Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica
Corso di Laurea Triennale in Matematica
A. A. 2011/12

Tesi di Laurea

Interpolazione trigonometrica subperiodica e interpolazione prodotto su sezioni di cerchio

Candidata
Mazzocco Valentina

Relatore
Prof. Marco Vianello

Correlatore
Dott. Alvise Sommariva

Indice

Introduzione

L'interpolazione trigonometrica nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ è un argomento ampiamente studiato. A riguardo sappiamo bene che qualsiasi insieme di $2n + 1$ angoli equispaziati nell'intero periodo è ottimale per l'interpolazione trigonometrica di grado n, e inoltre la relativa costante di Lebesgue è di ordine $O(\log n)$. Il problema nasce quando consideriamo sottointervalli del periodo del tipo $[-\omega, \omega] \subseteq [-\pi, \pi]$, motivo per cui parleremo di interpolazione trigonometrica subperiodica: in questi intervalli, infatti, solo recentemente [1] è stato introdotto un insieme di interpolazione quasi ottimale.

A questo scopo, nel primo capitolo, detti $\{\xi_j\}$ con $j = 1, \ldots, 2n + 1$ i nodi di Chebyshev nell'intervallo $[-1, 1]$, cioè gli zeri del polinomio di Chebyshev $T_{2n+1}(x) = \cos((2n + 1) \arccos(x))$, definiremo gli angoli di tipo Chebyshev come

$$\theta_j = 2 \arcsin(\alpha \xi_j) \in (-\omega, \omega), \quad j = 1, \ldots, 2n + 1$$

Questi angoli ereditano le principali proprietà dei nodi di Chebyshev: in particolare l'insieme $\{\theta_j\}$ con $j = 1, \ldots, 2n+1$ è quasi ottimale per l'interpolazione trigonometrica subperiodica di grado n, com'è stato dimostrato in [1]. Osserveremo che, a tale scopo, l'unica caratteristica che devono avere gli angoli $\{\theta_j\}$ è che siano simmetrici, ovvero che siano simmetrici i nodi da cui essi derivano. Ecco, dunque, che possiamo creare differenti insiemi di questo tipo, a patto che la simmetria sia rispettata: oltre ad angoli di tipo Chebyshev derivanti da nodi di Chebyshev, considereremo anche il caso di angoli di tipo Chebyshev-Lobatto derivanti da nodi di Chebyshev-Lobatto. Infine, all'atto pratico, implementeremo i risultati raggiunti sul piano teorico in modo stabile ed efficiente, scrivendo l'interpolante trigonometrica nella forma di Lagrange baricentrica e procedendo in modo del tutto simile al caso algebrico.

Nel secondo capitolo daremo una stima della costante di Lebesgue per l'insieme $\{\theta_j\}$, analizzando però separatamente gli angoli di tipo Chebyshev e gli angoli di tipo Chebyshev-Lobatto. Per i primi, ripercorrendo i risultati di [4] e [5], riusciremo a dare una stima teorica, che vedremo combaciare con quella sul piano numerico: la costante di Lebesgue risulterà avere crescita logaritmica, essere invariante rispetto a ω e il suo massimo si raggiungerà per $\theta = \pm\omega$. Per i secondi, invece, non si è ancora ottenuta una stima teorica, e bisognerà agire solo da un punto di vista numerico, andando a calcolare la costante di Lebesgue attraverso la matrice di Vandermonde. I risultati numerici mostreranno un comportamento della costante di Lebesgue diverso dal caso degli angoli di tipo Chebyshev, in particolare per $\omega > \pi/3$.

Nel terzo capitolo considereremo tre diverse sezioni di cerchio legate ad archi, settore anulare, zona circolare e lente simmetrica, e procederemo con l'interpolazione prodotto. Osserveremo che una funzione $F(x, y)$ definita in ciascuna di queste sezioni diventa in coordinate polari un polinomio misto algebrico/trigonometrico e, quindi, potremo considerare la funzione algebrica rispetto al raggio e trigonometrica rispetto all'angolo: l'interpolazione prodotto in tale spazio tensoriale si otterrà combinando l'interpolazione algebrica su $n+1$ nodi del raggio con l'interpolazione trigonometrica subperiodica su $2n+1$ nodi dell'angolo. Infine, spiegheremo come implementare in Matlab una funzione che combini queste due interpolazioni e vedremo degli esempi pratici per ogni sezione.