text{ per ogni } f \in \mathcal{H}_{n-m}, \quad (2.12)$$

Dimostrazione. Fissiamo $f \in \mathcal{H}_{n-m}$ e $x \in X$. Da (2.1) ricaviamo che $fK_m(x, \cdot) \in \mathcal{H}_n$. Dunque, sfruttando la proprietà di riproduzione di K_n , otteniamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_n^m f(x) &= \langle f, v_n^m(x, \cdot) \rangle_{\mathcal{H}} = \int_X f(y) \frac{K_m(x, y) K_n(x, y)}{K_m(x, x)} d\mu(y) = \\ &= \frac{1}{K_m(x, x)} \langle fK_m(x, \cdot), K_n(x, \cdot) \rangle_{\mathcal{H}} = \frac{1}{K_m(x, x)} f(x) K_m(x, x) = f(x). \end{aligned}$$

Inoltre da (2.4) abbiamo:

$$V_n^m f(x) = \sum_{j=1}^N \lambda_j f(\xi_j) \frac{K_n(x, \xi_j) K_m(x, \xi_j)}{K_m(x, x)} = \frac{1}{K_m(x, x)} \langle fK_m(x, \cdot), K_n(x, \cdot) \rangle_{\mathcal{H}} = f(x)$$

□

In quanto operatori lineari, ci aspettiamo che delle indicazioni affidabili sul condizionamento e sulla convergenza di $P_n^m \in \{\mathcal{V}_n^m, V_n^m\}$ ci vengano date considerandone la norma operatoriale $\|P_n^m\| := \sup_{f \neq 0} \frac{\|P_n^m f\|_{\infty}}{\|f\|_{\infty}}$, anche detta *costante di Lebesgue*. Con questo proposito, diamo una formula per tale costante, sia nel caso discreto che in quello continuo:

Teorema 2.2. *Per tutti gli interi $0 < m < n$, le costanti di Lebesgue degli operatori (2.10) e (2.11) sono date da*

$$\|\mathcal{V}_n^m\| = \sup_{x \in X} \int_X |v_n^m(x, y)| d\mu(y) \quad e \quad \|V_n^m\| = \sup_{x \in X} L_n^m(x), \quad (2.13)$$

dove $L_n^m(x) := \sum_{j=1}^N |\phi_{j,n}^m(x)|$ è detta funzione di Lebesgue.

Dimostrazione. Dimostriamo la proposizione per V_n^m , il caso di $\mathcal{V}_n^m$ è del tutto analogo. Sia $s := \sup_{x \in X} L_n^m(x)$ e consideriamo un arbitrario $f \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ che soddisfa $\|f\|_{\infty} < +\infty$. Ora:

$$|V_n^m f(x)| = \left| \sum_{j=1}^N f(\xi_j) \phi_{j,n}^m(x) \right| \leq \|f\|_{\infty} \sum_{j=1}^N |\phi_{j,n}^m(x)| = \|f\|_{\infty} L_n^m(x)$$

e prendendo il $\sup_{x \in X}$ in entrambi i membri concludiamo che $s \geq \frac{\|V_n^m f\|_{\infty}}{\|f\|_{\infty}}$.

Mostriamo ora che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione f_{ε} tale che $\frac{\|V_n^m f_{\varepsilon}\|_{\infty}}{\|f_{\varepsilon}\|_{\infty}} \geq s - \varepsilon$.

Dalla definizione di estremo superiore si osserva che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x_0 \in X$ tale che $L_n^m(x_0) \geq s - \frac{\varepsilon}{2}$. Dunque, definita

$$f_\varepsilon(x) := \frac{Mv_n^m(x_0, y)}{\varepsilon/2 + M|v_n^m(x_0, y)|}, \quad M := \sum_{j=1}^N \lambda_j, \quad x \in X$$

abbiamo che $\|f_\varepsilon\|_\infty \leq 1$ e

$$\begin{aligned} \frac{\|V_n^m f_\varepsilon\|_\infty}{\|f_\varepsilon\|_\infty} &\geq |V_n^m f_\varepsilon(x_0)| = \left| \sum_{j=1}^N f_\varepsilon(\xi_j) \lambda_j v_n^m(x_0, \xi_j) \right| = \\ &\sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{Mv_n^m(x_0, \xi_j)}{\frac{\varepsilon}{2} + M|v_n^m(x_0, \xi_j)|} \frac{1}{M} \cdot Mv_n^m(x_0, \xi_j) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N \lambda_j \frac{[Mv_n^m(x_0, \xi_j)]^2}{\frac{\varepsilon}{2} + M|v_n^m(x_0, \xi_j)|} \geq \\ &\frac{1}{M} \sum_{j=1}^N \lambda_j \frac{[Mv_n^m(x_0, \xi_j)]^2 - (\frac{\varepsilon}{2})^2}{\frac{\varepsilon}{2} + M|v_n^m(x_0, \xi_j)|} = \sum_{j=1}^N \lambda_j |v_n^m(x_0, \xi_j)| - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N \lambda_j \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \\ &L_n^m(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} \geq s - \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Una stima per le costanti di Lebesgue (2.13) è data da

$$\Lambda_n^m(x) := \sqrt{\frac{K_n(x, x)}{K_m(x, x)}}, \quad x \in X$$

come mostrato dal seguente:

Teorema 2.3. *Per ogni coppia di interi $0 < m < n$, sia $P_n^m \in \{\mathcal{V}_n^m, V_n^m\}$. Allora $\|P_n^m\| \leq \|\Lambda_n^m\|_\infty$. In particolare*

$$|P_n^m f(x)| \leq \|f\|_\infty \Lambda_n^m(x), \quad \text{per ogni } x \in X, f \in \mathcal{H}. \quad (2.14)$$

Dimostrazione. Nel caso in cui $P_n^m = \mathcal{V}_n^m$, dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwartz e dalla proprietà di riproduzione di K_m e K_n si ha:

$$\begin{aligned} |\mathcal{V}_n^m f(x)| &= \left| \int_X f(y) \frac{K_n(x, y) K_m(x, y)}{K_m(x, x)} d\mu(y) \right| \leq \frac{\|f\|_\infty}{K_m(x, x)} \int_X |K_n(x, y) K_m(x, y)| d\mu(y) \\ &\leq \frac{\|f\|_\infty}{K_m(x, x)} \left(\int_X K_n^2(x, y) d\mu(y) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_X K_m^2(x, y) d\mu(y) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\|f\|_\infty}{K_m(x, x)} \sqrt{K_n(x, x)} \sqrt{K_m(x, x)} = \|f\|_\infty \cdot \Lambda_n^m(x). \end{aligned}$$

Analogamente nel caso $P_n^m = V_n^m$ dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwartz e (2.4):

$$\begin{aligned}
|V_n^m f(x)| &= \left| \sum_{j=1}^N \lambda_j f(\xi_j) \frac{K_n(x, \xi_j) K_m(x, \xi_j)}{K_m(x, x)} \right| \leq \frac{\|f\|_\infty}{K_m(x, x)} \sum_{j=1}^N \lambda_j |K_n(x, \xi_j) K_m(x, \xi_j)| \\
&\leq \frac{\|f\|_\infty}{K_m(x, x)} \left(\sum_{j=1}^N \lambda_j K_n^2(x, \xi_j) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^N \lambda_j K_m^2(x, \xi_j) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\|f\|_\infty}{K_m(x, x)} \left(\int_X K_n^2(x, y) d\mu(y) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_X K_m^2(x, y) d\mu(y) \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_\infty \Lambda_n^m(x).
\end{aligned}$$

□

La funzione $\Lambda_n^m(x)$ è anche fattore di amplificazione della stima dell'errore di approssimazione sotto l'ipotesi che l'interpolante appartenga a $\mathcal{H}_{n-m}$, nei termini espressi dal:

Teorema 2.4. *Per tutti gli interi positivi $0 < m < n$ e per un'arbitraria $f \in \mathcal{H}$ tale che $\|f\|_\infty < +\infty$, sia $P_n^m f \in \{\mathcal{V}_n^m f, V_n^m f\}$. Si ha*

$$|f(x) - P_n^m f(x)| \leq [1 + \Lambda_n^m(x)] E_{n-m}(f), \quad (2.15)$$

per ogni $x \in X$.

Dimostrazione. Per tutti i $g \in \mathcal{H}_{n-m}$, dal Teorema 2.1 e dal Teorema 2.3 si ha

$$\begin{aligned}
|f(x) - P_n^m f(x)| &= |f(x) - g(x) + g(x) - P_n^m f(x)| \leq \\
|f(x) - g(x)| + |P_n^m(g - f)(x)| &\leq \|f - g\|_\infty [1 + \Lambda_n^m(x)]
\end{aligned}$$

da cui segue la tesi considerando quale g l'elemento di migliore approssimazione di f in $\mathcal{H}_{n-m}$. □

I risultati esposti in questo capitolo sottolineano il ruolo fondamentale della funzione Λ_n^m sia nel condizionamento che nella convergenza delle approssimazioni $V_n^m f$ e $\mathcal{V}_n^m f$. Per soddisfare gli obiettivi che ci siamo fissati nell'Introduzione, dev'essere che $\|\Lambda_n^m\|_\infty$ sia uniformemente limitata rispetto ad n ed m (ossia $|\Lambda_n^m(x)| \leq c, \exists c > 0 \forall m, n$), quanto meno per opportuni valori di m : infatti in questo caso il Teorema 2.3 ci assicura che sia $V_n^m f$ che $\mathcal{V}_n^m f$ sono ben-condizionate con relative costanti di Lebesgue uniformemente limitate (poiché lo è $\Lambda_n^m(x)$).

Inoltre per tutte le coppie $m, n \in \mathbb{N}$ che soddisfano

$$1 < c_1 \leq \frac{n}{m} \leq c_2$$

con $c_2 \geq c_1 > 1$ indipendenti da m, n , osserviamo che $n \sim m \sim (n - m)$. Dunque, dal Teorema 2.4, se $\Lambda_n^m(x)$ è uniformemente limitato e la condizione precedente è soddisfatta, allora si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n^m f - f\|_\infty = 0$, per ogni $f \in \mathcal{H}$ che soddisfa (2.2), con una velocità di convergenza paragonabile ad $E_n(f)$. In particolare, sotto queste ipotesi, per $n \rightarrow \infty$ otteniamo

$$E_n(f) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^r}\right) \implies \|P_n^m f - f\|_\infty = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^r}\right),$$

per ogni $r > 0$.

Nell'ultimo capitolo mostreremo alcuni esempi in cui $\Lambda_n^m(x)$ è uniformemente limitato. Concludiamo la trattazione teorica con la seguente proprietà interpolatoria per l'operatore discreto $V_n^m f$:

Teorema 2.5. *Sia $n \in \mathbb{N}$. Se vale (2.1) con $N = d_n = \dim(\mathcal{H}_n)$ allora, per ogni $m \in \mathbb{N}$ con $m < n$, si ha*

$$V_n^m f(\xi_i) = f(\xi_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

per ogni $f \in \mathcal{H}$.

Dimostrazione. Sia $K_n(x, y) = \sum_{j=1}^{d_n} b_j(x)b_j(y)$ dove $\{b_j(x) : j = 1, \dots, d_n\}$ è una base ortonormale di $\mathcal{H}_n$ rispetto al prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$, ovvero

$$\langle b_i, b_j \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{k=1}^N \lambda_k b_i(\xi_k) b_j(\xi_k) = \delta_{ij}.$$

Se consideriamo la matrice $Q = (Q_{ij})$ con $Q_{ij} := \sqrt{\lambda_i} b_j(\xi_i)$, per $i = 1, \dots, N$ e $j = 1, \dots, d_n$, allora le colonne di Q sono ortogonali. Inoltre $N = d_n$ implica che Q è una matrice quadrata. Dunque anche le sue righe sono ortogonali. Ora

$$K_n(\xi_i, \xi_j) = \sum_{k=1}^N b_k(\xi_i) b_k(\xi_j) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} \cdot \sqrt{\lambda_i} b_k(\xi_i) \sqrt{\lambda_j} b_k(\xi_j) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} \sum_{k=1}^N Q_{ik} Q_{jk}$$

che è il prodotto della riga i per la riga j .

Essendo le righe di Q ortogonali, si ha $K_n(\xi_i, \xi_j) = \frac{\delta_{ij}}{\lambda_i}$ per tutti gli $i, j = 1, \dots, N$, il che implica che

$$\phi_{j,n}^m(\xi_i) = \lambda_j \frac{K_m(\xi_i, \xi_j) K_n(\xi_i, \xi_j)}{K_m(\xi_i, \xi_i)} = \lambda_j K_n(\xi_i, \xi_j) = \lambda_j \frac{\delta_{ij}}{\lambda_i} = \delta_{ij}$$

da cui

$$V_n^m f(\xi_i) = \sum_{j=1}^N f(\xi_j) \phi_{j,n}^m(\xi_i) = \sum_{j=1}^N f(\xi_j) \cdot \delta_{ij} = f(\xi_i).$$

□

Capitolo 3

Esperimenti numerici

In questa sezione desideriamo effettuare degli esperimenti numerici che permettano di stabilire le qualità del metodo introdotto.

In [10], gli autori hanno sviluppato degli esperimenti su ipercubi $[-1, 1]^d$, considerando le misure di Jacobi $d\mu(x) = w^{\alpha, \beta}(x)dx$ dove

$$w^{\alpha, \beta}(x) = \prod_{j=1}^d (1-x)^\alpha (1+x)^\beta, \quad x = (x_1, \dots, x_d), \quad \alpha, \beta > -1.$$

In particolare viene considerato il caso $\mathcal{H}_n = \otimes_{i=1}^d \mathcal{P}_{n-1}$ ovvero lo spazio dei polinomi di grado al più $n-1$ in ogni variabile.

In questo caso specifico gli autori hanno mostrato che per $P_n^m = \mathcal{V}_n^m$ oppure $P_n^m = V_n^m$, si ha

$$\|P_n^m\|_\infty \leq C \left(\frac{n}{m}\right)^{d(1+\max \alpha, \beta)}$$

con $C > 0$, indipendente da m e n . Questo fatto è molto importante dal punto di vista teorico. Se al crescere di n si utilizzano operatori P_n^m in cui il rapporto n/m è limitato, ad esempio per $m = \lceil n/2 \rceil$, la costante di Lebesgue risulta uniformemente limitata.

Questo spinge a credere che debba essere quindi $m \approx n$, con il vincolo che $m < n$, al fine di tenere la costante di Lebesgue particolarmente piccola. Bisogna però tenere conto di un fatto: visto che

$$P_n^m f = f \quad \text{per ogni } f \in \mathcal{H}_{n-m},$$

qualora $m \approx n$ e $m < n$ si ha che lo spazio $\mathcal{H}_{n-m}$ risulta particolarmente piccolo e l'approssimazione di f avrà un errore di migliore approssimazione $E_{n-m}(f)$ potenzialmente grande.

Di seguito in [10], eseguono esperimenti sul quadrato unitario $[-1, 1]^2$ con $\mathcal{H}_n$ spazio dei polinomi di grado totale $n - 1$, nel caso $d\mu(x) = w^{-1/2, -1/2}(x)dx$, utilizzando formule di quadratura basate sui Padua Points [8]. Dagli esperimenti si evince numericamente che la crescita della costante di Lebesgue dell'operatore V_n^m debba essere limitata qualora $m = \lceil n/2 \rceil$.

Per ampliare la famiglia di domini in cui gli esperimenti sono svolti, valuteremo la qualità del metodo introdotto in [10] per una famiglia più vasta di domini bivariati, verificando i risultati ottenuti su funzioni test con differente regolarità.

3.1 Discussione del codice utilizzato

I codici Matlab utilizzati sono stati inseriti in calce a questa tesi e i sorgenti forniti open-source sono reperibili su GitHub.

La parte più importante di questo lavoro é la valutazione dell'approssimante fornita dal metodo in un punto arbitrario.

A tal proposito abbiamo definito la routine `RRKeval` come segue

Nelle righe 8 e 9 il codice pone in

- `QnodesH` la matrice di Vandermonde di grado n relativamente a una base ortonormale $\{\phi_{j,n}\}_{j=1,\dots,d_n}$ del dominio X , valutata nei nodi $\{\mathbf{y}_i\}$, che sono immagazzinati nel vettore `nodes`, propri di una formula di quadratura avente grado di esattezza $2n$ e pesi corrispettivi $\{w_i\}$;
- `QptsH` fa altrettanto relativamente ai punti di valutazione $\{\mathbf{x}_i\}$, che sono immagazzinati nel vettore `pts`.

Di conseguenza, essendo $\mathbf{QnodesH}_{i,j} = \phi_{j,n}(\mathbf{y}_i)$ e $\mathbf{QptsH}_{i,j} = \phi_{j,n}(\mathbf{x}_i)$ abbiamo

$$\begin{aligned} K_n(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j) &= \sum_{k=1}^{d_n} \phi_{k,n}(\mathbf{x}_i) \phi_{k,n}(\mathbf{y}_j) = \sum_{k=1}^{d_n} \mathbf{QptsH}_{i,k} \cdot \mathbf{QnodesH}_{j,k} \\ &= \sum_{k=1}^{d_n} \mathbf{QptsH}_{i,k} \cdot \mathbf{QnodesH}_{k,j}^T = (\mathbf{QptsH} * \mathbf{QnodesH}^T)_{i,j} = \mathbf{KHpts}_{i,j} \end{aligned}$$

Essendo le corrispettive matrici di Vandermonde di grado m relativamente alla base $\{\phi_{j,m}\}_{j=1,\dots,d_m}$, rispettivamente nei punti di valutazione $\{\mathbf{x}_i\}$ e nei nodi $\{\mathbf{y}_i\}$, estraibili dalle prime d_m colonne delle precedenti, alla riga 16 le calcoliamo da `QnodesH`

e `QptsH`, immagazzinandole rispettivamente in `QnodesL` e `QptsL` per poi porre in $\text{KLpts}_{i,j} = (\text{QptsL} * \text{QnodesL}^T)_{i,j}$ il valore di $K_m(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j)$.

Di seguito, alla riga 22, si tiene conto che

$$\begin{aligned} K_m(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) &= \sum_{k=1}^{d_n} \phi_{k,m}(\mathbf{x}_i) \phi_{k,m}(\mathbf{x}_i) = \sum_{k=1}^{d_n} (\phi_{k,m}(\mathbf{x}_i))^2 \\ &= \sum_{k=1}^{d_n} \text{QptsL}_{i,k}^2. \end{aligned}$$

Tale quantità può essere quindi calcolata rapidamente come `sum(QptsL.^2,2)`.

Il codice termina alla riga 25, in cui si calcola $V_n^m f(x)$ come descritto in (2.11).

3.2 Esperimenti numerici sul disco unitario

Quale primo esempio abbiamo considerato quale X il disco unitario ovvero

$$X = \{(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \in \mathbb{R}^2, \quad r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

Come base ortonormale abbiamo considerato quella di Logan-Shepp [5], [11]. Nel dettaglio

$$\phi_{j,n}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} U_n \left(x \cos \left(\frac{j\pi}{n+1} \right) + y \sin \left(\frac{j\pi}{n+1} \right) \right), \quad j = 0, \dots, n,$$

dove U_n é il polinomio di Chebyshev di secondo tipo e grado n .

Ricordiamo che tali polinomi possono essere facilmente valutati per ricorrenza in quanto

$$\begin{aligned} U_0(x) &= 1 \\ U_1(x) &= 2x \\ U_2(x) &= 4x^2 - 1 \\ U_{n+1}(x) &= 2xU_n(x) - U_{n-1}(x), \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

Per quanto riguarda le formule di quadratura, abbiamo usato formule quasi minimali, ovvero che per un grado di esattezza fissato n , abbiano cardinalità minore possibile (tra quelle note in letteratura). Tali formule sono presenti alla pagina web [7], dove sono descritte in coordinate cartesiane, mediante un file Matlab.

n	$card$	n	$card$	n	$card$
1	1	11	28	27	137
2	3	12	36	29	155
3	4	13	36	33	199
4	6	14	44	37	247
5	7	15	44	39	273
6	12	16	55	41	295
7	12	17	55	45	361
8	16	18	72	49	425
9	19	19	72	53	487
10	28	25	117	65	733

Tabella 3.1: Formule quasi-minimali a grado n sul disco e loro cardinalità $card$.

Quali esperimenti numerici abbiamo considerato l'approssimazione di alcune funzione test, ovvero

$$\begin{aligned}
f_1(x, y) &= ((x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2)^{1/2} \\
f_2(x, y) &= ((x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2)^{3/2} \\
f_3(x, y) &= \exp(-(x^2 + y^2)) \\
f_4(x, y) &= (0.2x + 0.5y)^{10} \\
f_5(x, y) &= (0.2x + 0.5y)^{18}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Tali funzioni hanno regolarità crescente, ed in particolare f_3, f_4, f_5 sono analitiche.

Negli esperimenti numerici abbiamo considerato $n = 2, 4, 6, \dots, 20$ e formule di quadratura aventi grado $2n$. Abbiamo eseguito test con scelte di m che favoriscono il paragone sia con la classica iperinterpolazione $L_n f$ di Sloan [6], ovvero $m_1 = \lceil n/10 \rceil$, sia dei valori intermedi in cui $m_2 = \lceil n/2 \rceil$ per cui invece la costante di Lebesgue é migliore ma la stima d'errore dipende da $E_{n-m_2}(f) \geq E_{n-m_1}(f)$.

Nelle tabelle abbiamo calcolato per ogni operatore di proiezione P , stime numeriche dell'errore compiuto, ovvero

- $\text{AE}_\infty(P, f) := \|Pf - f\|_\infty$, l'errore assoluto in norma infinito,
- $\text{RE}_2(P, f) := \|Pf - f\|_2 / \|f\|_2$, l'errore relativo in norma due.

In particolare per stimare tali quantità abbiamo usato una formula di tipo quasi-minimale sul disco avente un grado di precisione 77 e 1021 nodi [12].

n	m_1	$\text{AE}_\infty(V_n^{m_1}, f)$	$\text{RE}_2(V_n^{m_1}, f)$	m_2	$\text{AE}_\infty(V_n^{m_2}, f)$	$\text{RE}_2(V_n^{m_2}, f)$	$\text{AE}_\infty(L_n, f)$	$\text{RE}_2(L_n, f)$
2	1	3.50e-01	8.98e-02	1	3.50e-01	8.98e-02	2.88e-01	7.14e-02
4	1	1.73e-01	2.60e-02	2	1.97e-01	3.26e-02	1.61e-01	2.38e-02
6	1	9.73e-02	1.13e-02	3	1.09e-01	1.19e-02	8.69e-02	1.24e-02
8	1	8.00e-02	6.81e-03	4	9.23e-02	8.52e-03	7.78e-02	6.81e-03
10	1	3.78e-02	4.23e-03	5	4.46e-02	4.29e-03	3.72e-02	4.83e-03
12	2	4.58e-02	3.07e-03	6	5.48e-02	3.53e-03	4.21e-02	3.29e-03
14	2	1.79e-02	2.21e-03	7	1.97e-02	1.93e-03	1.95e-02	2.89e-03
16	2	2.00e-02	1.76e-03	8	2.41e-02	1.48e-03	1.75e-02	2.14e-03
18	2	2.79e-02	1.50e-03	9	3.37e-02	1.87e-03	2.73e-02	1.53e-03
20	2	1.88e-02	1.15e-03	10	2.32e-02	1.34e-03	1.77e-02	1.22e-03

Tabella 3.2: Qualità delle approssimazioni per i metodi $V_n^{m_1}, V_n^{m_2}$, e l'iperinterpolazione L_n per approssimare $f_1(x, y) = ((x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2)^{1/2}$ sul disco X .

n	m_1	$\text{AE}_\infty(V_n^{m_1}, f)$	$\text{RE}_2(V_n^{m_1}, f)$	m_2	$\text{AE}_\infty(V_n^{m_2}, f)$	$\text{RE}_2(V_n^{m_2}, f)$	$\text{AE}_\infty(L_n, f)$	$\text{RE}_2(L_n, f)$
2	1	$1.07e+00$	$1.83e-01$	1	$1.07e+00$	$1.83e-01$	$3.35e-01$	$7.11e-02$
4	1	$6.03e-02$	$8.20e-03$	2	$1.45e-01$	$2.45e-02$	$2.85e-02$	$4.35e-03$
6	1	$5.65e-03$	$6.38e-04$	3	$1.73e-02$	$2.94e-03$	$6.17e-03$	$8.25e-04$
8	1	$3.03e-03$	$2.66e-04$	4	$6.21e-03$	$7.31e-04$	$2.72e-03$	$2.59e-04$
10	1	$1.27e-03$	$1.06e-04$	5	$2.96e-03$	$2.61e-04$	$1.21e-03$	$1.18e-04$
12	2	$8.92e-04$	$5.28e-05$	6	$1.66e-03$	$1.18e-04$	$6.98e-04$	$5.93e-05$
14	2	$3.34e-04$	$2.59e-05$	7	$8.64e-04$	$5.89e-05$	$3.23e-04$	$3.40e-05$
16	2	$2.34e-04$	$1.47e-05$	8	$4.34e-04$	$3.03e-05$	$2.08e-04$	$2.13e-05$
18	2	$2.77e-04$	$1.22e-05$	9	$5.08e-04$	$2.48e-05$	$2.54e-04$	$1.29e-05$
20	2	$1.55e-04$	$7.95e-06$	10	$3.03e-04$	$1.60e-05$	$1.37e-04$	$8.68e-06$

Tabella 3.3: Qualità delle approssimazioni per i metodi $V_n^{m_1}$, $V_n^{m_2}$, e l'iperinterpolazione L_n per approssimare $f_2(x, y) = [(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2]^{\frac{3}{2}}$ sul disco X .

n	m_1	$\text{AE}_\infty(V_n^{m_1}, f)$	$\text{RE}_2(V_n^{m_1}, f)$	m_2	$\text{AE}_\infty(V_n^{m_2}, f)$	$\text{RE}_2(V_n^{m_2}, f)$	$\text{AE}_\infty(L_n, f)$	$\text{RE}_2(L_n, f)$
2	1	$1.16e-01$	$1.13e-01$	1	$1.16e-01$	$1.13e-01$	$9.71e-02$	$5.92e-02$
4	1	$2.60e-02$	$1.51e-02$	2	$3.37e-02$	$1.50e-02$	$8.71e-03$	$4.15e-03$
6	1	$2.09e-03$	$1.31e-03$	3	$1.20e-02$	$7.92e-03$	$6.02e-04$	$2.23e-04$
8	1	$1.32e-04$	$7.60e-05$	4	$1.55e-03$	$7.63e-04$	$4.09e-05$	$1.27e-05$
10	1	$7.15e-06$	$3.83e-06$	5	$7.49e-04$	$3.82e-04$	$1.65e-06$	$5.04e-07$
12	2	$5.03e-07$	$1.61e-07$	6	$6.60e-05$	$3.13e-05$	$6.49e-08$	$1.76e-08$
14	2	$1.86e-08$	$5.73e-09$	7	$3.46e-05$	$1.61e-05$	$2.10e-09$	$5.42e-10$
16	2	$5.51e-10$	$1.80e-10$	8	$2.08e-06$	$1.13e-06$	$5.61e-11$	$1.51e-11$
18	2	$1.47e-11$	$5.00e-12$	9	$1.37e-06$	$5.90e-07$	$1.33e-12$	$3.73e-13$
20	2	$5.56e-13$	$1.29e-13$	10	$6.64e-08$	$3.59e-08$	$1.70e-13$	$2.90e-14$

Tabella 3.4: Qualità delle approssimazioni per i metodi $V_n^{m_1}$, $V_n^{m_2}$, e l'iperinterpolazione L_n per approssimare $f_3(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ sul disco X .

n	m_1	$\text{AE}_\infty(V_n^{m_1}, f)$	$\text{RE}_2(V_n^{m_1}, f)$	m_2	$\text{AE}_\infty(V_n^{m_2}, f)$	$\text{RE}_2(V_n^{m_2}, f)$	$\text{AE}_\infty(L_n, f)$	$\text{RE}_2(L_n, f)$
2	1	$2.03e-03$	$8.88e-01$	1	$2.03e-03$	$8.88e-01$	$1.86e-03$	$8.00e-01$
4	1	$1.29e-03$	$5.11e-01$	2	$1.29e-03$	$5.14e-01$	$9.81e-04$	$3.64e-01$
6	1	$3.31e-04$	$1.43e-01$	3	$4.12e-04$	$1.60e-01$	$7.27e-05$	$9.54e-02$
8	1	$9.40e-05$	$3.33e-02$	4	$2.62e-04$	$8.21e-02$	$2.75e-05$	$8.91e-03$
10	1	$9.08e-06$	$3.16e-03$	5	$1.16e-04$	$3.63e-02$	$6.16e-07$	$1.84e-04$
12	2	$3.36e-06$	$1.67e-03$	6	$3.49e-05$	$1.22e-02$	$3.19e-06$	$1.72e-03$
14	2	$5.74e-06$	$1.58e-03$	7	$1.49e-05$	$5.45e-03$	$5.38e-06$	$1.62e-03$
16	2	$9.01e-06$	$1.47e-03$	8	$2.05e-06$	$8.86e-04$	$8.91e-06$	$1.50e-03$
18	2	$3.61e-06$	$6.88e-04$	9	$8.97e-07$	$4.24e-04$	$3.81e-06$	$7.09e-04$
20	2	$7.35e-06$	$1.12e-03$	10	$6.65e-06$	$1.03e-03$	$7.55e-06$	$1.14e-03$

Tabella 3.5: Qualità delle approssimazioni per i metodi $V_n^{m_1}$, $V_n^{m_2}$, e l'iperinterpolazione L_n per approssimare $f_4(x, y) = (0.2x + 0.5y)^{10}$ sul disco X .

n	m_1	$\text{AE}_\infty(V_n^{m_1}, f)$	$\text{RE}_2(V_n^{m_1}, f)$	m_2	$\text{AE}_\infty(V_n^{m_2}, f)$	$\text{RE}_2(V_n^{m_2}, f)$	$\text{AE}_\infty(L_n, f)$	$\text{RE}_2(L_n, f)$
2	1	$1.29e-05$	$9.73e-01$	1	$1.29e-05$	$9.73e-01$	$1.27e-05$	$9.53e-01$
4	1	$1.11e-05$	$7.68e-01$	2	$1.10e-05$	$7.58e-01$	$1.02e-05$	$6.84e-01$
6	1	$3.19e-06$	$4.21e-01$	3	$2.94e-06$	$3.66e-01$	$2.18e-06$	$4.26e-01$
8	1	$2.74e-06$	$1.85e-01$	4	$3.85e-06$	$2.47e-01$	$1.94e-06$	$1.25e-01$
10	1	$8.25e-07$	$5.98e-02$	5	$1.83e-06$	$1.13e-01$	$4.06e-07$	$3.16e-02$
12	2	$2.15e-07$	$1.68e-02$	6	$9.51e-07$	$6.18e-02$	$9.58e-08$	$7.24e-03$
14	2	$2.92e-08$	$3.03e-03$	7	$4.13e-07$	$3.23e-02$	$8.11e-09$	$9.10e-04$
16	2	$3.03e-09$	$3.38e-04$	8	$1.46e-07$	$1.39e-02$	$4.41e-10$	$4.70e-05$
18	2	$1.08e-10$	$1.92e-05$	9	$6.07e-08$	$7.36e-03$	$1.58e-18$	$8.17e-14$
20	2	$2.96e-18$	$1.42e-13$	10	$1.43e-08$	$2.11e-03$	$3.01e-18$	$1.44e-13$

Tabella 3.6: Qualità delle approssimazioni per i metodi $V_n^{m_1}$, $V_n^{m_2}$, e l'iperinterpolazione L_n per approssimare $f_5(x, y) = (0.2x + 0.5y)^{18}$ sul disco X .

I risultati numerici sono esposti nelle Tabelle 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6 e sono in linea con quanto ci si aspetta, ottenendo risultati migliori via via che la funzione diventa più regolare.

In virtù della stima di errore di relativa all'errore di miglior approssimazione $E_{n-m_k}(f)$, $k = 1, 2$, essendo $m_1 \ll n$, per $V_n^{m_1}$ si ottiene un errore dell'ordine di quello dell'iperinterpolazione ovvero $E_n(f)$, mentre per $m_2 = \lceil n/2 \rceil$ questo è decisamente maggiore, dell'ordine di $E_{\lceil n/2 \rceil}(f)$. Le funzioni f_4 , f_5 sono riprodotte esattamente. Vedremo in seguito che ciò non accade nell'esempio del triangolo, per ragioni che sono di analisi futura e non derivanti da errori nell'implementazione dei codici.

n	m_1	$\tilde{\lambda}_n^{m_1}$	m_2	$\tilde{\lambda}_n^{m_2}$
2	1	2.0	1	2.0
4	1	3.3	2	2.0
6	1	5.2	3	2.1
8	1	7.4	4	2.3
10	1	9.8	5	2.4
12	2	7.4*	6	2.4
14	2	9.0*	7	2.4
16	2	10.7	8	2.4
18	2	12.4	9	2.4
20	2	14.2	10	2.4

Tabella 3.7: Approssimazione delle costanti di Lebesgue di $V_n^{m_1}$, $V_n^{m_2}$ mediante il massimo di $\sqrt{\frac{K_n(\mathbf{x}, \mathbf{x})}{K_m(\mathbf{x}, \mathbf{x})}}$ su 1021 punti del disco X . Abbiamo indicato con l'asterisco il caso in cui la crescita non risulti crescente con il grado n .

Per quanto concerne la costante di Lebesgue, come suggerito in [10] abbiamo con-

siderato la sua approssimazione mediante $\tilde{\Lambda}_n^m = \max_{\mathbf{x} \in X} \sqrt{\frac{K_n(\mathbf{x}, \mathbf{x})}{K_m(\mathbf{x}, \mathbf{x})}}$. I risultati sono evidenziati nella Tabella 3.7. A tal proposito abbiamo approssimato tale quantità valutando il massimo sui 1021 punti della formula di quadratura quasi-minimale avente grado di precisione 77 [12], esponendo i dati nella tabella 3.7, per $n = 2, 4, 6, \dots, 20$ ed $m_1 = \lceil n/10 \rceil$, $m_2 = \lceil n/2 \rceil$.

Come nelle note in [10], la crescita della approssimazione della costante di Lebesgue mediante $\tilde{\Lambda}_n^m$ risulta molto lenta per $m \approx n$, mentre é decisamente maggiore al crescere di n/m , ad esempio per $m = m_1 = \lceil n/10 \rceil$.

3.3 Esperimenti numerici su un triangolo

Quale secondo esempio consideriamo il triangolo

$$X = \{(x, y) : x, y \in [0, 1], y \leq x\}.$$

Come funzioni test consideriamo quelle introdotte precedentemente, osservando che in f_1 e f_2 il punto $(0.5, 0.5)$, appartenendo a X , é effettivamente una singolaritá di bordo.

La base ortonormale scelta é quella di Dubiner [2], implementata in Matlab.

Quali formule di cubatura abbiamo usato come nell'esempio precedente quelle di tipo quasi-minimale, la cui cardinalitá é esposta nella Tabella 3.8.

n	$card$	n	$card$	n	$card$
1	1	11	27	21	85
2	3	12	32	22	93
3	4	13	36	23	100
4	6	14	42	24	109
5	7	15	46	25	117
6	12	16	52	26	130
7	12	17	57	27	141
8	16	18	66	28	150
9	19	19	70	29	159
10	24	20	78	30	171

Tabella 3.8: Formule quasi-minimali a grado $n \leq 30$ sul triangolo X e loro cardinalitá $card$.

Negli esperimenti numerici abbiamo nuovamente considerato $n = 2, 4, 6, \dots, 20$ e formule di quadratura aventi grado $2n$. Similmente, nei metodi kernel, abbiamo utilizzato i valori $m_1 = \lceil n/10 \rceil$ e $m_2 = \lceil n/2 \rceil$, stimando nelle tabelle

- $\text{AE}_\infty(P, f) := \|Pf - f\|_\infty$,
- $\text{RE}_2(P, f) := \|Pf - f\|_2 / \|f\|_2$.

In particolare per approssimare tali quantità abbiamo usato una formula di tipo quasi-minimale sul triangolo avente un grado di precisione 50 e 453 nodi.

n	m_1	$\text{AE}_\infty(V_n^{m_1}, f)$	$\text{RE}_2(V_n^{m_1}, f)$	m_2	$\text{AE}_\infty(V_n^{m_2}, f)$	$\text{RE}_2(V_n^{m_2}, f)$	$\text{AE}_\infty(L_n, f)$	$\text{RE}_2(L_n, f)$
2	1	$9.42e-02$	$7.07e-02$	1	$9.42e-02$	$7.07e-02$	$1.60e-01$	$1.06e-01$
4	1	$5.12e-02$	$1.95e-02$	2	$6.91e-02$	$2.84e-02$	$1.05e-01$	$3.97e-02$
6	1	$8.65e-02$	$1.81e-02$	3	$9.59e-02$	$2.39e-02$	$8.58e-02$	$1.97e-02$
8	1	$7.05e-02$	$1.12e-02$	4	$7.61e-02$	$1.38e-02$	$7.01e-02$	$1.30e-02$
10	1	$3.74e-02$	$7.08e-03$	5	$4.21e-02$	$9.06e-03$	$3.15e-02$	$7.19e-03$
12	2	$2.81e-02$	$5.44e-03$	6	$2.65e-02$	$5.80e-03$	$2.82e-02$	$5.83e-03$
14	2	$4.19e-02$	$4.70e-03$	7	$4.39e-02$	$4.35e-03$	$3.94e-02$	$4.84e-03$
16	2	$2.36e-02$	$3.23e-03$	8	$2.27e-02$	$3.27e-03$	$2.24e-02$	$3.16e-03$
18	2	$1.49e-02$	$2.95e-03$	9	$2.35e-02$	$2.77e-03$	$1.27e-02$	$2.89e-03$
20	2	$2.61e-02$	$5.96e-03$	10	$1.79e-02$	$1.98e-03$	$1.99e-02$	$3.06e-03$

Tabella 3.9: Qualità delle approssimazioni per i metodi $V_n^{m_1}$, $V_n^{m_2}$, e l'iperinterpolazione L_n per approssimare $f_1(x, y) = ((x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2)^{1/2}$ sul triangolo X .

n	m_1	$\text{AE}_\infty(V_n^{m_1}, f)$	$\text{RE}_2(V_n^{m_1}, f)$	m_2	$\text{AE}_\infty(V_n^{m_2}, f)$	$\text{RE}_2(V_n^{m_2}, f)$	$\text{AE}_\infty(L_n, f)$	$\text{RE}_2(L_n, f)$
2	1	$1.77e-01$	$3.03e-01$	1	$1.77e-01$	$3.03e-01$	$7.99e-02$	$1.19e-01$
4	1	$2.37e-02$	$2.50e-02$	2	$3.78e-02$	$3.75e-02$	$1.49e-02$	$1.33e-02$
6	1	$2.58e-03$	$3.39e-03$	3	$1.15e-02$	$1.78e-02$	$4.30e-03$	$3.45e-03$
8	1	$1.20e-03$	$9.06e-04$	4	$2.19e-03$	$2.91e-03$	$1.78e-03$	$1.35e-03$
10	1	$3.29e-04$	$4.66e-04$	5	$6.08e-04$	$1.37e-03$	$5.04e-04$	$5.38e-04$
12	2	$2.26e-04$	$2.92e-04$	6	$4.09e-04$	$6.24e-04$	$3.35e-04$	$3.19e-04$
14	2	$2.68e-04$	$1.46e-04$	7	$4.48e-04$	$3.15e-04$	$3.25e-04$	$1.81e-04$
16	2	$7.80e-05$	$8.76e-05$	8	$1.42e-04$	$1.88e-04$	$1.33e-04$	$9.60e-05$
18	2	$6.99e-04$	$2.88e-04$	9	$1.66e-04$	$1.30e-04$	$1.02e-04$	$6.60e-05$
20	2	$1.21e-02$	$6.07e-03$	10	$1.66e-03$	$6.20e-04$	$1.21e-04$	$5.61e-05$

Tabella 3.10: Qualità delle approssimazioni per i metodi $V_n^{m_1}$, $V_n^{m_2}$, e l'iperinterpolazione L_n per approssimare $f_2(x, y) = [(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2]^{3/2}$ sul triangolo X .

n	m_1	$\text{AE}_\infty(V_n^{m_1}, f)$	$\text{RE}_2(V_n^{m_1}, f)$	m_2	$\text{AE}_\infty(V_n^{m_2}, f)$	$\text{RE}_2(V_n^{m_2}, f)$	$\text{AE}_\infty(L_n, f)$	$\text{RE}_2(L_n, f)$
2	1	$1.06e-01$	$2.60e-02$	1	$1.06e-01$	$2.60e-02$	$8.43e-02$	$2.49e-02$
4	1	$7.80e-03$	$1.10e-03$	2	$3.32e-02$	$6.67e-03$	$7.46e-03$	$8.31e-04$
6	1	$5.64e-04$	$5.72e-05$	3	$3.93e-03$	$5.31e-04$	$1.88e-04$	$1.63e-05$
8	1	$1.64e-05$	$1.68e-06$	4	$7.92e-04$	$1.23e-04$	$3.80e-06$	$1.88e-07$
10	1	$3.42e-07$	$3.25e-08$	5	$7.12e-05$	$1.40e-05$	$5.49e-08$	$3.50e-09$
12	2	$3.27e-08$	$1.02e-08$	6	$1.02e-05$	$1.53e-06$	$7.34e-10$	$1.36e-10$
14	2	$1.51e-06$	$2.98e-07$	7	$1.41e-06$	$3.32e-07$	$4.09e-11$	$2.80e-12$
16	2	$1.21e-04$	$1.47e-05$	8	$9.11e-06$	$2.85e-06$	$4.16e-13$	$4.81e-14$
18	2	$2.09e-03$	$1.88e-04$	9	$7.55e-05$	$3.51e-05$	$1.14e-14$	$1.12e-15$
20	2	$2.04e-02$	$3.87e-03$	10	$3.40e-03$	$1.09e-03$	$6.27e-15$	$1.28e-15$

Tabella 3.11: Qualità delle approssimazioni per i metodi $V_n^{m_1}$, $V_n^{m_2}$, e l'iperinterpolazione L_n per approssimare $f_3(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ sul triangolo X .

n	m_1	$\text{AE}_\infty(V_n^{m_1}, f)$	$\text{RE}_2(V_n^{m_1}, f)$	m_2	$\text{AE}_\infty(V_n^{m_2}, f)$	$\text{RE}_2(V_n^{m_2}, f)$	$\text{AE}_\infty(L_n, f)$	$\text{RE}_2(L_n, f)$
2	1	$2.06e-02$	$5.98e-01$	1	$2.06e-02$	$5.98e-01$	$1.83e-02$	$5.20e-01$
4	1	$7.60e-03$	$1.63e-01$	2	$1.09e-02$	$2.27e-01$	$5.39e-03$	$1.12e-01$
6	1	$1.03e-03$	$1.91e-02$	3	$4.17e-03$	$7.46e-02$	$4.96e-04$	$8.63e-03$
8	1	$2.58e-05$	$4.75e-04$	4	$7.98e-04$	$1.72e-02$	$6.29e-06$	$1.20e-04$
10	1	$9.61e-08$	$1.73e-06$	5	$1.46e-04$	$3.36e-03$	$5.20e-17$	$1.16e-15$
12	2	$7.12e-11$	$5.17e-09$	6	$7.36e-06$	$7.20e-04$	$3.82e-17$	$1.04e-15$
14	2	$3.68e-09$	$2.41e-07$	7	$2.43e-06$	$8.17e-05$	$4.51e-17$	$1.13e-15$
16	2	$5.93e-08$	$3.35e-06$	8	$1.38e-07$	$6.99e-06$	$8.21e-17$	$1.15e-15$
18	2	$2.77e-06$	$2.12e-04$	9	$3.85e-08$	$2.66e-06$	$3.82e-17$	$9.17e-16$
20	2	$1.74e-04$	$1.27e-02$	10	$1.36e-05$	$2.89e-04$	$1.08e-15$	$4.66e-14$

Tabella 3.12: Qualità delle approssimazioni per i metodi $V_n^{m_1}$, $V_n^{m_2}$, e l'iperinterpolazione L_n per approssimare $f_4(x, y) = (0.2x + 0.5y)^{10}$ sul triangolo X .

n	m_1	$\text{AE}_\infty(V_n^{m_1}, f)$	$\text{RE}_2(V_n^{m_1}, f)$	m_2	$\text{AE}_\infty(V_n^{m_2}, f)$	$\text{RE}_2(V_n^{m_2}, f)$	$\text{AE}_\infty(L_n, f)$	$\text{RE}_2(L_n, f)$
2	1	$1.38e-03$	$8.50e-01$	1	$1.38e-03$	$8.50e-01$	$1.34e-03$	$8.16e-01$
4	1	$8.92e-04$	$4.51e-01$	2	$1.00e-03$	$5.12e-01$	$8.12e-04$	$3.97e-01$
6	1	$3.29e-04$	$1.50e-01$	3	$5.51e-04$	$2.52e-01$	$2.67e-04$	$1.12e-01$
8	1	$4.46e-05$	$2.13e-02$	4	$1.72e-04$	$7.49e-02$	$3.09e-05$	$1.42e-02$
10	1	$3.71e-06$	$1.86e-03$	5	$5.16e-05$	$2.63e-02$	$2.08e-06$	$1.07e-03$
12	2	$1.09e-07$	$3.30e-04$	6	$5.38e-06$	$1.14e-02$	$2.35e-08$	$5.69e-05$
14	2	$1.32e-08$	$1.02e-05$	7	$3.35e-06$	$3.17e-03$	$1.05e-09$	$8.36e-07$
16	2	$4.65e-10$	$1.86e-06$	8	$5.52e-07$	$8.74e-04$	$2.49e-12$	$4.07e-09$
18	2	$6.29e-08$	$2.05e-04$	9	$1.43e-07$	$2.49e-04$	$1.52e-18$	$1.50e-15$
20	2	$3.63e-06$	$1.43e-02$	10	$5.57e-07$	$3.24e-04$	$3.69e-17$	$6.37e-14$

Tabella 3.13: Qualità delle approssimazioni per i metodi $V_n^{m_1}$, $V_n^{m_2}$, e l'iperinterpolazione L_n per approssimare $f_5(x, y) = (0.2x + 0.5y)^{18}$ sul triangolo X .

I risultati numerici sono esposti nelle Tabelle 3.9, 3.10, 3.11, 3.12, 3.13.

Un aspetto da tenere in conto é che per la funzione polinomiale di grado 10 (funzione f_4), nel caso vengano scelti $n \geq 12$ e $m = m_1$, ci si aspetta che la riproduzione della funzione abbia un errore non distante dalla precisione di macchina, ma purtroppo non é cosí. Lo stesso fenomeno si realizza col polinomio di grado 18 (funzione f_5).

In prima battuta si pensa a un errore di natura numerica o di programmazione, ma non possono essere dovuti

- ai polinomi ortonormali, visto che sono gli stessi utilizzati per l'iperinterpolazione a pari grado (che offre risultati corretti);
- alle formule di cubatura, di cui si sono testate le esattezze algebriche e che risultano performanti nel calcolo delle interpolanti.

Questo fenomeno sembra essere realizzato anche nel caso delle altre funzioni, in cui all'aumentare del grado non sia ha in generale una migliore qualità dell'approssimazione, come previsto.

Questo sembra spingere a cercare in una futura ricerca una ragione di natura teorica sulla valutazione dell'approssimante nel metodo kernel.

n	m_1	$\tilde{\lambda}_n^{m_1}$	m_2	$\tilde{\lambda}_n^{m_2}$
2	1	2.0	1	2.0
4	1	4.9	2	2.4
6	1	9.0	3	2.7
8	1	14.3	4	2.9
10	1	20.4	5	2.9
12	2	13.7*	6	3.0
14	2	17.4*	7	3.0
16	2	21.3	8	3.0
18	2	25.2	9	3.0
20	2	29.2	10	3.0

Tabella 3.14: Approssimazione delle costanti di Lebesgue di $V_n^{m_1}$, $V_n^{m_2}$ mediante il massimo di $\sqrt{\frac{K_n(\mathbf{x}, \mathbf{x})}{K_m(\mathbf{x}, \mathbf{x})}}$ su 453 punti del triangolo X . Abbiamo indicato con l'asterisco il caso in cui la crescita non risulti crescente con il grado n .

Per quanto riguarda la costante di Lebesgue, abbiamo nuovamente considerato la sua approssimazione mediante $\tilde{\Lambda}_n^m = \max_{\mathbf{x} \in X} \sqrt{\frac{K_n(\mathbf{x}, \mathbf{x})}{K_m(\mathbf{x}, \mathbf{x})}}$, rendicontando i risultati nella Tabella 3.14, per $n = 2, 4, 6, \dots, 20$ ed $m_1 = \lceil n/10 \rceil$, $m_2 = \lceil n/2 \rceil$.

A tal proposito abbiamo approssimato tale quantità valutando il massimo sui 453 punti della formula di quadratura quasi-minimale avente grado di precisione 50 [12].

Come nelle note in [10], la crescita della approssimazione della costante di Lebesgue mediante $\tilde{\Lambda}_n^m$ risulta molto lenta per $m \approx n$, mentre é decisamente maggiore al crescere di n/m , ad esempio per $m = m_1 = \lceil n/10 \rceil$.

3.4 Esperimenti numerici su un poligono con un lato curvo

Quale ultimo dominio consideriamo un poligono con un lato curvo, coincidente con un arco di cerchio.

Nel caso specifico, i vertici sono $P_1 = (0.25, 0)$, $P_2 = (0.4, 0.05)$, $P_3 = (0.5, 0.25)$, $P_4 = (0.45, 0.45)$, $P_5 = (0.3, 0.5)$, $P_6 = (0.1, 0.45)$, $P_7 = (0, 0.25)$, e P_1 é unito a P_7 mediante un arco di cerchio di raggio 0.25 e centro $(0.25, 0.25)$, cosicché il dominio contenga il segmento P_1P_7 (vedasi Figura 3.1).

Le formule di quadratura sono ottenute mediante la procedura descritta in [1].

Per tale dominio non si conosce esplicitamente una base polinomiale triangolare e ortonormale di $\mathbb{P}_n(X)$ e pertanto la calcoliamo numericamente.

A tal proposito, sia $\{\phi_1^*, \dots, \phi_d^*\}$, $d = (n+1)(n+2)/2$ la base di Chebyshev di grado totale n del più piccolo rettangolo cartesiano $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ contenente X .

Dapprima calcoliamo la matrice di Vandermonde V_{ϕ^*} valutata nei nodi della formula di quadratura

$$V_{\phi^*} = (\phi_j^*(x_k, y_k))_{k,j} \quad (3.2)$$

Si mostra che V_{ϕ^*} ha rango massimo.

Sia ora $\sqrt{W}$ la matrice diagonale avente quali componenti $\sqrt{W}_{k,k} = \sqrt{w_k}$. Applicando la fattorizzazione QR ricaviamo

$$\sqrt{W}V_{\phi^*} = QR$$

dove Q è una matrice ortogonale e R è una matrice triangolare superiore non singolare. Conseguentemente la base polinomiale $\{\phi_1, \dots, \phi_d\} := \{\phi_1^*, \dots, \phi_d^*\}R^{-1}$ è ortonormale rispetto al prodotto interno discreto definito dalla formula di quadratura. Inoltre, poiché R^{-1} è una matrice triangolare superiore non singolare, allora la base $\{\phi_1, \dots, \phi_d\}$ è anche triangolare e $\deg(\phi_j) = \deg(\phi_j^*)$ per ogni $1 \leq j \leq d$.

Nei nostri esperimenti, la base ortogonale viene determinata implementando in Matlab tale procedura.

Quali punti test utilizziamo quelli prodotti dall'algoritmo introdotto in [1] per una formula di quadratura di grado 40 (non compressa mediante l'algoritmo di Caratheodory-Tchakaloff). La cardinalità in questo caso risulta pari a 12383.

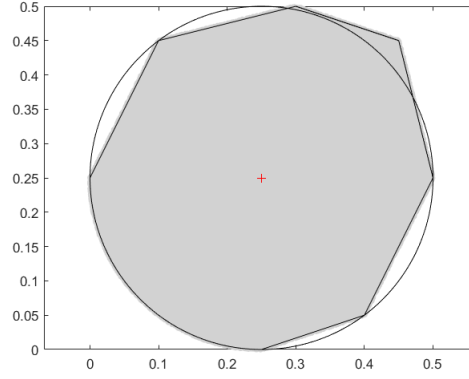


Figura 3.1: Il poligono curvo X .

n	m_1	$\text{AE}_\infty(V_n^{m_1}, f)$	$\text{RE}_2(V_n^{m_1}, f)$	m_2	$\text{AE}_\infty(V_n^{m_2}, f)$	$\text{RE}_2(V_n^{m_2}, f)$	$\text{AE}_\infty(L_n, f)$	$\text{RE}_2(L_n, f)$
2	1	$4.75e-02$	$2.55e-02$	1	$4.75e-02$	$2.55e-02$	$2.34e-02$	$1.45e-02$
4	1	$5.83e-03$	$2.39e-03$	2	$9.70e-03$	$3.80e-03$	$4.64e-03$	$2.25e-03$
6	1	$1.95e-03$	$5.88e-04$	3	$2.84e-03$	$1.07e-03$	$1.71e-03$	$5.84e-04$
8	1	$7.27e-04$	$1.73e-04$	4	$1.49e-03$	$4.11e-04$	$6.42e-04$	$1.79e-04$
10	1	$2.68e-04$	$5.75e-05$	5	$7.76e-04$	$1.71e-04$	$2.38e-04$	$6.04e-05$
12	2	$1.09e-04$	$2.16e-05$	6	$3.98e-04$	$7.52e-05$	$1.03e-04$	$2.14e-05$
14	2	$5.30e-05$	$8.03e-06$	7	$2.04e-04$	$3.51e-05$	$4.47e-05$	$7.95e-06$
16	2	$2.27e-05$	$3.06e-06$	8	$9.81e-05$	$1.72e-05$	$1.91e-05$	$3.06e-06$
18	2	$9.19e-06$	$1.19e-06$	9	$4.62e-05$	$8.86e-06$	$7.51e-06$	$1.21e-06$
20	2	$3.83e-06$	$4.76e-07$	10	$3.16e-05$	$4.82e-06$	$3.63e-06$	$4.86e-07$

Tabella 3.15: Qualit  delle approssimazioni sul poligono curvo X per i metodi $V_n^{m_1}$, $V_n^{m_2}$ e l'iperinterpolazione L_n , relativamente alla funzione $f_1(x, y) = ((x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2)^{1/2}$.

n	m_1	$\text{AE}_\infty(V_n^{m_1}, f)$	$\text{RE}_2(V_n^{m_1}, f)$	m_2	$\text{AE}_\infty(V_n^{m_2}, f)$	$\text{RE}_2(V_n^{m_2}, f)$	$\text{AE}_\infty(L_n, f)$	$\text{RE}_2(L_n, f)$
2	1	$3.47e-02$	$1.07e-01$	1	$3.47e-02$	$1.07e-01$	$9.01e-03$	$2.61e-02$
4	1	$7.07e-04$	$9.10e-04$	2	$3.40e-03$	$7.50e-03$	$1.66e-04$	$4.08e-04$
6	1	$3.23e-05$	$6.41e-05$	3	$3.41e-04$	$4.31e-04$	$2.50e-05$	$5.48e-05$
8	1	$7.11e-06$	$1.12e-05$	4	$3.55e-05$	$6.85e-05$	$6.33e-06$	$1.09e-05$
10	1	$2.16e-06$	$2.67e-06$	5	$1.17e-05$	$1.76e-05$	$2.03e-06$	$2.71e-06$
12	2	$8.88e-07$	$8.46e-07$	6	$4.59e-06$	$5.79e-06$	$7.35e-07$	$7.59e-07$
14	2	$3.31e-07$	$2.52e-07$	7	$1.82e-06$	$2.20e-06$	$2.54e-07$	$2.33e-07$
16	2	$1.14e-07$	$8.05e-08$	8	$7.21e-07$	$9.13e-07$	$8.70e-08$	$7.67e-08$
18	2	$3.77e-08$	$2.69e-08$	9	$4.43e-07$	$4.03e-07$	$3.59e-08$	$2.63e-08$
20	2	$1.68e-08$	$9.57e-09$	10	$2.60e-07$	$1.92e-07$	$1.46e-08$	$9.38e-09$

Tabella 3.16: Qualit  delle approssimazioni sul poligono curvo X per i metodi $V_n^{m_1}$, $V_n^{m_2}$ e l'iperinterpolazione L_n , relativamente alla funzione $f_2(x, y) = [(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2]^{\frac{3}{2}}$.

n	m_1	$\text{AE}_\infty(V_n^{m_1}, f)$	$\text{RE}_2(V_n^{m_1}, f)$	m_2	$\text{AE}_\infty(V_n^{m_2}, f)$	$\text{RE}_2(V_n^{m_2}, f)$	$\text{AE}_\infty(L_n, f)$	$\text{RE}_2(L_n, f)$
2	1	$2.68e-02$	$8.90e-03$	1	$2.68e-02$	$8.90e-03$	$5.80e-03$	$1.43e-03$
4	1	$2.38e-04$	$4.94e-05$	2	$2.13e-03$	$4.00e-04$	$7.13e-05$	$9.62e-06$
6	1	$1.79e-06$	$2.13e-07$	3	$1.26e-04$	$2.31e-05$	$5.52e-07$	$4.90e-08$
8	1	$9.23e-09$	$7.12e-10$	4	$1.32e-05$	$1.57e-06$	$2.91e-09$	$1.88e-10$
10	1	$3.58e-11$	$2.04e-12$	5	$5.43e-07$	$6.13e-08$	$1.16e-11$	$5.72e-13$
12	2	$5.35e-12$	$4.09e-13$	6	$5.49e-08$	$5.07e-09$	$3.69e-14$	$1.54e-15$
14	2	$1.10e-11$	$1.06e-12$	7	$1.74e-09$	$1.43e-10$	$2.89e-15$	$8.36e-16$
16	2	$1.28e-10$	$7.25e-12$	8	$1.74e-10$	$1.38e-11$	$2.78e-15$	$5.17e-16$
18	2	$1.78e-09$	$7.38e-11$	9	$8.51e-11$	$1.22e-11$	$2.55e-15$	$5.09e-16$
20	2	$2.15e-08$	$1.20e-09$	10	$5.40e-10$	$1.17e-10$	$3.55e-15$	$9.35e-16$

Tabella 3.17: Qualit  delle approssimazioni sul poligono curvo X per i metodi $V_n^{m_1}$, $V_n^{m_2}$ e l'iperinterpolazione L_n , relativamente alla funzione $f_3(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$.

n	m_1	$\text{AE}_\infty(V_n^{m_1}, f)$	$\text{RE}_2(V_n^{m_1}, f)$	m_2	$\text{AE}_\infty(V_n^{m_2}, f)$	$\text{RE}_2(V_n^{m_2}, f)$	$\text{AE}_\infty(L_n, f)$	$\text{RE}_2(L_n, f)$
2	1	$4.39e-06$	$4.41e-01$	1	$4.39e-06$	$4.41e-01$	$3.51e-06$	$4.60e-01$
4	1	$1.23e-06$	$9.42e-02$	2	$2.11e-06$	$1.40e-01$	$7.04e-07$	$6.42e-02$
6	1	$1.05e-07$	$7.82e-03$	3	$6.75e-07$	$4.17e-02$	$3.77e-08$	$3.31e-03$
8	1	$2.72e-09$	$1.91e-04$	4	$1.72e-07$	$1.06e-02$	$5.19e-10$	$3.68e-05$
10	1	$9.84e-12$	$5.93e-07$	5	$3.42e-08$	$2.15e-03$	$2.03e-20$	$8.23e-16$
12	2	$9.98e-18$	$3.93e-13$	6	$5.09e-09$	$3.33e-04$	$2.03e-20$	$8.57e-16$
14	2	$2.22e-17$	$9.53e-13$	7	$5.35e-10$	$3.68e-05$	$2.03e-20$	$8.66e-16$
16	2	$1.11e-16$	$4.06e-12$	8	$3.53e-11$	$2.56e-06$	$1.86e-20$	$8.44e-16$
18	2	$2.96e-15$	$7.27e-11$	9	$1.11e-12$	$8.46e-08$	$2.20e-20$	$9.21e-16$
20	2	$1.25e-14$	$6.82e-10$	10	$5.47e-16$	$2.84e-11$	$2.71e-20$	$1.19e-15$

Tabella 3.18: Qualit  delle approssimazioni sul poligono curvo X per i metodi $V_n^{m_1}$, $V_n^{m_2}$ e l'iperinterpolazione L_n , relativamente alla funzione $f_4(x, y) = (0.2x + 0.5y)^{10}$.

n	m_1	$\text{AE}_\infty(V_n^{m_1}, f)$	$\text{RE}_2(V_n^{m_1}, f)$	m_2	$\text{AE}_\infty(V_n^{m_2}, f)$	$\text{RE}_2(V_n^{m_2}, f)$	$\text{AE}_\infty(L_n, f)$	$\text{RE}_2(L_n, f)$
2	1	$5.03e-10$	$7.64e-01$	1	$5.03e-10$	$7.64e-01$	$4.50e-10$	$7.92e-01$
4	1	$2.99e-10$	$2.67e-01$	2	$3.79e-10$	$3.02e-01$	$2.41e-10$	$2.37e-01$
6	1	$7.84e-11$	$6.68e-02$	3	$1.83e-10$	$1.26e-01$	$5.37e-11$	$5.14e-02$
8	1	$1.24e-11$	$9.78e-03$	4	$7.78e-11$	$4.99e-02$	$6.98e-12$	$6.26e-03$
10	1	$1.10e-12$	$8.06e-04$	5	$2.93e-11$	$1.85e-02$	$4.81e-13$	$4.04e-04$
12	2	$1.64e-13$	$1.10e-04$	6	$9.75e-12$	$6.24e-03$	$1.55e-14$	$1.25e-05$
14	2	$4.90e-15$	$3.26e-06$	7	$2.85e-12$	$1.88e-03$	$2.07e-16$	$1.54e-07$
16	2	$5.95e-17$	$3.87e-08$	8	$7.29e-13$	$5.02e-04$	$7.46e-19$	$4.77e-10$
18	2	$2.08e-19$	$1.37e-10$	9	$1.62e-13$	$1.17e-04$	$2.58e-24$	$1.51e-15$
20	2	$7.51e-19$	$6.86e-10$	10	$3.09e-14$	$2.33e-05$	$2.90e-24$	$1.77e-15$

Tabella 3.19: Qualit  delle approssimazioni sul poligono curvo X per i metodi $V_n^{m_1}$, $V_n^{m_2}$ e l'iperinterpolazione L_n , relativamente alla funzione $f_5(x, y) = (0.2x + 0.5y)^{18}$.

I risultati numerici sono esposti nelle Tabelle 3.15, 3.16, 3.17, 3.18, 3.19. Mentre nei casi meno regolari l'errore dei metodi kernel   prossimo a quello della iperinterpolante, questo non accade con le funzioni analitiche f_3 , f_4 , f_5 , in cui l'errore a volte degrada al crescere di n , anche se in minor misura rispetto al caso del triangolo.

n	m_1	$\tilde{\lambda}_n^{m_1}$	m_2	$\tilde{\lambda}_n^{m_2}$
2	1	2.0	1	2.0
4	1	4.3	2	2.4
6	1	8.0	3	2.7
8	1	12.8	4	3.0
10	1	18.6	5	3.1
12	2	14.0*	6	3.2
14	2	18.4*	7	3.3
16	2	23.2	8	3.4
18	2	28.6	9	3.4
20	2	34.5	10	3.5

Tabella 3.20: Approssimazione delle costanti di Lebesgue di $V_n^{m_1}$, $V_n^{m_2}$ mediante il massimo di $\sqrt{\frac{K_n(\mathbf{x}, \mathbf{x})}{K_m(\mathbf{x}, \mathbf{x})}}$ su 12383 punti del poligono curvo X . Abbiamo indicato con l'asterisco il caso in cui la crescita non risulti crescente con il grado n .

Per quanto riguarda la costante di Lebesgue, abbiamo ancora considerato la sua approssimazione mediante $\tilde{\Lambda}_n^m = \max_{\mathbf{x} \in X} \sqrt{\frac{K_n(\mathbf{x}, \mathbf{x})}{K_m(\mathbf{x}, \mathbf{x})}}$, rendicontando i risultati nella Tabella 3.20, per $n = 2, 4, 6, \dots, 20$ ed $m_1 = \lceil n/10 \rceil$, $m_2 = \lceil n/2 \rceil$.

In questo caso abbiamo approssimato tale quantit  valutando il massimo sui 12383 nodi della formula di quadratura non compressa ottenuta mediante l'algoritmo proposto in [1].

Come nei due casi precedenti, la crescita della approssimazione della costante di Lebesgue mediante $\tilde{\Lambda}_n^m$ risulta molto lenta per $m \approx n$, mentre é decisamente maggiore al crescere di n/m , ad esempio sempre per $m = m_1 = \lceil n/10 \rceil$.

Bibliografia

- [1] Edoardo Artioli, Alvis Sommariva, Marco Vianello, *Algebraic cubature on polygonal elements with a circular edge*, Computers Mathematics with Applications, Volume 79, Volume 7, 1 April 2020, pp. 2057-2066.
- [2] Moshe Dubiner, *Spectral methods on triangles and other domains* J Sci Comput, vol. 6, no. 4, pp. 345–390, Dec. 1991.
- [3] Gerald B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley and Sons, 1999.
- [4] Arthur Gretton, *Introduction to RKHS, and some simple kernel algorithms*, https://www.gatsby.ucl.ac.uk/~gretton/coursefiles/lecture4_introToRKHS.pdf.
- [5] Benjamin F. Logan e Larry A. Shepp, *Optimal reconstruction of a function from its projections*, Duke Math. J. 42 (1975), pp. 645–659.
- [6] Ian H. Sloan, *Polynomial Interpolation and Hyperinterpolation over General Regions*, Journal of Approximation Theory Volume 83, Issue 2, November 1995, pp. 238-254.
- [7] Alvis Sommariva, *Interpolation pointsets, polynomial meshes and cubature rules*, <https://sites.google.com/view/alvisesommarivaunipd/home-page/sets>.
- [8] Alvis Sommariva, Marco Vianello, Renato Zanghì, *Nontensorial Clenshaw-Curtis formula*, Numerical Algorithms 49 (2008), pp. 409-427.
- [9] Nick Takaki, G.W. Forbes, Jannick P. Rolland, *Schemes for cubature over the unit disk found via numerical optimization*, Journal of Computational and Applied Mathematics Volume 407, June 2022, 114076.

- [10] Woula Themistoclakis e Marc Van Barel, *A new kernel method for the uniform approximation in reproducing kernel Hilbert spaces*, Applied Mathematics Letters 153, (2024) 109052.
- [11] Shayne Waldron, *Orthogonal polynomials on the disc*, Journal of Approximation Theory Volume 150, Issue 2, February 2008, pp. 117-131.
- [12] Nick Takaki, G.W. Forbes, Jannick P. Rolland, *Schemes for cubature over the unit disk found via numerical optimization*, Journal of Computational and Applied Mathematics Volume 407, June 2022, 114076.

Capitolo 4

Appendice

In questa sezione listiamo i file Matlab essenziali per gli esperimenti numerici.

4.1 La funzione `demo_RK`

4.2 La funzione `RRKeval`

Capitolo 5

Ringraziamenti

*"Un matematico non si laurea mai in ritardo,
Frodo Baggins, né in anticipo,
si laurea esattamente quando intende farlo."*
Gandalf, famoso matematico della Terra di Mezzo

"Tu...non puoi...pas-sare!"
Gandalf agli studenti del suo
corso di Analisi da 6 CFU obbligatorio

Mi ritaglio questo piccolo spazio in questa tesi per ringraziare chi è stato con me durante questo lungo cammino.

Ringrazio i miei genitori, per essermi stati vicino in tutti questi anni e per non avermi mai fatto mancare il loro sostegno. Purtroppo per loro, ora a casa mi esprimo come un matematico: ciò che penso è ovvio e le spiegazioni sono esercizi per il lettore.

Un sentito ringraziamento va anche al mio relatore, che mi ha dato una grande mano con questa tesi, che si è rivelata molto più ostica, ma anche originale, del previsto.

Una dedica va anche ai miei amici, che mi hanno fatto divertire e sorridere nei momenti più bui e reso indimenticabili quelli felici: Luigi che tra le molte cose mi ha instillato la passione per la chitarra, dopo avermi bombardato un centinaio di volte con il riff di "Money for Nothing"; Alessandro e Lorenzo, in arte Tanogol e Conso, che mi accompagnano fin dal primo giorno delle superiori a suon di campionati su OSM prima e partite di calcetto poi; Loris, compagno di molte avventure, specialmente a Vienna; Riccardo, che mi ha fatto scoprire gli Opeth, cosa di cui non gli sarò mai grato abbastanza; e poi i miei matematici preferiti: Camilla, che mi ha fatto scoprire parti

di me che non sapevo esistessero; Eva, che ha dovuto sopportare la mia versione sotto-io per un semestre intero; Francesco (Cocco), le cui conoscenze enciclopediche non smettono mai di stupirmi; Francesco (Tonon), con cui ho intrattenuto lunghe passeggiate, matematiche e non, come Hilbert e Minkowski tra le strade di Gottinga; Marci, mio maestro nell'arte degli scacchi, peccato io sia un pessimo allievo; Nicole, unica persona al mondo ad avermi convinto a ballare di mia spontanea volontà; Ottavia, coraggiosa nel suo supportare un aspirante chitarrista a non cadere nel buco nero della scala pentatonica; Pietro, con cui ho cominciato una descrizione completa del mondo con la matematica, sulla falsa riga di Russell e Whitehead purtroppo ci siamo fermati ai bar di Cittadella; e Sofia, mia grande alleata nel fare proseliti per la più bella delle religioni: l'Algebra.

Infine, un grazie speciale a tutti i medici e gli infermieri che si sono presi cura di me durante i miei periodi in ospedale.