



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
Laurea Magistrale in Matematica

Interpolazione polinomiale e cubatura algebrica su sottoregioni della sfera

Relatore: Dott. Alvisè Sommariva
Correlatore: Prof. Marco Vianello

Laureando: Mariano Gentile

A.A. 2011/2012

Sommario

In questo lavoro presenteremo una formula per l'integrazione numerica su alcune regioni della sfera, includendo cupole e sottoregioni di cupole. La formula è definita su dimensioni arbitrarie, ha pesi positivi ed è esatta per polinomi sferici di grado minore o uguale ad n . Presenteremo una proprietà di regolarità per una generica formula di cubatura con pesi positivi in queste regioni. Introduciamo inoltre le (Weakly) Admissible Mesh e le costruiamo su alcune regioni della sfera, fornendo anche formule e algoritmi per l'interpolazione. Test numerici in diverse dimensioni mostreranno la validità delle nostre formule. Tutti i codici sono scritti in Matlab e sono forniti nell'appendice di questo lavoro.

In this work we present a rule for numerical integration over some regions of the sphere, that includes caps and certain subregions of caps. The rule works in arbitrary dimension, it has positive weights and is exact for all spherical polynomials of degree less or equal than n . We present a regularity property for rules with positive weights in these regions. We also give a general introduction to (Weakly) Admissible Meshes and we construct them on some regions of the sphere, providing formulas and algorithms for the interpolation. Numerical tests in different dimensions show the performance of our formulas. All the codes are written in Matlab and are provided in the Appendix of this work.

Indice

1	Introduzione	4
1.1	Notazioni	5
1.2	Polinomi sferici	7
2	Cubatura numerica	13
2.1	Costruzione di formule di cubatura numerica su triangoli e quadrati non standard in \mathbb{S}^d	13
2.2	Stime sui pesi di una formula di cubatura su regioni di \mathbb{S}^d	20
2.3	Casi particolari su \mathbb{S}^2 : le cupole	28
3	Esempi di cubatura	36
3.1	Esempi su \mathbb{S}^d	36
3.2	Esempi su \mathbb{S}^2	41
3.3	Casi particolari su \mathbb{S}^2 : le cupole	44
4	Le WAM sulla sfera	45
4.1	Introduzione sulle WAM	45
4.2	Costruzione di WAM su parti di sfera	48
5	Esempi di WAM e interpolazione	53
5.1	Esempi su regioni generiche di \mathbb{S}^2	54
6	Appendice	55
6.1	Commenti sulla costruzione dei codici Matlab	55
6.2	Codici di Matlab e di Mathematica usati	55

1 Introduzione

In questa sezione ci occuperemo dell'integrazione numerica sulla sfera (unitaria) $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$

$$\mathbb{S}^d := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d+1} : \|\mathbf{x}\| = 1\}$$

dove con $\|\cdot\|$ intendiamo la norma Euclidea in \mathbb{R}^{d+1} , riponendo particolare interesse al caso $d = 2$. In [35], [34] e [20] sono state considerate varie questioni legate alla cubatura numerica sulla sfera multivariata e sue cupole. Citiamo anche i lavori [24] e [25] che cercano sottoregioni diverse dalle cupole, dove si afferma l'esistenza di formule di cubatura per scattered data che soddisfino una data regolarità, e [21] dove è studiata una formula di cubatura per i triangoli sferici. Ci proponiamo di continuare questo studio e di ampliarlo ad altre regioni, in particolare parti di cupole sferiche come nel seguito specificheremo, o regioni delimitate da paralleli e meridiani.

Nel seguito saranno date formule di integrazione esatte per polinomi sferici di grado $\leq n$ su regioni di \mathbb{S}^d ove useremo il prodotto tensoriale e le formule di integrazione per polinomi trigonometrici su sottointervalli di $[0, 2\pi]$ studiate negli articoli [9] [14] [15] [16] [13].

Analizzeremo inoltre alcune considerazioni teoriche per una generica formula di integrazione che si pretende sia esatta per polinomi di grado $\leq n$ su \mathbb{S}^d .

Mostreremo alcuni esempi di cubatura numerica in \mathbb{S}^2 e \mathbb{S}^4 , fornendo agli utenti i relativi codici Matlab posti in Appendice.

In seguito introdurremo le WAM, studiate ad esempio in [12], [8], [7], [30], [31], [4], [11] e altri. Mostreremo la loro relazione con l'interpolazione polinomiale, e costruiremo WAM su regioni della sfera \mathbb{S}^2 .

In letteratura l'interpolazione sulla sfera è stata studiata per lo più a livello globale, o su cupole, come ad esempio in [34] mentre sembrano non essere presenti risultati per altri tipi di regioni. In questo lavoro ci proponiamo di studiare alcune regioni, che comprenderanno come casi particolari anche anelli e slice.

Effettueremo infine degli esperimenti sull'interpolazione su regioni della sfera \mathbb{S}^2 , analizzando anche gli aspetti implementativi.

1.1 Notazioni

In questo lavoro, posti $\mathbf{x} = (x_k)_{k=1,\dots,d+1}$, $\mathbf{y} = (y_k)_{k=1,\dots,d+1}$, denoteremo con

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sum_{k=1}^{d+1} x_k^2$$

la distanza Euclidea in \mathbb{R}^{d+1} , mentre con

$$\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \arccos(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_k x_k \cdot y_k$$

intenderemo la distanza geodetica tra \mathbf{x} e \mathbf{y} sulla sfera.

La *geodetica* è definita per qualsiasi spazio metrico X , come la curva che descrive localmente la traiettoria più breve tra due punti di X (per maggiori dettagli sulle geodetiche, si può vedere ad esempio cf. [39], Cap. 2.2).

Un'altra definizione equivalente descrive le geodetiche come le traiettorie percorse da un punto che si muove a velocità costante, senza forze su di esso che ne modifichino il moto, con le eccezioni dei vincoli alla traiettoria affinché non esca fuori dallo spazio considerato.

Nel caso della sfera \mathbb{S}^2 si può verificare che le geodetiche sono tutte e sole gli archi di cerchi massimi, ovvero archi di cerchi concentrici alla sfera. Tutti i meridiani sono cerchi massimi, ad esempio, ma non i paralleli (con l'eccezione dell'Equatore).

Nel seguito useremo polinomi sferici di grado $\leq n$. Con essi intenderemo polinomi di grado $\leq n$ in \mathbb{R}^{d+1} ristretti a \mathbb{S}^d , ovvero:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_n(\mathbb{S}^d) &= \{p(\mathbf{x}) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R}^{d+1}) : \mathbf{x} \in \mathbb{S}^d\} = \\ &= \left\{ p(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N a_j x_1^{b_{1,j}} \dots x_{d+1}^{b_{d+1,j}} : \|\mathbf{x}\|_2 = 1, \sum_{k=1}^{d+1} b_{k,j} \leq n, \forall 1 \leq j \leq N \right\} \end{aligned}$$

Useremo inoltre due classiche parametrizzazioni della sfera.

La prima parametrizzazione è quella delle *coordinate ipersferiche*, e prevede l'utilizzo di un angolo $\phi \in [0, 2\pi]$ e angoli $\theta_i \in [0, \pi]$ tali che

$$\begin{cases} x_1 &= \cos(\phi) \sin(\theta_{d-2}) \dots \sin(\theta_1) \\ x_2 &= \sin(\phi) \sin(\theta_{d-2}) \dots \sin(\theta_1) \\ x_3 &= \cos(\theta_{d-2}) \sin(\theta_{d-3}) \dots \sin(\theta_1) \\ x_4 &= \cos(\theta_{d-3}) \sin(\theta_3) \dots \sin(\theta_1) \\ &\dots \\ x_{d-1} &= \cos(\theta_2) \sin(\theta_1) \\ x_d &= \cos(\theta_1) \end{cases} \quad (1)$$

e il relativo elemento di volume è $\sin^{d-2}(\theta_1) \sin^{d-3}(\theta_2) \dots \sin(\theta_{d-2})$.

La seconda parametrizzazione prevede la sostituzione $t = \cos(\theta_1)$ e di conseguenza $\sin(\theta_1) = \sqrt{1-t^2}$. Quindi:

$$\int_{\mathbb{S}^d} d\mathbf{S}^d(\mathbf{x}) = |\mathbb{S}^{d-1}| \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{d-2}{2}} dt \quad (2)$$

ove abbiamo denotato $d\mathbf{S}^d(\mathbf{x})$ l'elemento di superficie di \mathbb{S}^d e con $|\mathbb{S}^{d-1}|$ l'area della superficie di \mathbb{S}^{d-1} .

In entrambi i casi denoteremo con \mathbf{z} il Polo Nord della sfera, ossia il punto di coordinate cartesiane $\mathbf{z} = (0, 0, \dots, 0, 1)$.

In questo lavoro studieremo punti su porzioni della *cupola di sfera* \mathfrak{C} , denotata con $\mathfrak{C}(\mathbf{x}, \gamma), 0 \leq \gamma \leq \pi$:

$$\mathfrak{C}(\mathbf{x}, \gamma) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{S}^d : \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \geq \cos \gamma\}$$

Si osserva facilmente che se in particolare $\mathbf{x} = \mathbf{z}$, con \mathbf{z} Polo Nord, utilizzando le coordinate in (2):

$$\mathfrak{C}(\mathbf{z}, \gamma) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^d : x_{d+1} \geq \cos \gamma\}$$

Definiamo inoltre il *triangolo sferico non standard* in \mathbb{S}^d , come la porzione di cupola, nelle coordinate in (1):

$$\mathfrak{P}_{\gamma, \tau_1, \dots, \tau_{d-1}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^d : \theta_i \leq \tau_i, \phi \leq \gamma\}$$

e analogamente la seguente regione che diremo *quadrato non standard*:

$$\mathfrak{R}_{\gamma_s, \gamma_f, \tau_{1,s}, \tau_{1,f}, \dots, \tau_{d-1,s}, \tau_{d-1,f}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^d : \tau_{i,s} \leq \theta_i \leq \tau_{i,f}, \gamma_s \leq \phi \leq \gamma_f\}$$

di cui il triangolo non standard è un caso particolare con $\gamma_s = 0, \tau_{i,s} = 0$. Osserviamo che queste due regioni in generale non coincidono con i relativi classici

poligoni sferici in quanto i lati, in generale, non giacciono su geodetiche. Intuitivamente tale regione $\mathfrak{R}_{\gamma_s, \gamma_f, \tau_s, \tau_f}$ in \mathbb{S}^2 non è altro che la regione di sfera racchiusa tra due paralleli e due meridiani, nelle usuali coordinate geografiche con latitudine e longitudine. Si noti che casi particolari di tale regione sono anche le *slice* e gli *anelli*.

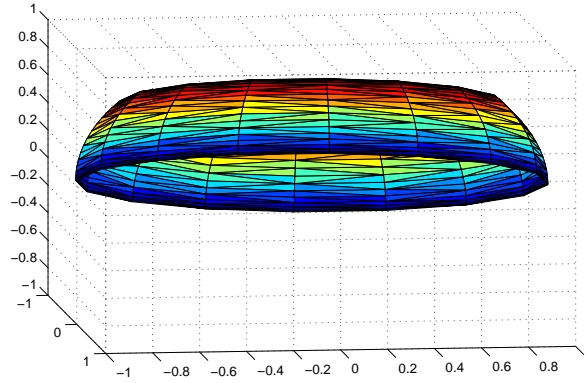


Figura 1: *Esempio di anello su \mathbb{S}^2*

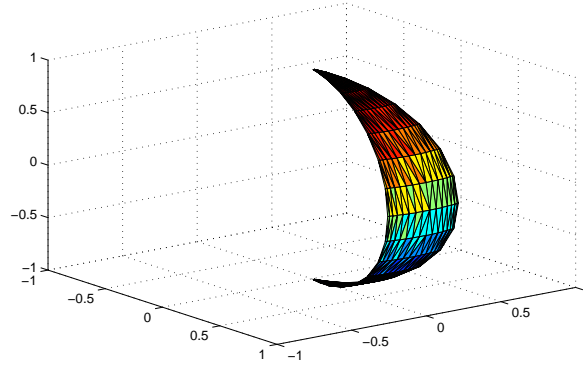


Figura 2: *Esempio di slice su \mathbb{S}^2*

1.2 Polinomi sferici

Introduciamo di seguito alcune nozioni sui polinomi sferici, di cui ci occuperemo successivamente per l'interpolazione e la cubatura. Sia $[a, b]$ generico intervallo

sulla retta reale, denoteremo con $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ lo spazio dei polinomi di grado $\leq n$ in una variabile, e con $\mathbb{P}_n([a, b])$ la restrizione di tali polinomi all'intervallo $[a, b]$ ovvero:

$$\mathbb{P}_n([a, b]) := \{p(\mathbf{x}) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) : \mathbf{x} \in [a, b]\}$$

Analogamente definiamo lo spazio $\mathbb{P}_n(\mathbb{S}^d)$ dei *polinomi sferici* su \mathbb{S}^d come lo spazio dei polinomi in \mathbb{R}^{d+1} ristretti alla sfera \mathbb{S}^d di grado inferiore o uguale a n precisamente:

$$\mathbb{P}_n(\mathbb{S}^d) := \{p(\mathbf{x}) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R}^{d+1}) : \mathbf{x} \in \mathbb{S}^d\}$$

Nonostante la definizione sembri molto intuitiva ed elementare, i due spazi $\mathbb{P}_n(\mathbb{R}^{d+1})$ e $\mathbb{P}_n(\mathbb{S}^d)$ differiscono notevolmente tra loro. Ad esempio la dimensione di $\mathbb{P}_n(\mathbb{S}^d)$ differisce dalla dimensione di $\mathbb{P}_n(\mathbb{R}^{d+1})$, un semplice esempio di tale fatto in \mathbb{S}^2 è il seguente: siano

$$\begin{aligned} p_1 &:= 1 \\ p_2 &:= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \end{aligned}$$

Si può facilmente osservare che $p_1 \neq p_2$ in $\mathbb{P}_n(\mathbb{R}^3)$ ma $p_1 = p_2$ in $\mathbb{P}_n(\mathbb{S}^2)$. Introduciamo ora un breve cenno sulla costruzione dei polinomi sferici e ne calcoleremo la dimensione.

Definiamo i polinomi omogenei di grado n come:

$$\mathbb{PO}_n(\mathbb{R}^d) := \left\{ \sum_{b_1 + \dots + b_d = n} a_{b_1, \dots, b_d} x_1^{b_1} \dots x_d^{b_d} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \right\}$$

ovvero un polinomio i cui termini siano tutti di grado n . Per definire la dimensione di tale spazio $\mathbb{PO}_n(\mathbb{R}^d)$, dobbiamo contare tutti i monomi in d variabili di grado n , come in (cf. [2], [26]). Per farlo si può ragionare nel seguente modo: prendiamo i numeri $1, 2, \dots, n + d - 1$ e rimuoviamo da essi $d - 1$ numeri, chiamiamoli $\beta_1 < \dots < \beta_{d-1}$, aggiungendo infine $\beta_0 = 0, \beta_d = n + d$. Quindi definiamo $\alpha_i := \beta_i - \beta_{i-1} - 1, 1 \leq i \leq d$, ovvero il numero di interi tra β_i e β_{i-1} esclusi. Si può osservare che in effetti $\sum_{i=1}^d \alpha_i = n$ e quindi si ricava una biiezione tra gli esponenti b_1, \dots, b_d dei polinomi omogenei e i numeri rimossi $\beta_1, \dots, \beta_{d-1}$. Di conseguenza la dimensione cercata è uguale al numero di scelte possibili di $d - 1$ numeri in un'insieme di $n + d - 1$, che equivalgono a:

$$\dim \mathbb{PO}_n(\mathbb{R}^d) = \binom{n + d - 1}{d - 1} = \binom{n + d - 1}{n}$$

Ricordiamo inoltre che una funzione f si dice *armonica*, se $\Delta f(\mathbf{x}) = 0$, dove indichiamo con Δ il Laplaciano:

$$\Delta f := \sum_i \frac{d^2 f}{dx_i^2}.$$

A questo punto siamo in grado di definire la restrizione di un polinomio omogeneo armonico in \mathbb{R}^{d+1} di grado k sulla sfera \mathbb{S}^d come:

$$\mathbb{H}_k(\mathbb{S}^d) := \{p \in \mathbb{P}\mathbb{O}_k(\mathbb{R}^{d+1}) : \Delta p(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \mathbb{S}^d\}$$

detta *armonica sferica di grado k* (cf. [20], [2], [26]). (inserire bibliografia) Vogliamo ora calcolare la dimensione di $\mathbb{H}_k(\mathbb{S}^d)$ che denoteremo $\mathbf{Z}(d, k)$. Calcoliamo in verità la dimensione di $\mathbb{H}_k(\mathbb{R}^{d-1})$ ma verificheremo che le due dimensioni in effetti coincideranno. Cominciamo notando che $p \in \mathbb{P}\mathbb{O}_k(\mathbb{R}^{d+1})$ può essere scritto nella forma (cf. [2] cap.2)

$$p(x_1, \dots, x_{d+1}) = \sum_{j=0}^k (x_{d+1})^j p_{k-j}(x_1, \dots, x_d), p_{k-j} \in \mathbb{P}\mathbb{O}_{k-j}(\mathbb{R}^d)$$

a cui applichiamo l'operatore Laplaciano (il pedice $\Delta_{(d)}$ indica che l'operatore è applicato a d variabili) ottenendo

$$\begin{aligned} \Delta_{(d+1)} p(x_1, \dots, x_{d+1}) &= \sum_{j=0}^{k-2} (x_{d+1})^j [\Delta_{(d)} p_{k-j}(x_1, \dots, x_d) \\ &\quad + (j+2)(j+1) p_{k-j-2}(x_1, \dots, x_d)] \end{aligned}$$

considerando invece $p(x_1, \dots, x_{d+1}) \in \mathbb{H}_k(\mathbb{R}^{d+1})$, avremo che il Laplaciano di tale polinomio è nullo di conseguenza

$$p_{k-j-2} = -\frac{1}{(j+2)(j+1)} \Delta_{(d)} p_{k-j}, 0 \leq j \leq k-2$$

quindi quello che si può osservare è che un polinomio in $\mathbb{H}_k(\mathbb{R}^{d+1})$ è completamente determinato da $p_1 \in \mathbb{P}\mathbb{O}_k(\mathbb{R}^d)$ e da $p_2 \in \mathbb{P}\mathbb{O}_{k-1}(\mathbb{R}^d)$. In questo modo siamo arrivati alla seguente relazione:

$$\mathbf{Z}(d, k) = \dim \mathbb{P}\mathbb{O}_k(\mathbb{R}^d) + \dim \mathbb{P}\mathbb{O}_{k-1}(\mathbb{R}^d)$$

Dato che conosciamo una formula chiusa per la dimensione degli spazi $\mathbb{P}\mathbb{O}_k(\mathbb{R}^d)$, possiamo concludere che (cf. [20], [2], [26]):

$$\mathbf{Z}(d, k) := \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0 \\ \frac{(2k+d-1)\Gamma(k+d-1)}{\Gamma(d)\Gamma(k+1)} & \text{se } k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3)$$

(ricordiamo la ben nota proprietà della funzione gamma $\Gamma(k) = (k-1)!, k \in \mathbb{N}$). Come preannunciato quella calcolata è la dimensione di $\mathbb{H}_k(\mathbb{R}^{d+1})$. Dato $p \in \mathbb{H}_k(\mathbb{R}^{d+1})$, $Y \in \mathbb{H}_k(\mathbb{S}^d)$, si può osservare che vale la seguente relazione:

$$p(r\xi) = r^k Y(\xi)$$

di conseguenza $\dim \mathbb{H}_k(\mathbb{R}^{d+1}) = \dim \mathbb{H}_k(\mathbb{S}^d)$, come volevamo.

Teniamo presente inoltre che le armoniche sferiche di gradi differenti sono mutualmente ortogonali, (Corollario 2.15 [2]), quindi lo spazio $\mathbb{P}_n(\mathbb{S}^d)$ può essere rappresentato come somma diretta $\bigoplus_{k=0}^n \mathbb{H}_k(\mathbb{S}^d)$ (Corollario 2.19 [2]), da cui la sua dimensione sarà :

$$\sum_{k=0}^n \mathbf{Z}(d, k) = \frac{(2n+d)\Gamma(n+d)}{\Gamma(d+1)\Gamma(n+1)} = \mathbf{Z}(d+1, n) \sim (n+1)^d \quad (4)$$

Fissati $\alpha, \beta > -1$, sia $\mathbf{P}_k^{(\alpha, \beta)}$ il *polinomio di Jacobi* di grado k e esponenti α, β (cf. [2], [17], [38]) (se $\alpha, \beta = 0$ il polinomio di Jacobi viene detto *polinomio di Legendre*):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k^{(\alpha, \beta)}(t) &:= \frac{(-1)^k}{2^k k!} (1-t)^{-\alpha} (1+t)^{-\beta} \frac{d^k}{dt^k} [(1-t)^{\alpha+k} (1+t)^{\beta+k}] = \\ &= \sum_{s=0}^k \binom{n+\alpha}{s} \binom{n+\beta}{n-s} \left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-s} \left(\frac{x+1}{2}\right)^s \end{aligned}$$

I polinomi di Jacobi sono caratterizzati dall'essere un insieme completo di polinomi ortogonali nell'intervallo $[-1, 1]$ rispetto al seguente prodotto scalare pesato:

$$(f, g)_{\mathbf{L}_2^{(\alpha, \beta)}([-1, 1])} := \int_{-1}^1 f(t)g(t)(1-t)^\alpha(1+t)^\beta dt$$

dove la normalizzazione imposta su tali polinomi sarà (cf. [38], (4.1.1)):

$$\mathbf{P}_k^{(\alpha, \beta)}(1) = \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)} \quad (5)$$

e (cf. [38], (4.3.3)):

$$\int_{-1}^1 |\mathbf{P}_k^{(\alpha, \beta)}(t)|^2 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta dt = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{(2k+\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+\beta+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\alpha+\beta+1)}$$

Siano ora $\{\mathbf{Y}_{k,1}^d, \mathbf{Y}_{k,2}^d, \dots, \mathbf{Y}_{k,\mathbf{Z}(d,k)}^d\}$ una base ortonormale di $\mathbb{H}_k(\mathbb{S}^d)$ rispetto al prodotto interno di $\mathbf{L}_2(\mathbb{S}^d)$. Per tale base vale il cosiddetto *addition theorem* (cf. [2] Teorema 2.9 (inserire bibliografia)):

$$\sum_{i=1}^{\mathbf{Z}(d,k)} \mathbf{Y}_{k,i}^d(\mathbf{x}) \mathbf{Y}_{k,i}^d(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{Z}(d,k)}{|\mathbb{S}^d|} \frac{\mathbf{P}_k^{((d-2)/2, (d-2)/2)}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})}{\mathbf{P}_k^{((d-2)/2, (d-2)/2)}(1)}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{S}^d$$

Inoltre lo spazio $\mathbb{H}_k(\mathbb{S}^d)$ è un *reproducing kernel Hilbert space* con reproducing kernel $\mathbf{K}_k^d : \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\mathbf{K}_k^d := \sum_{i=1}^{\mathbf{Z}(d,k)} \mathbf{Y}_{k,i}^d(\mathbf{x}) \mathbf{Y}_{k,i}^d(\mathbf{y})$$

Un reproducing kernel Hilbert space, in breve RKHS, è definito come uno spazio di Hilbert (con prodotto interno e che sia completo rispetto alla distanza indotta) di funzioni $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, tale che contenga un *reproducing kernel*.

Una funzione reproducing kernel possiede due importanti proprietà di seguito elencate. Sia \mathbb{RK} un RKHS di funzioni sullo spazio \mathbb{R}^d , (\cdot, \cdot) il prodotto interno in \mathbb{RK} , e \mathbf{K} il suo reproducing kernel. Allora:

$$\begin{cases} \mathbf{K}(\cdot, \mathbf{y}) \in \mathbb{RK}, & \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d \\ (g, \mathbf{K}(\cdot, \mathbf{y})) = g(\mathbf{y}), & \forall g \in \mathbb{RH}, \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d \end{cases} \quad (6)$$

Nel nostro caso specifico quindi si avrà :

$$\begin{cases} \mathbf{K}_k^d(\cdot, \mathbf{y}) \in \mathbb{H}_k(\mathbb{S}^d), & \forall \mathbf{y} \in \mathbb{S}^d \\ (g, \mathbf{K}_k^d(\cdot, \mathbf{y}))_{\mathbf{L}_2(\mathbb{S}^d)} = g(\mathbf{y}), & \forall g \in \mathbb{H}_k(\mathbb{S}^d), \forall \mathbf{y} \in \mathbb{S}^d \end{cases} \quad (7)$$

Anche lo spazio dei polinomi $\mathbb{P}_n(\mathbb{S}^d)$ è un reproducing kernel Hilbert space con la seguente funzione $\mathbf{G}_n^d : \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\mathbf{G}_n^d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^{\mathbf{Z}(d,k)} \mathbf{Y}_{k,i}^d(\mathbf{x}) \mathbf{Y}_{k,i}^d(\mathbf{y}) = \frac{1}{|\mathbb{S}^d|} \frac{\Gamma(d/2)\Gamma(n+d)}{\Gamma(d)\Gamma(n+d/2)} \mathbf{P}_n^{(d/2, (d-2)/2)}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \quad (8)$$

Quindi anche \mathbf{G}_n^d possiede le due proprietà di reproducing kernel:

$$\begin{cases} \mathbf{G}_n^d(\cdot, \mathbf{y}) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{S}^d), & \forall \mathbf{y} \in \mathbb{S}^d \\ (p, \mathbf{G}_n^d(\cdot, \mathbf{y}))_{\mathbf{L}_2(\mathbb{S}^d)} = p(\mathbf{y}), & \forall p \in \mathbb{P}_n(\mathbb{S}^d), \forall \mathbf{y} \in \mathbb{S}^d \end{cases} \quad (9)$$

Per approfondimenti in questi temi si consideri [2], [17], [38].

Nel seguito del lavoro intendiamo determinare formule di cubatura su porzioni di sfera. Vogliamo mostrare che non è restrittivo studiare il problema considerando tutte le regioni riferite al Polo Nord, in quanto con una opportuna rotazione si possono cambiare le coordinate e riportare i risultati su una simile regione generica della sfera, senza influire sull'esattezza di una formula di cubatura. In particolare ciò ci consente di considerare unicamente cupole e parti di cupole centrate nel Polo Nord senza perdita di generalità ovvero più precisamente:

Lemma 1 Sia $\mathfrak{R} \subset \mathbb{S}^d$ regione precedentemente definita con intervalli $[\tau_{i,s}, \tau_{i,f}]$ e $[\gamma_s, \gamma_f]$, sia $\mathbf{z} = \mathbf{e}_{d+1}$ il Polo Nord e $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, $i = 1, \dots, d$ vettori unitari di una base ortonormale. Consideriamo la formula

$$\mathcal{Q}_{\mathfrak{R}}(f) := \sum_{j=1}^N \lambda_j f(\mathbf{x}_j) \approx \int_{\mathfrak{R}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{S}^d$$

dove f è una funzione continua in \mathfrak{R} , i nodi $\{\mathbf{x}_i\} \in \mathfrak{R}$, i pesi $\{\lambda_i\} \in \mathbb{R}$ e supponiamo sia la formula esatta per l'integrazione in $\mathbb{P}_n(\mathfrak{R})$, spazio dei polinomi di grado al più n definiti su \mathfrak{R} . Sia $\mathfrak{R}^* \subset \mathbb{S}^d$ un'altra regione definita utilizzando coordinate tali che \mathbf{z}^* e \mathbf{e}_i^* siano rispettivamente il Polo Nord e i punti $(0, \dots, 1, \dots, 0)$, e che abbia gli stessi intervalli $[\tau_{i,s}, \tau_{i,f}]$ e $[\gamma_s, \gamma_f]$, e sia \mathbf{A} una rotazione in \mathbb{R}^{d+1} tale che $\mathbf{z}^* = \mathbf{A}\mathbf{z}$ e $\mathbf{e}_i^* = \mathbf{A}\mathbf{e}_i$. Allora la formula

$$\mathcal{Q}_{\mathfrak{R}^*}(f) := \sum_{j=1}^N \lambda_j f(\mathbf{A}\mathbf{x}_j) \approx \int_{\mathfrak{R}^*} f(\mathbf{x}) d\mathbf{S}^d$$

con f funzione continua in \mathfrak{R}^* e i nodi $\{\mathbf{A}\mathbf{x}_i\} \in \mathfrak{R}^*$, è esatta su $\mathbb{P}_n(\mathfrak{R}^*)$.

Dimostrazione

Sia $p \in \mathbb{P}_n(\mathfrak{R}^*)$ allora

$$\mathcal{Q}_{\mathfrak{R}^*}(p) = \sum_{j=1}^N \lambda_j p(\mathbf{A}\mathbf{x}_j).$$

Ricordiamo che lo spazio dei polinomi $\mathbb{P}_n(\mathbb{S}^d)$ è invariante per rotazioni ovvero $\mathbb{P}_n(\mathbb{S}^d) = \{p \circ \mathbf{A} : p \in \mathbb{P}_n(\mathbb{S}^d)\}$. Inoltre dato che la rotazione \mathbf{A} è una mappa biunivoca tra \mathfrak{R}^* e \mathfrak{R} , allora $p \circ \mathbf{A} \in \mathbb{P}_n(\mathfrak{R})$. Dato che \mathcal{Q} è esatta per $\mathbb{P}_n(\mathfrak{R})$ allora

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j p(\mathbf{A}\mathbf{x}_j) = \int_{\mathfrak{R}} p(\mathbf{A}\mathbf{y}) d\mathbf{S}^d = \int_{\mathfrak{R}^*} p(\mathbf{x}) d\mathbf{S}^d$$

dove abbiamo effettuato il cambio di coordinate $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{x}$ grazie al fatto che $\det(\mathbf{A}) = 1$. \square

2 Cubatura numerica

2.1 Costruzione di formule di cubatura numerica su triangoli e quadrati non standard in \mathbb{S}^d

Una delle intenzioni di questo lavoro consiste nel determinare formule di cubatura su certe sottoregioni della sfera. A tal proposito risulta utile ricordare alcune proprietà dei polinomi di Legendre e introdurre la *funzione associata di Legendre*.

Come anticipato il polinomio di Legendre $\mathbf{P}_{n,d}$ è definito come:

$$\mathbf{P}_{n,d}(t) = n! \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(1-t^2)^k t^{n-2k}}{4^k k! (n-2k)! \Gamma(k + \frac{d-1}{2})} \quad (10)$$

i cui pedici indicano rispettivamente il grado del polinomio e la dimensione dello spazio su cui è definito. Per $d = 3$ si parla anche di *polinomio di Legendre standard*. Normalmente con i polinomi di Legendre si intendono polinomi ortogonali per il prodotto scalare $(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$, ovvero con la proprietà che:

$$\int_{-1}^1 p_m(x)p_n(x)dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}$$

I polinomi di Legendre descritti sono una loro generalizzazione, in quanto ortogonali per il seguente prodotto scalare:

$$(f, g)_\zeta = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\xi \cdot \zeta) g(\xi \cdot \zeta) d\mathbf{S}^{d-1}(\xi)$$

In particolare effettuando i seguenti cambi di variabile (si osservi che il pedice d dei polinomi di Legendre si riferisce allo spazio \mathbb{R}^d e di conseguenza alla sfera \mathbb{S}^{d-1}) otteniamo la seguente proprietà di ortogonalità :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathbf{P}_{m,d}(\xi \cdot \zeta) \mathbf{P}_{n,d}(\xi \cdot \zeta) d\mathbf{S}^{d-1}(\xi) = \\ &= \int_{\mathbb{S}^{d-2}} \int_{-1}^1 \mathbf{P}_{m,d}(t) \mathbf{P}_{n,d}(t) (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} dt d\mathbf{S}^{d-2} = \\ &= |\mathbb{S}^{d-2}| \int_{-1}^1 \mathbf{P}_{m,d}(t) \mathbf{P}_{n,d}(t) (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} dt = 0, \quad m \neq n \end{aligned}$$

Più precisamente:

$$\int_{-1}^1 \mathbf{P}_{m,d}(t) \mathbf{P}_{n,d}(t) (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} dt = \frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{|\mathbb{S}^{d-2}| \mathbf{Z}(d-1, k)} \delta_{mn}$$

Si può facilmente verificare che nel caso del polinomio *standard* di Legendre, ovvero per $d = 3$, la proprietà di ortogonalità è effettivamente la stessa di quella prima citata.

Denotiamo con $\mathbf{P}_{n,d}^{(m)}(t)$ la derivata di grado m del polinomio di Legendre

$$\mathbf{P}_{n,d}^{(m)}(t) := \frac{d^m}{dt^m} \mathbf{P}_{n,d}(t)$$

Per $d \geq 3$ definiamo dunque la *funzione associata di Legendre*:

$$\mathbf{P}_{n,d,m}(t) = \frac{(n+d-3)!}{(n+m+d-3)!} (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \mathbf{P}_{n,d}^{(m)}(t), t \in [-1, 1] \quad (11)$$

Si faccia attenzione al fatto che il pedice d di $\mathbf{P}_{n,d,m}$ si riferisce allo spazio \mathbb{R}^d mentre l'apice d di $\mathbf{Y}_{k,m}^d$ si riferisce alla sfera \mathbb{S}^d .

Si noti che $\mathbf{P}_{n,d,m}(t)$ è un polinomio solo per m pari, ma può diventare un polinomio trigonometrico con la sostituzione $t = \cos(\theta)$ e $(1-t^2)^{m/2} = \sin^m(\theta)$, come vedremo in seguito.

Definiamo infine la *funzione di Legendre normalizzata*:

$$\tilde{\mathbf{P}}_{n,d,m}(t) = \frac{(n+d-3)!}{n! \Gamma(\frac{d-1}{2})} \left[\frac{(2n+d-2)(n-m)!}{2^{d-2}(n+d+m-3)!} \right]^{1/2} (1-t^2)^{m/2} \mathbf{P}_{n,d}^{(m)}(t), t \in [-1, 1] \quad (12)$$

dove con $\mathbf{P}_{n,d}^{(m)}$ indichiamo la derivata di grado m di $\mathbf{P}_{n,d}$. Enunciamo ora un risultato fondamentale per i nostri scopi, discendente direttamente da [2], Teorema 2.47 e dalla sua dimostrazione.

Teorema 1 Sia $\{\mathbf{Y}_{k,j}^{d-1} : 1 \leq j \leq \mathbf{Z}(d-1, k)\}$ una base ortonormale per $\mathbb{H}_k(\mathbb{S}^{d-1})$, con $0 \leq k \leq n$, allora

$$\left\{ \tilde{\mathbf{P}}_{n,d+1,k}(t) \mathbf{Y}_{k,j}^{d-1}(\xi_{d-1}) : 1 \leq j \leq \mathbf{Z}(d-1, k), 0 \leq k \leq n \right\} \quad (13)$$

con $\xi_{d-1} \in \mathbb{S}^{d-1}$, e $\xi_d = t\mathbf{e}_d + \sqrt{1-t^2}(\xi_{d-1}, 0)^T \in \mathbb{S}^d$, è una base ortonormale per $\mathbb{H}_n(\mathbb{S}^d)$.

Prima di esporre il risultato principale di questo capitolo, enunciamo il seguente Lemma:

Lemma 2 Siano $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_+$, allora:

$$\sin^{n_1}(\theta) \cos^{n_2}(\theta) = C + \sum_{j=1}^{M_s} c_{1,j} \sin(\alpha_j \theta) + \sum_{k=1}^{M_c} c_{2,k} \cos(\beta_k \theta)$$

per opportuni $C, c_{1,j}, c_{2,k} \in \mathbb{R}, \forall j, k$ che possono eventualmente annullarsi o essere negativi e inoltre $\alpha_j, \beta_k \in \mathbb{N}_+, \alpha_j, \beta_k \leq n_1 + n_2, \forall j, k$, e $M_s, M_c < \infty$.

Dimostrazione

Ricordiamo che:

- per n pari:

$$\cos^n(\theta) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{n/2} + \frac{2}{2^n} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{n}{k} \cos((n-2k)\theta)$$

$$\sin^n(\theta) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{n/2} + \frac{2}{2^n} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} (-1)^{\frac{n}{2}-k} \binom{n}{k} \cos((n-2k)\theta)$$

- per n dispari:

$$\cos^n(\theta) = \frac{2}{2^n} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{k} \cos((n-2k)\theta)$$

$$\sin^n(\theta) = \frac{2}{2^n} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^{\frac{n-1}{2}-k} \binom{n}{k} \sin((n-2k)\theta)$$

Le formule precedenti permettono di trasformare la potenza di un coseno e di un seno, in una sommatoria di costanti e di termini di primo grado, cambiando l'argomento delle funzioni.

Importante notare che i multipli degli argomenti nel membro di destra, sono sempre minori o uguali dell'esponente al membro di sinistra.

Usiamo le formule per calcolare $\sin^{n_1}(\theta) \cos^{n_2}(\theta)$. Per semplicità tralasciamo il calcolo delle costanti nelle formule. Sussistono essenzialmente quattro casi, a seconda che gli esponenti siano pari o dispari:

- n_1 pari, n_2 dispari

$$\sin^{n_1}(\theta) \cos^{n_2}(\theta) = \sum_{m_1=0}^{\frac{n_1}{2}-1} \sum_{m_2=0}^{\frac{n_2-1}{2}} c_{1,m_1,m_2} \cos((n_1-2m_1)\theta) \cos((n_2-2m_2)\theta) +$$

$$+ \sum_{m_2=0}^{\frac{n_2-1}{2}} c_{2,m_2} \cos((n_2 - 2m_2)\theta)$$

- n_1 pari, n_2 pari

$$\sin^{n_1}(\theta) \cos^{n_2}(\theta) = C + \sum_{m_1=0}^{\frac{n_1}{2}-1} \sum_{m_2=0}^{\frac{n_2}{2}-1} c_{1,m_1,m_2} \cos((n_1 - 2m_1)\theta) \cos((n_2 - 2m_2)\theta) +$$

$$+ \sum_{m_1=0}^{\frac{n_1}{2}-1} c_{2,m_1} \cos((n_1 - 2m_1)\theta) + \sum_{m_2=0}^{\frac{n_2}{2}-1} c_{3,m_2} \cos((n_2 - 2m_2)\theta)$$

- n_1 dispari, n_2 dispari

$$\sin^{n_1}(\theta) \cos^{n_2}(\theta) = \sum_{m_1=0}^{\frac{n_1-1}{2}} \sum_{m_2=0}^{\frac{n_2-1}{2}} c_{m_1,m_2} \sin((n_1 - 2m_1)\theta) \cos((n_2 - 2m_2)\theta)$$

- n_1 dispari, n_2 pari

$$\sin^{n_1}(\theta) \cos^{n_2}(\theta) = \sum_{m_1=0}^{\frac{n_1-1}{2}} c_{1,m_1} \sin((n_1 - 2m_1)\theta) +$$

$$+ \sum_{m_1=0}^{\frac{n_1-1}{2}} \sum_{m_2=0}^{\frac{n_2}{2}-1} c_{2,m_1,m_2} \sin((n_1 - 2m_1)\theta) \cos((n_2 - 2m_2)\theta)$$

Osserviamo che in tutti i casi si ha $0 \leq n_1 - 2m_1 \leq n_1$, $0 \leq n_2 - 2m_2 \leq n_2$.
Infine ricordiamo le seguenti formule trigonometriche:

$$\cos(\theta) \cos(\phi) = \frac{\cos(\theta - \phi) + \cos(\theta + \phi)}{2}$$

$$\sin(\theta) \cos(\phi) = \frac{\sin(\theta - \phi) + \sin(\theta + \phi)}{2}$$

In questo modo otteniamo che:

$$\sin^{n_1}(\theta) \cos^{n_2}(\theta) = C + \sum_j c_{1,j} \sin(a_{1,j}\theta) + \sum_j c_{2,j} \cos(a_{2,j}\theta)$$

dove $a_{1,j}, a_{2,j} \in \mathbb{N}$ e contenute nell'intervallo $[-(n_1 + n_2), (n_1 + n_2)]$. Dalle identità $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ e $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$, concludiamo che:

$$\sin^{n_1}(\theta) \cos^{n_2}(\theta) = C + \sum_j c_{1,j} \sin(\alpha_j \theta) + \sum_j c_{2,j} \cos(\beta_j \theta)$$

dove $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{N}_+ \cap [0, n_1 + n_2]$. \square

Quello che siamo riusciti ad ottenere con il Lemma precedente è la possibilità di riscrivere $\sin^{n_1}(\theta) \cos^{n_2}(\theta)$ come combinazione lineare di $1, \sin(\alpha\theta), \cos(\beta\theta)$ ovvero una immersione dello spazio

$$\text{span}\{1, \sin^{n_1}(\theta) \cos^{n_2}(\theta) : n_1 + n_2 \leq n, \theta \in [-\omega, \omega]\}$$

in quello dei *polinomi trigonometrici*

$$\mathbb{T}_n([-\omega, \omega]) = \text{span}\{1, \sin(k\theta), \cos(k\theta) : 1 \leq k \leq n, \theta \in [-\omega, \omega]\}$$

Richiamiamo ora la formula di quadratura esatta per lo spazio $\mathbb{T}_n([-\omega, \omega])$ di grado n definita negli articoli (cf. [9], [14], [15], [16], [13]).

Proposizione 1 *Siano $(\xi_j, \lambda_j)_{1 \leq j \leq n+1}$ i nodi e i pesi (positivi) della formula di quadratura algebrica Gaussiana relativa alla funzione peso:*

$$\mathcal{W}(x) = \frac{2 \sin(\omega/2)}{\sqrt{1 - \sin^2(\omega/2)x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$$

Allora

$$\int_{-\omega}^{\omega} f(\theta) d\theta = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j f(\phi_j), \quad f \in \mathbb{T}_n([-\omega, \omega]), 0 \leq \omega \leq \pi$$

dove

$$\phi_j = 2 \arcsin(\sin(\omega/2)\xi_j) \in (-\omega, \omega), j = 1, 2, \dots, n+1$$

Ricordando che con \mathfrak{R} indichiamo il *quadrato non standard* della sfera e con \mathfrak{P} il *triangolo non standard* ovvero la porzione di cupola, siamo ora in grado di esporre il seguente:

Teorema 2 *Sia $p \in \mathbb{P}_n(\mathfrak{R})$ (oppure $p \in \mathbb{P}_n(\mathfrak{P})$, ricordando che $\mathfrak{P}_{\gamma, \tau_1, \dots, \tau_{d-1}} = \mathfrak{R}_{0, \gamma, 0, \tau_1, \dots, 0, \tau_{d-1}}$), $\mathfrak{R} \subset \mathbb{S}^d$, e denotiamo con λ_{j_i} i pesi e con $\theta_{i, j_i}, \phi_{j_d}$ i nodi delle formule di quadratura Gaussiane subperiodiche definite nella Proposizione 1 di grado rispettivamente $n + (d - 1), n + (d - 2), \dots, n$, per gli intervalli $[\tau_{i,s}, \tau_{i,f}]$ e $[\gamma_s, \gamma_f]$ definiti in \mathfrak{R} (o $[0, \tau_i]$ e $[0, \gamma]$ se ci riferiamo a \mathfrak{P}). Consideriamo inoltre i seguenti punti aventi coordinate ipersferiche (cf. (1)):*

$$\xi_{j_1, \dots, j_d} = \xi(\theta_{1, j_1}, \theta_{2, j_2}, \dots, \theta_{d-1, j_{d-1}}, \phi_{j_d})$$

Allora la formula di cubatura:

$$\mathcal{Q}_{\mathfrak{R},n}(p) = \sum_{j_1=1}^{n+d} \sum_{j_2=1}^{n+d-1} \cdots \sum_{j_{d-1}=1}^{n+2} \sum_{j_d=1}^{n+1} \lambda_{j_1 \dots j_d} p(\xi_{j_1, \dots, j_d}) \quad (14)$$

avente $(n+d) \dots (n+1) = \frac{(n+d)!}{n!}$ nodi, ove i pesi sono definiti come

$$\lambda_{j_1 \dots j_d} = \lambda_{j_1} \dots \lambda_{j_d} \sin^{d-1}(\theta_{1,j_1}) \sin^{d-2}(\theta_{2,j_2}) \dots \sin(\theta_{d-1,j_{d-1}})$$

ha grado algebrico di precisione n .

Dimostrazione

Procediamo per induzione sulla dimensione del dominio d .

- Per primo caso consideriamo il cerchio \mathbb{S}^1 . La formula di cubatura (14) risulta essere, con le coordinate ipersferiche definite in (1)

$$\mathcal{Q}_{\mathfrak{R},n}(p) = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j p(\phi_j)$$

coincidendo con la formula di quadratura subperiodica esatta sullo spazio:

$$\mathbb{T}_n([\alpha, \beta]) = \text{span}\{1, \sin(k\theta), \cos(k\theta) : 1 \leq k \leq n, \theta \in [\alpha, \beta]\}$$

(si può trovare la dimostrazione di ciò in [15] oppure in [14]). Tale spazio è effettivamente una base per i polinomi in due variabili ristretti su \mathbb{S}^1 , ovvero sul cerchio. Per dimostrare tale affermazione, ricordiamo che $\mathbb{P}_n(\mathbb{S}^1) = \bigoplus_{k=0}^n \mathbb{H}_k(\mathbb{S}^1)$. Osserviamo ora che $\{\cos(k\theta), \sin(k\theta)\}$ è una base per $\mathbb{H}_k(\mathbb{S}^1)$, come si verifica facilmente controllando la dimensione $\mathbf{Z}(1, k) = 2$, da cui segue direttamente la conclusione.

- Risulta utile studiare a parte il caso di porzioni di dominio \mathfrak{R} o \mathfrak{P} della sfera \mathbb{S}^2 . Consideriamo il caso di $\mathbb{P}_n(\mathfrak{R})$ con intervalli $[\tau_s, \tau_f]$, $[\gamma_s, \gamma_f]$ e dimostriamo che la formula è esatta per una base dello spazio delle armoniche sferiche $\mathbf{Y}_{l,j}^2$ (ricordiamo che l'apice 2 non indica la potenza bensì ricorda che sono polinomi sulla sfera \mathbb{S}^2), ad esempio pp.133 – 134, [2]:

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_{l,1}^2(\xi) &= c_l \mathbf{P}_l(\cos(\theta)) \\ \mathbf{Y}_{l,2m}^2(\xi) &= c_{l,m} \mathbf{P}_{l,3,m}(\cos(\theta)) \cos(m\phi) \\ \mathbf{Y}_{l,2m+1}^2(\xi) &= c_{l,m} \mathbf{P}_{l,3,m}(\cos(\theta)) \sin(m\phi), \quad m = 1, \dots, l \end{cases}$$

con $l = 0, 1, \dots, n$, ove i $c_l, c_{l,m}$ sono opportune costanti e $\xi = \xi(\phi, \theta) = (\cos(\phi) \sin(\theta), \sin(\phi), \sin(\theta), \cos(\theta))^T$.

Avremo quindi, per ogni elemento della base:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{\mathfrak{R},n}(\mathbf{Y}_{l,1}^2(\xi)) &= c_l \sum_{j_1=1}^{n+2} \sum_{j_2=1}^{n+1} \lambda_{j_1} \lambda_{j_2} \sin(\theta_{j_1}) \mathbf{P}_l(\cos(\theta_{j_1})) = \\ c_l \sum_{j_2=1}^{n+1} \lambda_{j_2} \sum_{j_1=1}^{n+2} \lambda_{j_1} \sin(\theta_{j_1}) \mathbf{P}_l(\cos(\theta_{j_1})) &= c_l \int_{\gamma_s}^{\gamma_f} d\phi \int_{\tau_s}^{\tau_f} \sin(\theta) \mathbf{P}_l(\cos(\theta)) d\theta = \\ \int_{\tau_s}^{\tau_f} \int_{\gamma_s}^{\gamma_f} \sin(\theta) \mathbf{Y}_{l,1}^2(\xi(\theta, \phi)) d\phi d\theta &= \int_{\tau_s}^{\tau_f} \int_{\gamma_s}^{\gamma_f} \mathbf{Y}_{l,1}^2(\xi) d\mathbf{S}^2 \end{aligned}$$

dove si usa il Lemma 2 per giustificare l'esattezza della formula unidimensionale.

Similmente:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{\mathfrak{R},n}(\mathbf{Y}_{l,2m}^2(\xi)) &= c_{l,m} \sum_{j_1=1}^{n+2} \sum_{j_2=1}^{n+1} \lambda_{j_1} \lambda_{j_2} \sin(\theta_{j_1}) \mathbf{P}_{l,3,m}(\cos(\theta_{j_1})) \cos(m\phi_{j_2}) = \\ c_{l,m} \sum_{j_1=1}^{n+2} \lambda_{j_1} \sin(\theta_{j_1}) \mathbf{P}_{l,3,m}(\cos(\theta_{j_1})) &\sum_{j_2=1}^{n+1} \lambda_{j_2} \cos(m\phi_{j_2}) \end{aligned}$$

Ricordando la definizione di $\mathbf{P}_{l,3,m}(\cos(\theta))$, essendo $t = \cos(\theta)$ abbiamo che $(1-t^2)^{j/2} = \sin(\theta)^j$, e possiamo quindi applicare il Lemma sopra esposto per ottenere un polinomio trigonometrico riconducibile ad una somma di termini $\sin(k\theta)$ e $\cos(h\theta)$ con $k, h \leq n$. Quindi otteniamo un polinomio trigonometrico appartenente allo spazio prodotto-tensoriale $\mathbb{T}_{n+1}([\tau_s, \tau_f]) \otimes \mathbb{T}_n([\gamma_s, \gamma_f])$ per il quale le formule Gaussianne (sub)trigonometriche sono esatte. Continuando:

$$\begin{aligned} c_{l,m} \sum_{j_1=1}^{n+2} \lambda_{j_1} \sin(\theta_{j_1}) \mathbf{P}_{l,3,m}(\cos(\theta_{j_1})) \sum_{j_2=1}^{n+1} \lambda_{j_2} \cos(m\phi_{j_2}) &= \\ c_{l,m} \int_{\tau_s}^{\tau_f} \sin(\theta) \mathbf{P}_{l,3,m}(\cos(\theta)) d\theta \int_{\gamma_s}^{\gamma_f} \cos(m\phi_{j_2}) d\phi &= \\ \int_{\gamma_s}^{\gamma_f} \int_{\tau_s}^{\tau_f} \sin(\theta) \mathbf{Y}_{l,2m}^2(\xi(\theta, \phi)) d\theta d\phi &= \int_{\gamma_s}^{\gamma_f} \int_{\tau_s}^{\tau_f} \mathbf{Y}_{l,2m}^2(\xi) d\mathbf{S}^2 \end{aligned}$$

Ragionamento analogo con $\mathbf{Y}_{l,2m+1}^2(\xi)$.

- Consideriamo ora la generica sfera \mathbb{S}^d , e supponiamo di aver provato l'asserto per \mathbb{S}^{d-1} . Sia \mathfrak{R} la regione definita dagli intervalli $[\tau_{i,s}, \tau_{i,f}]$, $i = 1, \dots, d-1$ e $[\gamma_s, \gamma_f]$ e sia $\mathcal{Q}_{\mathfrak{R}^-,n}$ la formula costruita come sopra descritto per $\mathfrak{R}^- \subset \mathbb{S}^{d-1}$, esatta per $\{\mathbf{Y}_{k,j}^{d-1} : 1 \leq j \leq \mathbf{Z}(d-1, k)\}$, $k = 1, \dots, n$. Abbiamo già visto che una base per i polinomi sferici su \mathbb{S}^d è $\mathbf{Y}_{l,k,j}^d$ definite:

$$\left\{ \tilde{\mathbf{P}}_{l,d+1,k}(\cos(\theta_1)) \mathbf{Y}_{k,j}^{d-1}(\xi(\theta_2, \dots, \theta_{d-1}, \phi)) : 1 \leq j \leq \mathbf{Z}(d-1, k), 0 \leq k \leq l \right\}$$

con $l = 0, \dots, n$. Effettuando i ragionamenti sopra esposti per un generico elemento della base, avremo:

$$\begin{aligned} & \int_{\tau_{1,s}}^{\tau_{1,f}} \dots \int_{\tau_{d-1,s}}^{\tau_{d-1,f}} \int_{\gamma_s}^{\gamma_f} \tilde{\mathbf{P}}_{l,d+1,k}(\cos(\theta_1)) \mathbf{Y}_{k,j}^{d-1}(\xi(\theta_2, \dots, \theta_{d-1}, \phi)) d\mathbf{S}^d = \\ & \int_{\tau_{2,s}}^{\tau_{2,f}} \dots \int_{\gamma_s}^{\gamma_f} \mathbf{Y}_{k,j}^{d-1}(\xi(\theta_2, \dots, \theta_{d-1}, \phi)) d\mathbf{S}^{d-1} \int_{\tau_{1,s}}^{\tau_{1,f}} \sin^{d-1}(\theta_1) \tilde{\mathbf{P}}_{l,d+1,k}(\cos(\theta_1)) d\theta_1 = \\ & \mathcal{Q}_{\mathfrak{R}^-,n}(\mathbf{Y}_{k,j}^{d-1}(\xi)) \int_{\tau_{1,s}}^{\tau_{1,f}} \sin^{d-1}(\theta_1) \tilde{\mathbf{P}}_{l,d+1,k}(\cos(\theta_1)) d\theta_1 = \\ & \mathcal{Q}_{\mathfrak{R}^-,n}(\mathbf{Y}_{k,j}^{d-1}(\xi)) \sum_{j_1=1}^{n+d} \lambda_{j_1} \sin^{d-1}(\theta_{j_1}) \tilde{\mathbf{P}}_{l,d+1,k}(\cos(\theta_{j_1})) = \mathcal{Q}_{\mathfrak{R},n}(\mathbf{Y}_{l,k,j}^d(\xi)) \end{aligned}$$

dove, dopo aver diviso l'integrale, abbiamo utilizzato l'esattezza di $\mathcal{Q}_{\mathfrak{R}^-,n}$ grazie all'ipotesi induttiva, e ricordando che $k \leq l \leq n$ quindi $\mathbf{Y}_{k,j}^{d-1}$ è un polinomio sferico di grado al più n , e nel penultimo passaggio abbiamo usato il Lemma 2 analogamente al caso \mathbb{S}^2 , per verificare nuovamente l'esattezza della formula unidimensionale. \square

2.2 Stime sui pesi di una formula di cubatura su regioni di \mathbb{S}^d

In questo paragrafo generalizzeremo il Teorema 6.1 in [20], dimostrato per cupole \mathfrak{C} , alle regioni \mathfrak{P} e \mathfrak{R} di \mathbb{S}^d , trovando una stima di regolarità per i pesi di una generica formula \mathcal{Q} esatta su \mathbb{P}_n .

A questo proposito risulta utile introdurre alcuni concetti. Data la regione \mathfrak{R} o \mathfrak{P} (ricordiamo che \mathfrak{P} è un caso particolare di \mathfrak{R}), siamo interessati a trovare una cupola che la contenga. Abbiamo già osservato nel Lemma 1 che le rotazioni della sfera non influenzano la formula di integrazione, quindi ruoteremo la sfera in modo da avere il Polo Nord come punto centrale di \mathfrak{R} , e considerare quindi

$\mathfrak{C}(\mathbf{z}, \gamma)$, come tra poco vedremo meglio.

Definiamo le seguenti matrici di rotazione:

$$\begin{aligned}
R_1^{d+1}(\eta) &= \begin{pmatrix} \cos(\eta) & \sin(\eta) & 0 & \dots & 0 \\ -\sin(\eta) & \cos(\eta) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \\
R_2^{d+1}(\eta) &= \begin{pmatrix} \cos(\eta) & 0 & -\sin(\eta) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sin(\eta) & 0 & \cos(\eta) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \\
R_i^{d+1}(\eta) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \cos(\eta) & -\sin(\eta) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \sin(\eta) & \cos(\eta) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \\
R_d^{d+1}(\eta) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \cos(\eta) & -\sin(\eta) \\ 0 & \dots & \sin(\eta) & \cos(\eta) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

di dimensioni $d+1 \times d+1$ e dove in R_i^{d+1} con $i \geq 3$, gli elementi di rotazione sono quelli nelle coordinate (i, i) , $(i, i+1)$, $(i+1, i)$, $(i+1, i+1)$. Si noti che solo R_1^{d+1} è una rotazione in senso *antiorario*, mentre tutte le altre sono rotazioni in senso *orario*. Tale differenza tra la prima matrice e le successive deriva dal fatto che per le prime due coordinate in (1), *sin* e *cos* sono invertiti rispetto alle successive.

Si può verificare che dato un punto nelle coordinate in (1), $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\theta_1, \dots, \theta_{d-1}, \phi)$, allora si ha che:

$$R_d^{d+1}(\theta_1) \cdot \dots \cdot R_2^{d+1}(\theta_{d-1}) \cdot R_1^{d+1}(\phi) \cdot \mathbf{x}(\theta_1, \dots, \theta_{d-1}, \phi) = \mathbf{z}$$

cioè l'applicazione lineare definita da $R_d^{d+1} \dots R_1^{d+1}$ mappa \mathbf{x} nel Polo Nord \mathbf{z} .

Consideriamo quindi la regione:

$$\mathfrak{R}_{\gamma_s, \gamma_f, \tau_{1,s}, \tau_{1,f}, \dots, \tau_{d-1,s}, \tau_{d-1,f}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^d : \tau_{i,s} \leq \theta_i \leq \tau_{i,f}, \gamma_s \leq \phi \leq \gamma_f\}$$

e definiamo

$$\mathbf{c} := \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\gamma_s + \gamma_f}{2}\right) \sin\left(\frac{\tau_{d-1,s} + \tau_{d-1,f}}{2}\right) \dots \sin\left(\frac{\tau_{1,s} + \tau_{1,f}}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\gamma_s + \gamma_f}{2}\right) \sin\left(\frac{\tau_{d-1,s} + \tau_{d-1,f}}{2}\right) \dots \sin\left(\frac{\tau_{1,s} + \tau_{1,f}}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\tau_{d-1,s} + \tau_{d-1,f}}{2}\right) \sin\left(\frac{\tau_{d-2,s} + \tau_{d-2,f}}{2}\right) \dots \sin\left(\frac{\tau_{1,s} + \tau_{1,f}}{2}\right) \\ \vdots \\ \cos\left(\frac{\tau_{1,s} + \tau_{1,f}}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (15)$$

che chiameremo *punto centrale*. Utilizziamo le rotazioni sopra esposte per map-parlo al Polo Nord $\mathbf{z} = (0, 0, \dots, 0, 1)$:

$$R_d^{d+1}\left(\frac{\tau_{1,s} + \tau_{1,f}}{2}\right) \dots R_1^{d+1}\left(\frac{\gamma_s + \gamma_f}{2}\right) \cdot \mathbf{c}\left(\frac{\tau_{1,s} + \tau_{1,f}}{2}, \dots, \frac{\gamma_s + \gamma_f}{2}\right) = \mathbf{z}$$

Effettuando tali rotazioni per tutti i punti di \mathfrak{R} , otteniamo le nuove coordinate di tali punti ruotati verso \mathbf{z} . Ricordiamo per comodità la definizione di cupola centrata nel Polo Nord:

$$\mathfrak{C}(\mathbf{z}, \tau) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^d : x_{d+1} \geq \cos \tau\}$$

Si può vedere che per verificare che un punto appartenga alla cupola di raggio τ e centro il polo Nord, possiamo limitarci a controllare la sua ultima coordinata. Quello che ci interesserà trovare, sarà quindi il minimo delle ultime coordinate per i punti di \mathfrak{R} dopo aver effettuato le rotazioni, ovvero:

$$\cos(\mu) = \min\{y_{d+1} : \mathbf{y} = R_d^{d+1} \dots R_1^{d+1} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathfrak{R}\}$$

dove abbiamo omesso gli angoli di rotazione per comodità di lettura.

Nota 1 *Risulta alquanto complicato fornire una stima a priori di tale minimo, data la particolare geometria della sfera. Indicati con \mathbf{D} l'estremo di \mathfrak{R} con tutti gli angoli massimizzati, e con \mathbf{d} l'estremo con tutti gli angoli minimizzati, stime apparentemente intuitive, ad esempio utilizzare come upper bound $\mathbf{c} \cdot \mathbf{D}$, $\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}$, oppure $\mathbf{c} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{d}$, si sono rivelate già in \mathbb{S}^2 false e inefficaci. Ciò deriva dal fatto che la regione \mathfrak{R} cambia notevolmente forma non solo a seconda dell'ampiezza degli intervalli $[\tau_{i,s}, \tau_{i,f}]$, $[\gamma_s, \gamma_f]$, ma anche e soprattutto a seconda della sua vicinanza all'equatore o ai poli della sfera. Anche calcolando $\cos(\mu)$ simbolicamente,*

il risultato appare poco chiaro per poter trovare delle stime teoriche concrete (che non siano eccessivamente larghe). Per \mathbb{S}^2 avremo infatti:

$$\min_{\substack{\gamma_s \leq \phi \leq \gamma_f \\ \tau_s \leq \theta \leq \tau_f}} (\cos((\tau_s + \tau_f)/2) \cos(\theta) + \cos((\gamma_s + \gamma_f - 2\phi)/2) \sin((\tau_s + \tau_f)/2) \sin(\theta))$$

(i calcoli sopra esposti sono stati eseguiti con l'ausilio del calcolo simbolico di Mathematica). Già in \mathbb{S}^3 la funzione da ottimizzare è così complicata che sembra inutile menzionarla. Si noti inoltre che in alcuni casi, in particolare quando \mathfrak{R} è vicina ad uno dei poli e gli intervalli $[\tau_{i,s}, \tau_{i,f}]$ sono abbastanza grandi (quanto grandi dipende dai valori di γ_s e γ_f oltre che dalla loro differenza), prendere il punto centrale della regione potrebbe non risultare la soluzione migliore. Il teorema che seguirà rimarrà comunque valido, ma la stima varierà a seconda della grandezza della cupola considerata.

Ci limiteremo a chiamare $\cos(\mu)$ tale minimo, e a considerare quindi $\mathfrak{C}(\mathbf{c}, \mu)$, affidando al calcolo numerico via Matlab o Mathematica il compito di fornire μ da caso a caso.

Enunciamo quindi il seguente:

Teorema 3 Sia $d \geq 2$ e sia \mathfrak{R} una regione di \mathbb{S}^d . Sia $\mathcal{Q}_{\mathfrak{R},n}$ data da:

$$\mathcal{Q}_{\mathfrak{R},n} := \sum_{j=1}^N \lambda_j f(\mathbf{x}_j)$$

una formula di integrazione con nodi $\mathbf{x}_j \in \mathfrak{R}$, pesi positivi e che sia esatta su $\mathbb{P}_n(\mathfrak{R})$, con $n \geq 2$. Definiamo inoltre μ come

$$\mu = \arccos(\min\{y_{d+1} : \mathbf{y} = R_d^{d+1} \dots R_1^{d+1} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathfrak{R}\}), \mu \in [0, \pi]$$

e \mathbf{c} come punto centrale di \mathfrak{R} , seguendo la definizione data in (15), cosicchè $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{C}(\mathbf{c}, \mu)$. Allora

$$\sum_{\substack{j=1, \\ \mathbf{x}_j \in \mathfrak{C}(\mathbf{y}, \mu/\pi n)}}^N \lambda_j \leq c \mu^d \lfloor n/2 \rfloor^{-d} \quad (16)$$

per ogni $\mathbf{y} \in \mathbb{S}^d$, con $\mathfrak{C}(\mathbf{y}, \mu/\pi n)$ cupola di centro \mathbf{y} e raggio $\mu/\pi n$, e la costante c dipendente dalla dimensione d , ma non da μ , n , N , \mathbf{y} e dalla formula \mathcal{Q} .

Prima di dimostrare il teorema, spieghiamo meglio il suo significato. La formula (16) indica una sorta di regolarità e uniformità dei pesi: prendendo la somma dei pesi in un determinato intorno di un qualsiasi punto \mathbf{y} , il loro contributo alla formula totale è limitato da un determinato valore massimo. In altre parole, il contributo dei pesi non può essere concentrato a sottoregioni troppo piccole di \mathfrak{R} , e questo per qualsiasi formula di cubatura avente pesi positivi e grado di precisione n .

Dimostrazione

Definiamo la funzione $g_{\lfloor n/2 \rfloor} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ come:

$$g_{\lfloor n/2 \rfloor}(t) := \frac{1}{|\mathbb{S}^d|} \frac{\Gamma(d/2)\Gamma(\lfloor n/2 \rfloor + d)}{\Gamma(d)\Gamma(\lfloor n/2 \rfloor + d/2)} \mathbf{P}_{\lfloor n/2 \rfloor}^{(d/2, (d-2)/2)}(t)$$

con $\mathbf{P}_n^{(\alpha, \beta)}$ polinomio di Jacobi definito nel capitolo delle notazioni. Sempre dalle notazioni si osserva che $g_{\lfloor n/2 \rfloor}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{G}_{\lfloor n/2 \rfloor}^d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, con $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{S}^d$, e $\mathbf{G}_{\lfloor n/2 \rfloor}^d$ reproducing kernel di $\mathbb{P}_{\lfloor n/2 \rfloor}(\mathbb{S}^d)$ definito in (8). Consideriamo ora una sua normalizzazione:

$$p(t) := \frac{g_{\lfloor n/2 \rfloor}(t)}{g_{\lfloor n/2 \rfloor}(1)}, t \in [-1, 1]$$

Dalle stime che si possono trovare in [38], (4.1.1) e (7.32.2), risulta che $|p(t)| \leq p(1)$, $t \in [-1, 1]$ e quindi si ha $0 \leq [p(t)]^2 \leq [p(1)]^2 = 1$, $t \in [-1, 1]$. Notiamo anche che essendo p definito con i polinomi $g_{\lfloor n/2 \rfloor}$ di grado $\lfloor n/2 \rfloor$, allora $p^2(t)$ è un polinomio di grado massimo $\leq n$.

Utilizzando la disuguaglianza di Markov e la disuguaglianza di Bessel per i polinomi definiti su $[-1, 1]$ (si guardi ad esempio [22]), possiamo verificare che:

$$\sup_{t \in [-1, 1]} \left| ([p(t)]^2)' \right| \leq n^2 \quad \sup_{t \in [-1, 1]} |[p(t)]^2| = n^2$$

Dalle precedenti stime e dal teorema del valor medio si ottiene quindi:

$$|1 - [p(t)]^2| = |[p(1)]^2 - [p(t)]^2| \leq n^2(1 - t), t \in [-1, 1]$$

dove il membro destro soddisfa $n^2(1 - t) \leq 1/2$ se e solo se $0 \leq 1 - t \leq 1/(2n^2)$. Ricordando che $[p(t)]^2 \leq 1$ otteniamo infine

$$\frac{1}{2} \leq [p(t)]^2 \leq 1 \quad \text{sse} \quad 0 \leq 1 - t \leq \frac{1}{2n^2} \quad (17)$$

Definiamo inoltre una trasformazione affine $T : [0, 1] \rightarrow [\cos(13\mu/6), 1]$ nel seguente modo:

$$T(s) := \left(1 - \cos \frac{13\mu}{6}\right) s + \cos \frac{13\mu}{6} = 2 \left(\sin \frac{13\mu}{12}\right)^2 s + \cos \frac{13\mu}{6}$$

Fatte queste premesse, utili nel seguito della dimostrazione, andiamo a definire un polinomio di grado $\leq n$ che integreremo con la formula \mathcal{Q} su \mathfrak{R} . Sia quindi:

$$q(t) := \begin{cases} p(t)^2, & t \in [-1, 1] \\ p(T^{-1}(t))^2, & t \in [\cos(13\mu/6), 1] \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{se } \mu > 3\pi/13 \\ \text{se } \mu \leq 3\pi/13 \end{matrix}$$

Notiamo che il polinomio q sarà sempre positivo, essendo definito come un quadrato.

Siamo ora $\mathbf{y} \in \mathbb{S}^d$ un qualsiasi punto fissato sulla sfera d -dimensionale, e consideriamo il polinomio sferico $\mathbf{x} \rightarrow q(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$, di grado $\leq n$, che integriamo utilizzando la regola $\mathcal{Q}_{\mathfrak{R},n}$, esatta su tale polinomio.

$$\int_{\mathfrak{R}} q(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) d\mathbf{S}^d = \sum_{j=1}^N \lambda_j q(\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{y}) \geq \sum_{\substack{j=1 \\ \mathbf{x}_j \in \mathfrak{C}(\mathbf{y}, \mu/(\pi n))}}^N \lambda_j q(\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{y}) \quad (18)$$

dove la disuguaglianza nell'ultimo passaggio è valida poichè abbiamo semplicemente tralasciato alcuni termini positivi dalla sommatoria, dato che sia i pesi che il polinomio sono entrambi positivi.

Consideriamo dapprima il caso $\mu > 3\pi/13$.

Ricordando (9) e la positività di q , possiamo stimare il membro a sinistra di (18) come:

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{R}} q(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) d\mathbf{S}^d &\leq \int_{\mathbb{S}^d} q(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) d\mathbf{S}^d = \int_{\mathbb{S}^d} \frac{g_{\lfloor n/2 \rfloor}(t)^2}{g_{\lfloor n/2 \rfloor}(1)^2} d\mathbf{S}^d = \\ &g_{\lfloor n/2 \rfloor}(1)^{-2} \int_{\mathbb{S}^d} (\mathbf{G}_{\lfloor n/2 \rfloor}^d(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^2 d\mathbf{S}^d = g_{\lfloor n/2 \rfloor}(1)^{-2} \mathbf{G}_{\lfloor n/2 \rfloor}^d(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = g_{\lfloor n/2 \rfloor}(1)^{-1} \end{aligned}$$

Per stimare il membro a destra di (18), osserviamo che se $\mathbf{x}_j \in \mathfrak{C}(\mathbf{y}, \mu/(\pi n))$, allora per la definizione di cupola avremo che $\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{y} \geq \cos(\mu/(\pi n))$ e quindi, ricordando anche la stima $\sin x \leq x, x \geq 0$ e che $\mu \leq \pi$, otteniamo che:

$$1 - \mathbf{x}_j \cdot \mathbf{y} \leq 1 - \cos \frac{\mu}{\pi n} = 2 \left(\sin \frac{\mu}{2\pi n} \right)^2 \leq \frac{\mu^2}{2\pi^2 n^2} \leq \frac{1}{2n^2}$$

Perciò da (17) abbiamo che $1/2 \leq (p(\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{y}))^2 = q(\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{y}) \leq 1$ per ogni $\mathbf{x}_j \in \mathfrak{C}(\mathbf{y}, \mu/(\pi n))$ e quindi:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ \mathbf{x}_j \in \mathfrak{C}(\mathbf{y}, \mu/(\pi n))}}^N \lambda_j q(\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{y}) \geq \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ \mathbf{x}_j \in \mathfrak{C}(\mathbf{y}, \mu/(\pi n))}}^N \lambda_j \quad (19)$$

Combinando insieme le stime sopra effettuate e ricordando (17) otteniamo, per $\mu > 3\pi/13$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j=1 \\ \mathbf{x}_j \in \mathfrak{C}(\mathbf{y}, \mu/(\pi n))}}^N \lambda_j &\leq 2(g_{\lfloor n/2 \rfloor}(1))^{-1} = \frac{|\mathbb{S}^d| \Gamma(d+1) \Gamma(\lfloor n/2 \rfloor + 1)}{(\lfloor n/2 \rfloor + d/2) \Gamma(\lfloor n/2 \rfloor + d)} \leq \\ &\leq c \lfloor n/2 \rfloor^{-d} \leq \frac{c \mu^d}{\lfloor n/2 \rfloor^d} \end{aligned}$$

dove per la penultima stima ci riferiamo a [1], (6.1.46). Possiamo osservare che la costante c effettivamente dipende solo da d ma non da μ .

Consideriamo ora il caso in cui $\mu \leq 3\pi/13$.

Se $\mathbf{y} \in \mathbb{S}^d \setminus \mathfrak{C}(\mathbf{c}, \mu + \mu/(\pi n))$ allora il teorema è automaticamente vero, dato che $\mathfrak{C}(\mathbf{y}, \mu/(\pi n)) \cap \mathfrak{C}(\mathbf{c}, \mu) = \emptyset$ e quindi la sommatoria dei pesi sarebbe zero, non avendo nessun termine. Consideriamo quindi $\mathbf{y} \in \mathfrak{C}(\mathbf{c}, \mu + \mu/(\pi n))$. Allora per $\mathbf{x} \in \mathfrak{C}(\mathbf{z}, \mu)$ avremo

$$\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{c}) + \text{dist}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \leq$$

$$\mu + \left(\mu + \frac{\mu}{\pi n} \right) \leq 2\mu + \frac{\mu}{2\pi} \leq 2\mu + \frac{\mu}{6} = \frac{13\mu}{6}$$

il che significa $\mathfrak{C}(\mathbf{c}, \mu) \subset \mathfrak{C}(\mathbf{y}, 13\mu/6)$. Riprendiamo allora la (18) e stimiamone il membro sinistro:

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{R}} q(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) d\mathbf{S}^d &\leq \int_{\mathfrak{C}(\mathbf{c}, \mu)} q(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) d\mathbf{S}^d \leq \\ \int_{\mathfrak{C}(\mathbf{y}, 13\mu/6)} q(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) d\mathbf{S}^d &= |\mathbb{S}^{d-1}| \int_{\cos(13\mu/6)}^1 p(T^{-1}(t))^2 (1-t^2)^{\frac{d-2}{2}} dt = \\ 2 \left(\sin \frac{13\mu}{12} \right)^2 |\mathbb{S}^{d-1}| &\int_0^1 p(s)^2 (1-(T(s))^2)^{\frac{d-2}{2}} ds \end{aligned}$$

avendo utilizzato il cambio di variabili in (2) e successivamente la sostituzione $t = T(s)$. Inoltre

$$\begin{aligned} 1 - (T(s))^2 &= (1 + T(s))(1 - T(s)) \leq 2(1 - (1 - \cos(13\mu/6))s - \cos(13\mu/6)) = \\ &2(1 - \cos(13\mu/6))(1 - s) \leq 4(\sin(13\mu/12))^2 (1 - s^2) \end{aligned}$$

per ogni $s \in [0, 1]$. Di conseguenza avremo:

$$\int_{\mathfrak{R}} q(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) d\mathbf{S}^d \leq 2 \left(\sin \frac{13\mu}{12} \right)^2 |\mathbb{S}^{d-1}| \int_0^1 p(s)^2 (1 - (T(s))^2)^{\frac{d-2}{2}} ds \leq$$

$$\begin{aligned}
& 2^{d-1} \left(\sin \frac{13\mu}{12} \right)^d |\mathbb{S}^{d-1}| \int_0^1 p(s)^2 (1-s^2)^{\frac{d-2}{2}} ds \leq \\
& 2^{d-1} \left(\sin \frac{13\mu}{12} \right)^d |\mathbb{S}^{d-1}| \int_{-1}^1 p(s)^2 (1-s^2)^{\frac{d-2}{2}} ds = \\
& 2^{d-1} \left(\sin \frac{13\mu}{12} \right)^d |\mathbb{S}^{d-1}| \int_{-1}^1 \frac{(g_{\lfloor n/2 \rfloor}(s))^2}{(g_{\lfloor n/2 \rfloor}(1))^2} (1-s^2)^{\frac{d-2}{2}} ds = \\
& 2^{d-1} \left(\sin \frac{13\mu}{12} \right)^d (g_{\lfloor n/2 \rfloor}(1))^{-2} \int_{\mathbb{S}^d} (\mathbf{G}_{\lfloor n/2 \rfloor}^d(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^2 d\mathbf{S}^d = \\
& 2^{d-1} \left(\sin \frac{13\mu}{12} \right)^d (g_{\lfloor n/2 \rfloor}(1))^{-2} \mathbf{G}_{\lfloor n/2 \rfloor}^d(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = \\
& 2^{d-1} \left(\sin \frac{13\mu}{12} \right)^d (g_{\lfloor n/2 \rfloor}(1))^{-1}
\end{aligned}$$

avendo usato (9) e (2). Da (17) ricaviamo

$$\frac{1}{2} \leq p(T^{-1}(t))^2 \leq 1 \quad \text{sse} \quad 0 \leq 1 - T^{-1}(t) \leq \frac{1}{2n^2}$$

ma $0 \leq 1 - T^{-1}(t) \leq 1/(2n^2)$ è equivalente a

$$\begin{aligned}
0 \leq 1 - T^{-1}(t) &= 1 - \frac{t - \cos(13\mu/6)}{1 - \cos(13\mu/6)} = \frac{1-t}{1 - \cos(13\mu/6)} = \\
&\frac{1-t}{2(\sin(13\mu/12))^2} \leq \frac{1}{2n^2}
\end{aligned}$$

il che porta a

$$\frac{1}{2} \leq p(T^{-1}(t))^2 \leq 1 \quad \text{sse} \quad 0 \leq 1 - t \leq (\sin(13\mu/12))^2/n^2$$

Verifichiamo l'ultima condizione: se $\mathbf{x}_j \in \mathfrak{C}(\mathbf{y}, \mu/(\pi n))$, allora si ha che $\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{y} \geq \cos(\mu/(\pi n))$ e quindi

$$\begin{aligned}
1 - \mathbf{x}_j \cdot \mathbf{y} &\leq 1 - \cos \frac{\mu}{\pi n} = 2 \left(\sin \frac{\mu}{2\pi n} \right)^2 \leq \\
&\frac{\mu^2}{2\pi^2 n^2} \leq \frac{1}{n^2} \left(\sin \frac{\mu}{2\sqrt{2}} \right)^2 \leq \frac{1}{n^2} \left(\sin \frac{13\mu}{12} \right)^2
\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato $\sin x \leq x$, se $x \geq 0$, $x \leq (\pi/2) \sin x$, se $x \in [0, \pi/2]$, e inoltre $\mu/(2\sqrt{2}) \leq 13\mu/12 \leq \pi/4$, se $\mu \leq 3\pi/13$, con la monotonicità di \sin in $[0, \pi/2]$. Con quest'ultima stima quindi otteniamo che $q(\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{y}) \geq 1/2$ per ogni

$\mathbf{x}_j \in \mathfrak{C}(\mathbf{y}, \mu/(\pi n))$, e di conseguenza possiamo stimare il membro destro di (18) come in (19) e ottenere infine:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ \mathbf{x}_j \in \mathfrak{C}(\mathbf{y}, \mu/(\pi n))}}^N \lambda_j \leq 2^{d-1} \left(\sin \frac{13\mu}{12} \right)^d (g_{\lfloor n/2 \rfloor}(1))^{-1} \leq$$

$$2^{d-1} \left(\frac{13\mu}{12} \right)^d (g_{\lfloor n/2 \rfloor}(1))^{-1} \leq c\mu^d \lfloor n/2 \rfloor^{-d}$$

con la stima in [1] (6.1.46) per stimare $(g_{\lfloor n/2 \rfloor}(1))^{-1}$. Anche in questo caso la costante c dipende unicamente dalla dimensione d . \square

2.3 Casi particolari su \mathbb{S}^2 : le cupole

Nella sezione 2.1 abbiamo costruito formule di cubatura esatte per i polinomi sferici di grado al più n , sulle regioni \mathfrak{R} , con un numero di nodi $(n+d) \dots (n+1) = \frac{(n+d)!}{n!}$ che nel caso della sfera classica \mathbb{S}^2 diventano $(n+2) \cdot (n+1) = \frac{(n+2)!}{n!}$. Per alcuni casi particolari di tale regione, ovvero le cupole \mathfrak{C} , siamo in grado di costruire formule di cubatura con un numero inferiore di nodi.

Per fare ciò abbiamo bisogno di costruire una formula di quadratura sub-periodica differente da quella presentata nella Proposizione 1. La differenza deriverà da una diversa funzione peso che prenderemo in considerazione, e il motivo di tale scelta risulterà chiaro nella dimostrazione della formula di cubatura sulla cupola. Enunceremo dapprima un risultato generale valido per funzioni peso simmetriche, da cui discenderà direttamente la formula di quadratura adatta ai nostri scopi. Cominciamo con alcune definizioni.

Siano $T_{2n+1}(x)$ i polinomi di Chebyshev (del primo tipo) e siano i suoi zeri

$$\tau_j := \tau_{j,2n+1} = \cos \left(\frac{(2j-1)\pi}{2(2n+1)} \right) \in (-1, 1), \quad j = 1, \dots, 2n+1 \quad (20)$$

che come noto sono ottimi per l'interpolazione algebrica. In [9] sono stati studiati dei punti per l'interpolazione trigonometrica di grado $\leq n$, ovvero per lo spazio dei polinomi trigonometrici, di cui ricordiamo la definizione

$$\mathbb{T}([-\omega, \omega]) = \text{span}\{1, \cos(k\theta), \sin(k\theta), \quad k \in [-\omega, \omega], \quad 1 \leq k \leq n\}$$

tali punti sono definiti come

$$\theta_j(n, \omega) = 2 \arcsin(\sin(\omega/2)\tau_j) \in (-\omega, \omega), \quad j = 1, \dots, 2n+1 \quad (21)$$

è stato inoltre dimostrato che la formula di quadratura trigonometrica interpolatoria ha pesi positivi. Dato che si lavora su sottointervalli del periodo dei polinomi trigonometrici, tali formule sono state definite di interpolazione e quadratura *sub-periodica*. Definendo i polinomi di Lagrange algebrici di grado $2n$ per i nodi in (20)

$$l_j(x) = \frac{T_{2n+1}(x)}{T'_{2n+1}(\tau_j)(x - \tau_j)}$$

con $l_j(\tau_k) = \delta_{jk}$, allora le *funzioni cardinali* per l'interpolazione trigonometrica agli angoli (21) possono essere scritte esplicitamente come (si veda [9] per una sua dimostrazione)

$$L_{n+1}(\theta) = l_{n+1}(x) \quad (22)$$

$$L_j(\theta) = \frac{1}{2}(l_j(x) + l_{2n+2-j}(x)) \left(1 + \frac{\tau_j^2}{\sin(\theta_j)} \frac{\sin(\theta)}{x^2} \right), \quad j \neq n+1$$

dove si sono utilizzati i seguenti cambi di variabili

$$x(\theta) = \frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\omega/2)} \in [-1, 1] \quad (23)$$

$$\theta(x) = 2 \arcsin(\sin(\omega/2)x) \in [-\omega, \omega] \quad (24)$$

Inoltre scriviamo esplicitamente la Jacobiana della trasformazione in (24), che risulta essere

$$\mathcal{W}(x) = \frac{2 \sin(\omega/2)}{\sqrt{1 - \sin^2(\omega/2)x^2}}, \quad x \in (-1, 1) \quad (25)$$

Fatte queste premesse possiamo ora enunciare il seguente teorema.

Teorema 4 *Siano $(\xi_j, \lambda_j)_{1 \leq j \leq n+1}$ i nodi e i pesi (positivi) della formula di quadratura algebrica Gaussiana relativa ad una funzione peso simmetrica che possa essere scritta come:*

$$\widetilde{\mathcal{W}}(x) = g(\theta(x))\mathcal{W}(x), \quad x \in (-1, 1)$$

dove si utilizza il cambio di variabili in (24). Allora

$$\int_{-\omega}^{\omega} f(\theta)g(\theta)d\theta = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j f(\phi_j), \quad f \in \mathbb{T}_n([-\omega, \omega]) \quad (26)$$

dove

$$\phi_j = 2 \arcsin(\sin(\omega/2)\xi_j) \in (-\omega, \omega), \quad j = 1, 2, \dots, n+1$$

Dimostrazione

Seguiamo la linea guida della dimostrazione della Proposizione 1 che si può trovare in [15]. Ordiniamo quindi i nodi in ordine crescente, ovvero siano $-1 \leq \xi_1 \leq \dots \leq \xi_{n+1} \leq 1$. Essendo la funzione peso pari, è noto che tali nodi sono simmetrici, ovvero $\xi_j = -\xi_{n+2-j}$ (cf. [17], cap.1). Siano \tilde{l}_j i corrispondenti polinomi di Lagrange, essi soddisfano $\tilde{l}_j(x) = \tilde{l}_{n+2-j}(-x)$ da cui si ha che $\lambda_j = \lambda_{n+2-j}$, ovvero i pesi sono simmetrici (si noti che $\tilde{l} \neq l$ essendo polinomi costruiti su differenti punti). Per comodità di lettura, rinominiamo i nodi e i pesi, ovvero

$$\eta_k = \xi_j, \quad k = j - \lfloor n/2 \rfloor - 1$$

$$u_k = \lambda_j, \quad k = j - \lfloor n/2 \rfloor - 1$$

in modo tale da ottenere le seguenti relazioni

$$\eta_k = -\eta_{-k}, \quad u_k = u_{-k}, \quad -\lfloor n/2 \rfloor \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$$

Quello che ora faremo è verificare l'esattezza della formula di quadratura in (27) per le funzioni cardinali in (22), da cui risulterà essere esatta $\forall f \in \mathbb{T}_n([- \omega, \omega])$. Effettuando la sostituzione in (24) otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{-\omega}^{\omega} L_i(\theta) g(\theta) d\theta &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (l_j(x) + l_{2n+2-j}(x)) g(\theta(x)) \frac{2 \sin(\omega/2)}{\sqrt{1 - \sin^2(\omega/2) x^2}} dx = \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (l_j(x) + l_{2n+2-j}(x)) g(\theta(x)) \mathcal{W}(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (l_j(x) + l_{2n+2-j}(x)) \widetilde{\mathcal{W}}(x) \end{aligned}$$

$\forall i = 1, \dots, 2n+1$, osservando che $\pi_i(x) := \frac{1}{2} (l_j(x) + l_{2n+2-j}(x))$ è un polinomio pari di grado $2n$ in x , la funzione peso anch'essa pari per ipotesi, mentre la funzione $\sin(\theta(x))/x^2$, presente nella definizione in (22) di L_i , è dispari. Essendo $\pi_i(x)$ un polinomio algebrico di grado $2n$, ed essendo (ξ_j, λ_j) nodi e pesi di una formula di quadratura algebrica Gaussiana, otteniamo la seguente equivalenza

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{2} (l_j(x) + l_{2n+2-j}(x)) \widetilde{\mathcal{W}}(x) = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j \pi_i(\xi_j) = \sum_{k=-\lfloor n/2 \rfloor}^{\lfloor n/2 \rfloor} u_k \pi_i(\eta_k)$$

D'altra parte, per la simmetria dei nodi η_k , si ha che $\pi_i(\eta_k)$ è pari, mentre $\pi_i(\eta_k) \sin(\theta(\eta_k))/\eta_k^2$ è dispari rispetto all'indice k , da cui concludiamo che

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j L_i(\phi_j) = \sum_{k=-\lfloor n/2 \rfloor}^{\lfloor n/2 \rfloor} u_k L_i(\theta(\eta_k)) = \sum_{k=-\lfloor n/2 \rfloor}^{\lfloor n/2 \rfloor} u_k \pi_i(\eta_k) = \int_{-\omega}^{\omega} L_i(\theta) g(\theta) d\theta \quad \square$$

Enunciamo ora un corollario del precedente teorema, definendo una particolare formula di cubatura adatta ai nostri scopi.

Corollario 1 Siano $(\xi_j, \lambda_j)_{1 \leq j \leq n+1}$ i nodi e i pesi (positivi) della formula di quadratura algebrica Gaussiana relativa alla funzione peso (simmetrica):

$$\widehat{\mathcal{W}}(x) = 4 \sin^2(\omega/2)|x|, \quad x \in (-1, 1), \quad 0 \leq \omega \leq \pi$$

Allora

$$\int_{-\omega}^{\omega} f(\theta) |\sin(\theta)| d\theta = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j f(\phi_j), \quad f \in \mathbb{T}_n([- \omega, \omega]) \quad (27)$$

dove

$$\phi_j = 2 \arcsin(\sin(\omega/2)\xi_j) \in (-\omega, \omega), \quad j = 1, 2, \dots, n+1$$

Dimostrazione

Controlliamo l'esattezza della formula per le funzioni cardinali come nella dimostrazione del Teorema 4. Effettuando il cambio di variabile sopra descritto da x a θ avremo che:

$$\int_{-\omega}^{\omega} L_i(\theta) |\sin(\theta)| d\theta = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (l_j(x) + l_{2n+2-j}(x)) |\sin(2 \arcsin(\sin(\omega/2)x))| \frac{2 \sin(\omega/2)}{\sqrt{1 - \sin^2(\omega/2)x^2}} dx$$

$\forall i = 1, \dots, 2n+1$. Si può ottenere una formula più semplice per l'espressione dentro il modulo, utilizzando le formule di prostaferesi per il seno:

$$\begin{aligned} |\sin(2 \arcsin(\sin(\omega/2)x))| &= |2 \sin(\arcsin(\sin(\omega/2)x)) \cos(\arcsin(\sin(\omega/2)x))| = \\ &= \left| 2 \sin(\omega/2)x \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(\sin(\omega/2)x))} \right| = \left| 2 \sin(\omega/2)x \sqrt{1 - \sin^2(\omega/2)x^2} \right| = \\ &= 2 \sin(\omega/2)|x| \sqrt{1 - \sin^2(\omega/2)x^2} \end{aligned}$$

Sostituendo questa espressione nel precedente integrale si ottiene quindi

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \pi_i(x) 2 \sin(\omega/2)|x| \sqrt{1 - \sin^2(\omega/2)x^2} \frac{2 \sin(\omega/2)}{\sqrt{1 - \sin^2(\omega/2)x^2}} dx &= \\ \int_{-1}^1 \pi_i(x) 2 \sin(\omega/2)|x| 2 \sin(\omega/2) dx &= \int_{-1}^1 \pi_i(x) 4 \sin^2(\omega/2)|x| dx \end{aligned}$$

Ricordando ora che $\pi_i(x)$ è un polinomio di grado $2n$ in x , otteniamo l'esattezza della seguente espressione

$$\int_{-1}^1 \pi_i(x) \widehat{\mathcal{W}}(x) dx = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j \pi_i(\xi_j) = \sum_{k=-\lfloor n/2 \rfloor}^{\lfloor n/2 \rfloor} u_k \pi_i(\eta_k)$$

D'altra parte, per la simmetria dei nodi η_k , come già osservato nel precedente teorema, si conclude che

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j L_i(\phi_j) = \sum_{k=-\lfloor n/2 \rfloor}^{\lfloor n/2 \rfloor} u_k L_i(\theta(\eta_k)) = \sum_{k=-\lfloor n/2 \rfloor}^{\lfloor n/2 \rfloor} u_k \pi_i(\eta_k) = \int_{-\omega}^{\omega} L_i(\theta) |\sin(\theta)| d\theta \quad \square$$

Siamo ora in grado di enunciare il seguente:

Teorema 5 *Sia $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(\mathbf{z}, \gamma)$ una cupola in \mathbb{S}^2 e $p \in \mathbb{P}_n(\mathfrak{C})$. Siano $(\lambda_{j_1}, \theta_{j_1})$, e $(\tilde{\lambda}_{j_2}, \phi_{j_2})$ rispettivamente i pesi e i nodi della formula di quadratura Gaussiana subperiodica del Corollario 1 e della Proposizione 1 descritte in precedenza, per gli intervalli $[-\gamma, \gamma]$ e $[0, 2\pi]$, di grado rispettivamente " n " in θ e " n " in ϕ se " n " dispari, mentre siano di grado " n " in θ e " $n+1$ " in ϕ se " n " pari. Siano inoltre definiti i punti:*

$$\xi_{j_1, j_2} := \xi(\theta_{j_1}, \phi_{j_2})$$

Allora la seguente formula di cubatura è esatta:

$$\tilde{Q}_{\mathfrak{C}, n}(p) := \begin{cases} \sum_{j_1=1}^{n+1} \sum_{j_2=1}^{(n+1)/2} \lambda_{j_1} \tilde{\lambda}_{j_2} p(\xi_{j_1, j_2}) & \text{se } n \text{ dispari} \\ \sum_{j_1=1}^{n+1} \sum_{j_2=1}^{(n+2)/2} \lambda_{j_1} \tilde{\lambda}_{j_2} p(\xi_{j_1, j_2}) & \text{se } n \text{ pari} \end{cases} \quad (28)$$

con $(n+1) \cdot (n+1)/2$ nodi se n dispari e $(n+1) \cdot ((n+2)/2) - (n/2)$ se n pari.

Dimostrazione

Prima di cominciare la dimostrazione vera e proprio, facciamo una osservazione che sarà di fondamentale importanza. Siano le coordiante sferiche in (1), ovvero per \mathbb{S}^2 :

$$\begin{cases} x_1 &= \cos(\phi) \sin(\theta) \\ x_2 &= \sin(\phi) \sin(\theta) \\ x_3 &= \cos(\theta) \end{cases} \quad (29)$$

e ricordiamo l'elemento di volume per tale trasformazione: $\sin(\theta)$. Nelle coordinate in (29) per consuetudine si utilizzano gli intervalli $\phi \in [0, 2\pi]$ e $\theta \in [0, \pi]$. Possiamo cambiare tali intervalli in $\phi \in [0, \pi]$ e $\theta \in [-\pi, \pi]$, osservando che la trasformazione delle coordinate rimane invariata, con l'unica differenza rispetto alle precedenti che l'elemento di volume risulta essere $|\sin(\theta)|$, dato che il seno può assumere anche valori negativi. Oltre a questo cambio, si può utilizzare una terza variante con l'intervallo $\phi \in [\pi, 2\pi]$, sempre con $|\sin(\theta)|$ come elemento di volume. Le tre varianti descrivono effettivamente la sfera \mathbb{S}^2 e risultano equivalenti tra loro. In particolare notiamo dalla trasformazione (29), comune a tutte le varianti, che

$$\xi(\phi, \theta) = \xi(\phi + \pi, -\theta), \quad \xi \in \mathbb{S}^2 \quad (30)$$

che dà una relazione tra la seconda e terza variante di coordinate, che saranno quelle utilizzate in questa dimostrazione.

Dimostriamo ora l'asserto prima nel caso n sia dispari e di seguito n pari.

- Sia n dispari.

Con il secondo tipo di coordinate avremo la seguente equivalenza:

$$\int_{\mathfrak{C}} p(x_1, x_2, x_3) d\mathbf{S}^2 = \int_{-\gamma}^{\gamma} \int_0^{\pi} p(\cos(\phi) \sin(\theta), \sin(\phi) \sin(\theta), \cos(\theta)) |\sin(\theta)| d\phi d\theta$$

Inoltre per simmetria è possibile scrivere, utilizzando il terzo tipo di coordinate:

$$\int_{\mathfrak{C}} p(x_1, x_2, x_3) d\mathbf{S}^2 = \int_{-\gamma}^{\gamma} \int_{\pi}^{2\pi} p(\cos(\phi) \sin(\theta), \sin(\phi) \sin(\theta), \cos(\theta)) |\sin(\theta)| d\phi d\theta$$

e quindi si osserva che risulta

$$\int_{\mathfrak{C}} p(x_1, x_2, x_3) d\mathbf{S}^2 = \frac{1}{2} \int_{-\gamma}^{\gamma} \int_0^{2\pi} p(\cos(\phi) \sin(\theta), \sin(\phi) \sin(\theta), \cos(\theta)) |\sin(\theta)| d\phi d\theta$$

Mostriamo ora che se $p \in \mathbb{P}_n(\mathfrak{C})$ allora la formula di cubatura (28) è esatta. Per dimostrarlo utilizziamo nuovamente le armoniche sferiche come base per $\mathbb{P}(\mathbb{S}^2)$, ovvero $\mathbf{Y}_{l,j}^2$ (ricordiamo che l'apice 2 non indica la potenza bensì ricorda che sono polinomi sulla sfera \mathbb{S}^2) (cf. [2], pp.133 – 134):

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_{l,1}^2(\xi) &= c_l \mathbf{P}_l(\cos(\theta)) \\ \mathbf{Y}_{l,2m}^2(\xi) &= c_{l,m} \mathbf{P}_{l,3,m}(\cos(\theta)) \cos(m\phi) \\ \mathbf{Y}_{l,2m+1}^2(\xi) &= c_{l,m} \mathbf{P}_{l,3,m}(\cos(\theta)) \sin(m\phi), \quad m = 1, \dots, l \end{cases}$$

con $l = 0, 1, \dots, n$, ove i $c_l, c_{l,m}$ sono opportune costanti e $\xi = \xi(\phi, \theta) = (\cos(\phi) \sin(\theta), \sin(\phi) \sin(\theta), \cos(\theta))^T$. Verifichiamo l'esattezza per ogni elemento della base.

Quale prima questione, mostriamo che la formula calcola esattamente l'integrale di $\mathbf{Y}_{l,1}^2(\xi)$ sulla cupola. Infatti:

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{C}} \mathbf{Y}_{l,1}^2(\xi) d\mathbf{S}^2 &= \frac{1}{2} \int_{-\gamma}^{\gamma} \int_0^{2\pi} c_l \mathbf{P}_l(\cos(\theta)) |\sin(\theta)| d\phi d\theta = \\ &= c_l \frac{1}{2} \int_{-\gamma}^{\gamma} \mathbf{P}_l(\cos(\theta)) |\sin(\theta)| d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \end{aligned}$$

$$= c_l \frac{1}{2} \sum_{j_1=1}^{n+1} \lambda_{j_1} \mathbf{P}_l(\cos(\theta_{j_1})) \sum_{j_2=1}^{n+1} \tilde{\lambda}_{j_2}$$

Per ottenere la formula $\tilde{\mathcal{Q}}_{\mathfrak{C},n}(\mathbf{Y}_{l,1}^2(\xi))$ è sufficiente notare che la formula Gaussiana descritta nella Proposizione 1 produce punti simmetrici, ed essendo questi in numero pari, si ottiene una simmetria centrale sulla circonferenza $[0, 2\pi]$. Anche i punti nel Corollario 1 sono simmetrici rispetto al centro, ovvero rispetto al Polo Nord, di conseguenza ogni punto viene ripetuto due volte, ricordando la relazione (30). Da queste considerazioni segue che:

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{C}} \mathbf{Y}_{l,1}^2(\xi) d\mathbf{S}^2 &= c_l \frac{1}{2} \sum_{j_1=1}^{n+1} \lambda_{j_1} \mathbf{P}_l(\cos(\theta_{j_1})) \sum_{j_2=1}^{n+1} \tilde{\lambda}_{j_2} \\ &= c_l \sum_{j_1=1}^{n+1} \lambda_{j_1} \mathbf{P}_l(\cos(\theta_{j_1})) \sum_{j_2=1}^{(n+1)/2} \tilde{\lambda}_{j_2} = \tilde{\mathcal{Q}}_{\mathfrak{C},n}(\mathbf{Y}_{l,1}^2(\xi_{j_1,j_2})) \end{aligned}$$

Consideriamo ora $\mathbf{Y}_{l,2m}^2(\xi)$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{C}} \mathbf{Y}_{l,2m}^2(\xi) d\mathbf{S}^2 &= \frac{1}{2} \int_{-\gamma}^{\gamma} \int_0^{2\pi} c_{l,m} \mathbf{P}_{l,3,m}(\cos(\theta)) \cos(m\phi) |\sin(\theta)| d\phi d\theta = \\ &= c_{l,m} \frac{1}{2} \int_{-\gamma}^{\gamma} \mathbf{P}_{l,3,m}(\cos(\theta)) |\sin(\theta)| d\theta \int_0^{2\pi} \cos(m\phi) d\phi = \\ &= c_{l,m} \frac{1}{2} \sum_{j_1=1}^{n+1} \lambda_{j_1} \mathbf{P}_{l,3,m}(\cos(\theta_{j_1})) \sum_{j_2=1}^{n+1} \cos(m\phi_{j_2}) \tilde{\lambda}_{j_2} \end{aligned}$$

Anche in questo caso, grazie alle simmetrie si nota che i nodi (e i relativi pesi) sono ripetuti due volte, da cui:

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{C}} \mathbf{Y}_{l,2m}^2(\xi) d\mathbf{S}^2 &= c_{l,m} \frac{1}{2} \sum_{j_1=1}^{n+1} \lambda_{j_1} \mathbf{P}_{l,3,m}(\cos(\theta_{j_1})) \sum_{j_2=1}^{n+1} \cos(m\phi_{j_2}) \tilde{\lambda}_{j_2} = \\ &= c_{l,m} \sum_{j_1=1}^{n+1} \lambda_{j_1} \mathbf{P}_{l,3,m}(\cos(\theta_{j_1})) \sum_{j_2=1}^{(n+1)/2} \cos(m\phi_{j_2}) \tilde{\lambda}_{j_2} = \tilde{\mathcal{Q}}_{\mathfrak{C},n}(\mathbf{Y}_{l,2m}^2(\xi_{j_1,j_2})) \end{aligned}$$

Ragionamento analogo si ha per $\mathbf{Y}_{l,2m+1}^2(\xi)$.

- sia ora n pari.

Il ragionamento è simile al caso n dispari. Ora però i nodi di cubatura della formula subperiodica per la variabile ϕ non possiedono la simmetria centrale sul cerchio, essendo in numero dispari. Per risolvere tale problema si può notare che una formula di quadratura Gaussiana subperiodica di grado $n + 1$ è esatta anche per i gradi inferiori, quindi anche per il grado n , essendo ovviamente $\mathbb{P}_s \subset \mathbb{P}_n$, $s \leq n$. Quindi per la variabile ϕ consideriamo la formula di grado $n + 1$ in modo da avere nuovamente grado dispari e mantenere la simmetria centrale. A questo punto, essendo i nodi θ_{j_1} ancora simmetrici rispetto al Polo Nord, vediamo che i nodi si ripetono due volte. Inoltre, ora i punti θ_{j_1} sono in numero dispari, da cui risulta che è presente anche un punto centrale, situato al Polo Nord. Tale punto viene ripetuto $(n+2)/2$ volte, da cui possiamo togliere $((n+2)/2) - 1 = (n+2-2)/2 = n/2$ ripetizioni. Calcoliamo il corrispettivo peso, il cui indice sarà $j_1 = \lceil (n+1)/2 \rceil$:

$$\lambda_{\lceil (n+1)/2 \rceil} \cdot \sum_{j_2=1}^{(n+2)/2} \tilde{\lambda}_{j_2} = \lambda_{\lceil (n+1)/2 \rceil} \cdot \sum_{j_2=1}^{n+2} \frac{\tilde{\lambda}_{j_2}}{2} = \lambda_{\lceil (n+1)/2 \rceil} \cdot \frac{2\pi}{2} = \lambda_{\lceil (n+1)/2 \rceil} \cdot \pi$$

dove si è utilizzato il fatto che $\sum_{j_2=1}^{n+2} \tilde{\lambda}_{j_2} = 2\pi$ dato che i punti sono esatti anche per il polinomio costante 1.

□

Nota 2 A differenza della formula nella Proposizione 1, valida per qualunque intervallo $[\alpha, \beta]$ semplicemente traslando i nodi, in generale le formule nel Teorema 4 sono valide unicamente per intervalli $[-\omega, \omega]$, e in particolare la formula nel Corollario 1, è applicabile ad intervalli $[-\omega, \omega]$, oppure $[-\omega + \pi/2, \omega + \pi/2]$. Questa differenza è insita nel differente peso che si vuole utilizzare negli integrali: nel primo caso cerchiamo una formula per $\int_{-\omega}^{\omega} f(\theta) d\theta$, ovvero con funzione peso $\mathcal{W}_1(\theta) = 1$, nel secondo caso $\int_{-\omega}^{\omega} f(\theta) |\sin(\theta)| d\theta$ con $\mathcal{W}_2(\theta) = |\sin(\theta)|$. La dimostrazione è basata sulla simmetria, da cui segue questa nota. Infatti \mathcal{W}_1 è una funzione simmetrica per qualsiasi intervallo, mentre la funzione \mathcal{W}_2 è simmetrica solo per gli intervalli $[-\omega, \omega]$ e $[-\omega + \pi/2, \omega + \pi/2]$. Oltre alla cupola, si vede facilmente che è possibile ridurre il numero di nodi da $(n+2) \cdot (n+1)$ a $(n+1) \cdot (n+1)$ per alcune particolari regioni, in particolare per regioni \mathfrak{R} che siano simmetriche rispetto all'Equatore, comprendendo anelli e slice.

3 Esempi di cubatura

3.1 Esempi su \mathbb{S}^d

Sperimentiamo numericamente l'esattezza polinomiale della formula sopra esposta. Sia dato un polinomio p in \mathbb{S}^d di grado n :

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^J a_j x_1^{b_{1,j}} x_2^{b_{2,j}} \dots x_{d+1}^{b_{d+1,j}}$$

con $a_j \in \mathbb{R}$, $b_{i,j} \in \mathbb{N}$, $\sum_i b_{i,j} \leq n$ per ogni j , e $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1,\dots,d+1}$ sono le coordinate cartesiane del punto $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^d$. Per la linearità dell'integrale avremo che

$$\int p(\mathbf{x}) d\mathbf{S}^d = \int \sum_{j=1}^J a_j x_1^{b_{1,j}} x_2^{b_{2,j}} \dots x_{d+1}^{b_{d+1,j}} d\mathbf{S}^d = \sum_{j=1}^J a_j \int x_1^{b_{1,j}} x_2^{b_{2,j}} \dots x_{d+1}^{b_{d+1,j}} d\mathbf{S}^d$$

di conseguenza per testare il grado precisione delle formule fino a grado n basta verificare l'esattezza sui monomi $x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_{d+1}^{b_{d+1}}$.

Osserviamo che al crescere del grado di precisione e della dimensione della sfera \mathbb{S}^d , aumentano anche il numero di punti di valutazione della funzione e di conseguenza é inevitabile che aumentino pure gli errori di approssimazione. Si noti inoltre che anche la regione \mathfrak{R} gioca un ruolo importante. Quale esempio consideriamo il monomio in $\mathbb{P}_{13}(\mathbb{S}^4)$

$$p(\mathbf{x}) = x_1^4 x_2^3 x_3^2 x_4^2 x_5^2$$

Per capire l'origine del problema di approssimazione eseguiamo il cambio di coordinate in (1) dentro l'integrale, da cui avremo

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{R}} x_1^4 x_2^3 x_3^2 x_4^2 x_5^2 d\mathbf{S}^4 &= \\ \int_{\mathfrak{R}} (\cos(\phi) \sin(\theta_3) \sin(\theta_2) \sin(\theta_1))^4 (\sin(\phi) \sin(\theta_3) \sin(\theta_2) \sin(\theta_1))^3 &\cdot \\ \cdot (\cos(\theta_3) \sin(\theta_2) \sin(\theta_1))^2 (\cos(\theta_2) \sin(\theta_1))^2 (\cos(\theta_1))^2 d\mathbf{S}^4 &= \\ \int_{\mathfrak{R}} \cos^4(\phi) \sin^3(\phi) \cos^2(\theta_3) \sin^7(\theta_3) \cos^2(\theta_2) \sin^9(\theta_2) \cos^2(\theta_1) \sin^{11}(\theta_1) d\mathbf{S}^4 &= \\ \int_{\mathfrak{R}} \cos^4(\phi) \sin^3(\phi) \cos^2(\theta_3) \sin^7(\theta_3) \cos^2(\theta_2) \sin^9(\theta_2) \cos^2(\theta_1) \sin^{11}(\theta_1) &\cdot \\ \cdot \sin^3(\theta_1) \sin^2(\theta_2) \sin(\theta_3) d\phi d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 &= \end{aligned}$$

$$\int_{\mathfrak{R}} \cos^4(\phi) \sin^3(\phi) \cos^2(\theta_3) \sin^8(\theta_3) \cos^2(\theta_2) \sin^{11}(\theta_2) \cos^2(\theta_1) \sin^{14}(\theta_1) d\phi d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3$$

Si tenga presente che tutti i termini del precedente integrale assumono valori nell'intervallo $[-1, 1]$, si capisce dunque che si dovrà lavorare con numeri molto piccoli in valore assoluto.

Definiamo una regione test come:

$$\mathfrak{R}_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^4 : \gamma \in [\pi/3, \pi/2], \tau_3 \in [0.001, 0.7], \tau_2 \in [0.001, 0.7], \tau_1 \in [0.001, 0.7]\} \quad (31)$$

Se si volesse calcolare l'integrale del precedente polinomio su tale regione, il cui valore esatto è $2.190268569130004 \times 10^{-13}$, si deve considerare che la sommatoria della formula \mathcal{Q} comprende 57120 termini che variano in valore assoluto da un massimo di 10^{-16} fino ad un minimo di 10^{-95} , e in casi peggiori la differenza tra i vari addendi della sommatoria può essere anche maggiore. Conseguentemente ci si trova di fronte al classico problema di cancellazione. Quindi aumentando il grado di precisione, possiamo ottenere un peggioramento delle stime.

Introduciamo ora le regioni test:

$$\mathfrak{R}_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^4 : \gamma \in [\pi/4, 3\pi/4], \tau_3 \in [0.01, 0.65], \tau_2 \in [0.01, 0.65], \tau_1 \in [0.01, 0.65]\} \quad (32)$$

$$\mathfrak{R}_3 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^4 : \gamma \in [\pi/4, 7\pi/4], \tau_3 \in [0.6, 1.3], \tau_2 \in [0.6, 1.3], \tau_1 \in [0.6, 1.3]\} \quad (33)$$

e calcoliamo su $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3$ l'integrale dei seguenti polinomi:

- Sia $p_1(\mathbf{x}) = x_3 x_4^3 x_5^4$, con il camio di coordinate otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{R}} x_3 x_4^3 x_5^4 d\mathbf{S}^4 &= \int_{\mathfrak{R}} (\cos(\theta_3) \sin(\theta_2) \sin(\theta_1))^3 (\cos(\theta_2) \sin(\theta_1))^3 \cdot \\ &\quad \cdot (\cos(\theta_1))^4 \sin^3(\theta_1) \sin^2(\theta_2) \sin(\theta_3) d\phi d\theta_3 d\theta_2 d\theta_1 = \\ &= \int_{\mathfrak{R}} \cos(\theta_3) \sin(\theta_3) \cos^3(\theta_2) \sin^3(\theta_2) \cos^4(\theta_1) \sin^7(\theta_1) d\phi d\theta_3 d\theta_2 d\theta_1 = \\ &= \int_{\gamma} d\phi \int_{\tau_3} \cos(\theta_3) \sin(\theta_3) d\theta_3 \int_{\tau_2} \cos^3(\theta_2) \sin^3(\theta_2) d\theta_2 \int_{\tau_1} \cos^4(\theta_1) \sin^7(\theta_1) d\theta_1 \end{aligned}$$

Utilizzando Mathematica per il calcolo di ognuno di questi integrali otteniamo:

$$\begin{aligned} &[\phi]_{\gamma} \cdot \left[-\frac{1}{2} \cos^2(\theta_3) \right]_{\tau_3} \cdot \left[-\frac{3}{64} \cos(2\theta_2) + \frac{1}{192} \cos(6\theta_2) \right]_{\tau_2} \cdot \\ &\cdot \left[-\frac{7 \cos(\theta_1)}{512} - \frac{1}{512} \cos(3\theta_1) + \frac{11 \cos(5\theta_1)}{5120} - \frac{\cos(7\theta_1)}{7168} - \frac{\cos(9\theta_1)}{3072} + \frac{\cos(11\theta_1)}{11264} \right]_{\tau_1} \end{aligned}$$

I valori esatti di tali integrali sulle nostre tre regioni test sono:

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_1 & : 6.877102537851039 \ E - 06 \\ \mathfrak{R}_2 & : 9.77175415282563 \ E - 06 \\ \mathfrak{R}_3 & : 1.140642041191397 \ E - 03\end{aligned}$$

Calcolando gli integrali con la formula da noi introdotta avente grado di precisione 8 e 11880 nodi, ricaviamo:

Regione	Integrale numerico	Errore assoluto	Errore relativo
\mathfrak{R}_1	6.877102537850998 $E - 06$	4.06 $E - 20$	5.91 $E - 15$
\mathfrak{R}_2	9.771754152825726 $E - 06$	9.48 $E - 20$	9.70 $E - 15$
\mathfrak{R}_3	1.140642041191405 $E - 03$	7.80 $E - 18$	6.84 $E - 15$

Come si vede dai risultati, gli errori assoluti dipendono ovviamente dal valore dell'integrale esatto che si intende approssimare, mentre gli errori relativi restano sempre dell'ordine della precisione di macchina 10^{-15}

- Sia $p_2(\mathbf{x}) = x_1^2 x_2^2 x_3 x_4 x_5^3$. Dopo il cambio di varibili come nel caso precedente, otteniamo:

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{R}} x_1^2 x_2^2 x_3 x_4 x_5^3 d\mathbf{S}^4 &= \int_{\gamma} \cos^2(\phi) \sin^2(\phi) d\phi \int_{\tau_3} \cos(\theta_3) \sin^5(\theta_3) d\theta_3 \cdot \\ &\cdot \int_{\tau_2} \cos(\theta_2) \sin^7(\theta_2) d\theta_2 \int_{\tau_1} \cos^3(\theta_1) \sin^9(\theta_1) d\theta_1\end{aligned}$$

Calcoliamo anche in questo caso l'integrale indefinito con l'aiuto di Mathematica:

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\phi}{8} - \frac{1}{32} \sin(4\phi) \right]_{\gamma} \cdot \left[\frac{\sin^6(\theta_3)}{6} \right]_{\tau_3} \cdot \left[\frac{\sin^8(\theta_2)}{8} \right]_{\tau_2} \cdot \\ &\cdot \left[-\frac{9 \cos(2\theta_1)}{1024} + \frac{27 \cos(4\theta_1)}{8192} + \frac{\cos(6\theta_1)}{6144} - \frac{3 \cos(8\theta_1)}{4096} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3 \cos(10\theta_1)}{10240} - \frac{\cos(12\theta_1)}{24576} \right]_{\tau_1}\end{aligned}$$

Le soluzioni esatte sono:

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_1 & : 1.36584263588778 \ E - 09 \\ \mathfrak{R}_2 & : 1.655704704552359 \ E - 09 \\ \mathfrak{R}_3 & : 1.06131379058252 \ E - 04\end{aligned}$$

e le nostre stime saranno, con grado di precisione 9 e 17160 nodi:

Regione	Integrale numerico	Errore assoluto	Errore relativo
\mathfrak{R}_1	1.365842635887772 $E - 09$	8.06 $E - 24$	5.90 $E - 15$
\mathfrak{R}_2	1.655704704552349 $E - 09$	1.01 $E - 23$	6.12 $E - 15$
\mathfrak{R}_3	1.061313790582525 $E - 04$	5.14 $E - 19$	4.85 $E - 15$

anche in questo caso quindi otteniamo errori relativi al limite della precisione di macchina.

- Sia $p_3(\mathbf{x}) = x_1^4 x_2^3 x_3^2 x_4^2 x_5^2$. Con i soliti cambi di variabili otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{R}} x_1^4 x_2^3 x_3^2 x_4^2 x_5^2 d\mathbf{S}^4 = \\ \int_{\gamma} \cos^4(\phi) \sin^3(\phi) d\phi \int_{\tau_3} \cos^2(\theta_3) \sin^8(\theta_3) d\theta_3 \cdot \\ \cdot \int_{\tau_2} \cos^2(\theta_2) \sin^{11}(\theta_2) d\theta_2 \int_{\tau_1} \cos^2(\theta_1) \sin^{14}(\theta_1) d\theta_1 \end{aligned}$$

Il suo integrale indefinito è :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{70} \cos^5(\phi) \cdot (-9 + 5 \cos(2\phi)) \right]_{\gamma} \cdot \left[\frac{1}{30720} \cdot (840\theta_3 - 420 \sin(2\theta_3) \right. \\ & \quad \left. - 120 \sin(4\theta_3) + 130 \sin(6\theta_3) - 45 \sin(8\theta_3) + 6 \sin(10\theta_3)) \right]_{\tau_3} \cdot \\ & \cdot \left[\frac{1}{4612608} \cos^3(\theta_2) \cdot (-586654 + 642234 \cos(2\theta_2) - 238200 \cos(4\theta_2) + \right. \\ & \quad \left. + 60305 \cos(6\theta_2) - 9450 \cos(8\theta_2) + 693 \cos(10\theta_2)) \right]_{\tau_2} \cdot \\ & \cdot \left[\frac{1}{55050240} \cdot (720720\theta_1 - 480480 \sin(2\theta_1) + 101920 \sin(6\theta_1) \right. \\ & \quad \left. - 76440 \sin(8\theta_1) + 32928 \sin(10\theta_1) - 8960 \sin(12\theta_1) + \right. \\ & \quad \left. + 1440 \sin(14\theta_1) - 105 \sin(16\theta_1)) \right]_{\tau_1} \end{aligned}$$

e i valori esatti sulle varie regioni:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_1 & : 2.190268569130004 \ E - 13 \\ \mathfrak{R}_2 & : 3.946789748508915 \ E - 13 \\ \mathfrak{R}_3 & : 3.060360093430965 \ E - 07 \end{aligned}$$

Calcolando l'integrale con la formula di cubatura introdotta con grado di precisione 13 e 57120 punti, otteniamo:

Regione	Integrale numerico	Errore assoluto	Errore relativo
\mathfrak{R}_1	2.190268569129981 $E - 13$	2.29 $E - 27$	1.04 $E - 14$
\mathfrak{R}_2	3.946789748508966 $E - 13$	5.09 $E - 27$	1.29 $E - 14$
\mathfrak{R}_3	3.060360093431082 $E - 07$	1.16 $E - 20$	3.80 $E - 14$

Come si vede dalle tabelle, possiamo notare che già con il grado 13, gli errori relativi iniziano ad aumentare, passando dall'ordine 10^{-15} dei precedenti esempi all'ordine 10^{-14} .

- Sia $p_4(\mathbf{x}) = x_1^6 x_2^6 x_3^7 x_4^7 x_5^7$. Tale integrale diviene:

$$\int_{\mathfrak{R}} x_1^6 x_2^6 x_3^7 x_4^7 x_5^7 d\mathbf{S}^4 =$$

$$\int_{\gamma} \cos^6(\phi) \sin^6(\phi) d\phi \int_{\tau_3} \cos^7(\theta_3) \sin^{13}(\theta_3) d\theta_3 \cdot$$

$$\cdot \int_{\tau_2} \cos^7(\theta_2) \sin^{21}(\theta_2) d\theta_2 \int_{\tau_1} \cos^7(\theta_1) \sin^{29}(\theta_1) d\theta_1$$

E il suo integrale indefinito calcolato con Mathematica:

$$\left[\frac{1}{24576} (120\phi - 45 \sin(4\phi) + 9 \sin(8\phi) - \sin(12\phi)) \right]_{\gamma} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{1}{220200960} (-152880 \cos^2(\theta_3) + 19110 \cos(4\theta_3) + 11760 \cos(6\theta_3) \right.$$

$$- 9240 \cos(8\theta_3) - 336 \cos(10\theta_3) + 2415 \cos(12\theta_3) - 660 \cos(14\theta_3)$$

$$\left. - 210 \cos(16\theta_3) + 140 \cos(18\theta_3) - 21 \cos(20\theta_3) \right]_{\tau_3} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{1}{537407782912} (-72424352 \cos^2(\theta_2) + 15842827 \cos(4\theta_2) + 532532 \cos(6\theta_2) \right.$$

$$- 5591586 \cos(8\theta_2) + 3111108 \cos(10\theta_2) + 49049 \cos(12\theta_2) - 980408 \cos(14\theta_2)$$

$$+ 532532 \cos(16\theta_2) - 56056 \cos(18\theta_2) - 77077 \cos(20\theta_2) + 48412 \cos(22\theta_2)$$

$$\left. - 14014 \cos(24\theta_2) + 2156 \cos(26\theta_2) - 143 \cos(28\theta_2) \right]_{\tau_2} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{1}{105140799406080} (-2143071000 \cos(2\theta_1) + 1178689050 \cos(4\theta_1) \right.$$

$$\left. - 244922400 \cos(6\theta_1) - 244922400 \cos(8\theta_1) + 283258080 \cos(10\theta_1) \right]$$

$$\begin{aligned}
& -121130100 \cos(12\theta_1) - 13843440 \cos(14\theta_1) + 52179120 \cos(16\theta_1) \\
& -33405680 \cos(18\theta_1) + 8714268 \cos(20\theta_1) + 2472480 \cos(22\theta_1) \\
& -3598560 \cos(24\theta_1) + 1884960 \cos(26\theta_1) - 625005 \cos(28\theta_1) \\
& +141372 \cos(30\theta_1) - 21420 \cos(32\theta_1) + 1980 \cos(34\theta_1) - 85 \cos(36\theta_1) \Big]_{\tau_1}
\end{aligned}$$

Sulle regioni test il valore di tale integrale è :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}_1 & : 2.539589341735816 \ E - 22 \\
\mathfrak{R}_2 & : 8.87026372813527 \ E - 23 \\
\mathfrak{R}_3 & : 6.509187109835031 \ E - 14
\end{aligned}$$

mentre l'integrale numerico da noi calcolato restituisce i seguenti valori, calcolati con grado di precisione 33 e 1585080 punti:

Regione	Integrale numerico	Errore assoluto	Errore relativo
\mathfrak{R}_1	2.539589341735154 $E - 22$	6.61 $E - 35$	2.60 $E - 13$
\mathfrak{R}_2	8.870263728130242 $E - 23$	5.02 $E - 35$	5.66 $E - 13$
\mathfrak{R}_3	6.509187109835014 $E - 14$	1.64 $E - 28$	2.52 $E - 15$

Possiamo vedere che anche in questo caso, su alcune regioni, in particolare le regioni dove l'integrale risulta essere *piccolo* in valore assoluto, ci possono essere problemi di approssimazione che non ci permettono di raggiungere la precisione di macchina negli errori relativi.

3.2 Esempi su \mathbb{S}^2

Creiamo alcuni esempi su \mathbb{S}^2 in modo tale da poter disegnare i punti e capire come si dispongono sulle varie regioni. Nei successivi disegni useremo una triangolazione di Delaunay per vedere meglio come si dispongono i punti sulla sfera. Coloreremo ogni triangolo in base ai pesi dei rispettivi vertici, un colore tendente al blu indica che la media dei pesi dei vertici è relativamente piccola, mentre un colore tendente al rosso indica che i pesi incidono maggiormente nel calcolo dell'integrale.

Come nella sezione precedente verifichiamo l'esattezza della formula per un monomio, successivamente proveremo a testare la formula con una funzione non polinomiale. Siano le regioni test:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}_1 & := \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2 : \phi \in [0.2, 1.2], \theta \in [0.5, 1.2]\} \\
\mathfrak{R}_2 & := \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2 : \phi \in [0, 2\pi], \theta \in [0.8, 1.4]\} \\
\mathfrak{R}_3 & := \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2 : \phi \in [0.5, 1], \theta \in [0, \pi]\}
\end{aligned}$$

si possono osservare le tre regioni nelle figure, costruite per vari gradi.

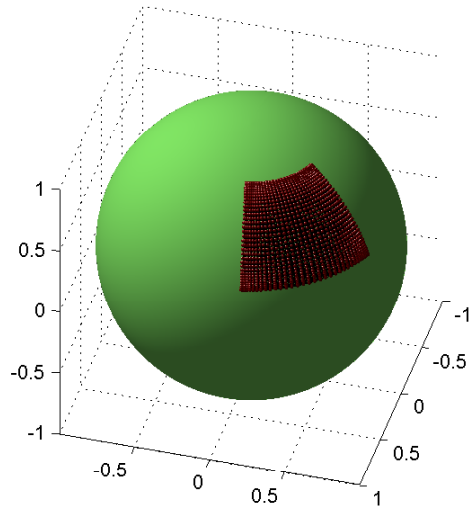
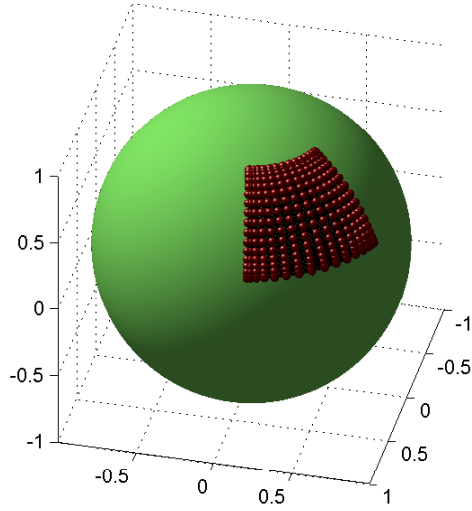


Figura 3: Regione \mathfrak{R}_1 per gradi rispettivamente 15 in alto e 35 in basso

- sia $p(x_1, x_2, x_3) = x_1^7 x_2^6 x_3^2$. L'integrale di tale polinomio risulta:

$$\int_{\mathfrak{R}} x_1^7 x_2^6 x_3^2 d\mathbf{S}^2 = \int_{\gamma} \cos^7(\phi) \sin^6(\phi) d\phi \int_{\tau} \cos^2(\theta) \sin^{14}(\theta) d\theta$$

Calcolando l'integrale indefinito otteniamo con Mathematica

$$\left[\frac{(5230 + 6377 \cos(2\phi) + 1890 \cos(4\phi) + 231 \cos(6\phi)) \sin^7(\phi)}{96096} \right]_{\gamma} \cdot \left[\frac{1}{55050240} (720720\theta - 480480 \sin(2\theta) + 101920 \sin(6\theta) - 76440 \sin(8\theta) + 32928 \sin(10\theta) - 8960 \sin(12\theta) + 1440 \sin(14\theta) - 105 \sin(16\theta)) \right]_{\tau}$$

I valori esatti di tali integrali sulle nostre tre regioni test sono:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_1 &: 5.840500803255986 \ E - 05 \\ \mathfrak{R}_2 &: 0 \\ \mathfrak{R}_3 &: 1.807083321348934 \ E - 04 \end{aligned}$$

Calcolando gli integrali con la formula da noi introdotta avente grado di precisione 15 e 272 nodi, ricaviamo:

Regione	Integrale numerico	Errore assoluto	Errore relativo
\mathfrak{R}_1	5.840500803255997 $E - 05$	1.15 $E - 19$	1.97 $E - 15$
\mathfrak{R}_2	1.103953177561739 $E - 18$	1.10 $E - 18$	— — — — —
\mathfrak{R}_3	1.807083321348936 $E - 04$	1.89 $E - 19$	1.04 $E - 15$

- consideriamo la funzione $f = 1/x_3^2$. Il suo integrale risulta

$$\int_{\mathfrak{R}} \frac{1}{x_3^2} d\mathbf{S}^2 = \int_{\gamma} \int_{\tau} \frac{1}{\cos^2(\theta)} \cdot \sin(\theta) d\theta d\phi$$

Risolvendo l'integrale avremo:

$$[1]_{\gamma} \cdot [\sec(\theta)]_{\tau}$$

I valori esatti sulle regioni test:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_1 &: 1.620209668603238 \\ \mathfrak{R}_2 &: 2.794865039933416 \ E + 01 \\ \mathfrak{R}_3 &: \inf \end{aligned}$$

Calcoliamo gli integrali utilizzando le formule di grado 15 e 35, con rispettivamente 272 e 1332 nodi:

Grado 15

Regione	Integrale numerico	Errore assoluto	Errore relativo
\mathfrak{R}_1	1.62020967400786	5.40 $E - 09$	3.33 $E - 09$
\mathfrak{R}_2	2.794865053350260 $E + 01$	1.34 $E - 07$	4.80 $E - 09$
\mathfrak{R}_3	4.948024210901539 $E + 30$	— — — — —	— — — — —

Grado 35

Regione	Integrale numerico	Errore assoluto	Errore relativo
\mathfrak{R}_1	1.620209674007856	$5.40 \ E - 09$	$3.33 \ E - 09$
\mathfrak{R}_2	$2.794865053350401 \ E + 01$	$1.34 \ E - 07$	$4.80 \ E - 09$
\mathfrak{R}_3	$1.585998293144227 \ E + 31$	— — — — —	— — — — —

Si osserva come per tale funzione gli errori assoluti e relativi si stabilizzano nonostante l'aumentare del grado di approssimazione.

3.3 Casi particolari su \mathbb{S}^2 : le cupole

4 Le WAM sulla sfera

4.1 Introduzione sulle WAM

In questo capitolo introdurremo la nozione di Admissible Mesh e di Weakly Admissible Mesh, mostrando come da queste sia possibile estrarre punti in qualche senso *quasi-ottimali* per l'interpolazione polinomiale multivariata, un problema tuttora aperto, anche su domini standard.

Dato $K \subset \mathbb{R}^d$ o \mathbb{C}^d , sia $\Pi_N := \text{span}\{\psi_j\}_{1 \leq j \leq N}$ uno spazio di dimensione finita di funzioni continue linearmente indipendenti. Sia dato un insieme di punti $\{P_1, \dots, P_N\} \subset K$ e costruiamo la matrice di Vandermonde:

$$V(P_1, \dots, P_N) := [\psi_i(P_j)]_{1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N}$$

è noto che se $\det(V(P_1, \dots, P_N)) \neq 0$ allora i punti $\{P_1, \dots, P_N\}$ sono un insieme unisolvente per l'interpolazione su Π_N ovvero due funzioni che assumono gli stessi valori nei precedenti punti, sono coincidenti nello spazio Π_N . Inoltre definendo

$$\varphi_j(x) := \frac{\det(V(P_1, \dots, P_{j-1}, x, P_{j+1}, \dots, P_N))}{\det(V(P_1, \dots, P_{j-1}, P_j, P_{j+1}, \dots, P_N))}, 1 \leq j \leq N$$

si ha che φ_j sono una base cardinale per lo spazio, ovvero $\varphi_j(\chi_k) = \delta_{jk}$, ed è possibile costruire il polinomio interpolatorio di Lagrange

$$L_{S_N}(f)(x) := \sum_{j=1}^N f(P_j) \varphi_j(x)$$

Si può inoltre valutare l'errore dell'interpolazione con la seguente formula (per una introduzione a tale argomento si veda [37], [27] o per una teoria generale si guardi ad esempio [33], pp.213-215)

$$\|f - L_{S_N}(f)\|_\infty \leq (1 + \Lambda_N) \inf_{q \in \Pi_N} \|f - q\|_\infty \quad (34)$$

dove abbiamo indicato con Λ_N la costante di Lebesgue definita come:

$$\Lambda_N := \|L_{S_N}\| = \max_{x \in K} \sum_{j=1}^N |\varphi_j(x)|$$

Dalla stima di interpolazione (34) si comprende l'importanza di cercare punti per cui Λ_N sia minima. Dalla definizione delle φ_j si può intuire immediatamente come la scelta dei punti $\{P_1, \dots, P_N\}$ su cui interpolare la funzione giochi un

ruolo essenziale per la buona riuscita del metodo. Purtroppo la ricerca di punti ottimi, ovvero punti che minimizzino la costante di Lebesgue, è un problema computazionalmente difficile da risolvere.

Le ricerche spesso si sono basate sul calcolo di altri punti non ottimi ma per cui tuttavia sia *sotto controllo* la crescita di Λ_N , come ad esempio i *punti di Fekete*, tali da massimizzare il determinante della matrice di Vandermonde. In questo modo si ottiene la seguente maggiorazione:

$$\Lambda_N := \max_{x \in K} \sum_{j=1}^N |\varphi_j(x)| = \max_{x \in K} \sum_{j=1}^N \left| \frac{\det(V(P_1, \dots, P_{j-1}, x, P_{j+1}, \dots, P_N))}{\det(V(P_1, \dots, P_{j-1}, P_j, P_{j+1}, \dots, P_N))} \right| \leq N$$

La ricerca di punti di Fekete nel continuo, ovvero la massimizzazione del determinante della matrice di Vandermonde, è un problema di ottimizzazione non lineare, che diventa computazionalmente pesante già per gradi bassi, ed è stato risolto solo in pochi e semplici casi (si veda ad esempio [10] e [23]).

Proprio nell'ottica dell'interpolazione polinomiale è stata sviluppata inizialmente la teoria delle *Admissible Mesh*, e delle *Weakly Admissible Mesh* che abbrevieremo rispettivamente con AM e WAM (cf. [12], [11], [6] e [37]). Mostreremo come determinare, partendo da queste, degli insiemi particolari detti *punti approssimati di Fekete*, che consistono nello scegliere da una mesh di punti prefissati quelli che maggiorano il determinante della matrice di Vandermonde. Come specificheremo in seguito, si può verificare che la loro distribuzione asintotica è simile ai punti di Fekete nel continuo.

Sia $K \subset \mathbb{R}^d$ (è possibile anche considerare $K \subset \mathbb{C}^d$, ma nel seguito ci riferiremo in particolare al caso reale) insieme compatto *polinomialmente determinante*, ovvero che un polinomio nullo su K è il polinomio identicamente zero. Questo è verificato se ad esempio K contiene una palla aperta reale. Ricordiamo a tal proposito che una palla aperta in \mathbb{R}^d centrata in \mathbf{x} di raggio r , è definita come:

$$B_r(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 < r\}$$

Sia \mathbb{P}_n^d lo spazio dei polinomi di grado totale al più n in d variabili. Una Weakly Admissible Mesh, WAM, per K è una sequenza di insiemi discreti $\mathcal{A}_n \subset K$ tale che:

$$\|p\|_K \leq C(\mathcal{A}_n) \|p\|_{\mathcal{A}_n}, \quad p \in \mathbb{P}_n^d$$

dove la cardinalità $\text{card}(\mathcal{A}_n)$ e la costante $C(\mathcal{A}_n)$ crescono al più polinomialmente all'aumentare di n , precisamente:

$$N := \dim(\mathbb{P}_n^d) = \binom{n+d}{d} \leq \text{card}(\mathcal{A}_n) = \mathcal{O}(n^\alpha), \quad \alpha > 0$$

$$C(\mathcal{A}_n) = \mathcal{O}(n^\beta), \beta > 0$$

Quando la costante $C(\mathcal{A}_n)$ è limitata, cioè $C(\mathcal{A}_n) < C$, si parla di Admissible Mesh, AM.

In [12], [6], [7], [29], [28] e [27] è mostrato come costruire AMs su insiemi compatti che soddisfano la disuguaglianza polinomiale di Markov (denotati per brevità *compatti di Markov*):

$$\|\nabla p\|_K \leq Mn^r \|p\|_K, \quad p \in \mathbb{P}_n^d(K)$$

dove $\|\nabla p\|_K = \max_{x \in K} \|\nabla p(x)\|_\infty$. Le AM si possono costruire essenzialmente discretizzando uniformemente il compatto con una spaziatura di $\mathcal{O}(n^{-r})$, dove r è l'esponente presente nella disuguaglianza di Markov. La AM risultante avrà quindi una cardinalità di $\mathcal{O}(n^{rd})$ punti (nel caso reale, diventando $\mathcal{O}(n^{2rd})$ se si considerano compatti nei complessi). Dato che per molti compatti, come ad esempio i compatti convessi reali, si ha $r = 2$, la cardinalità di tali mesh rendono il problema computazionalmente complicato già per dimensioni $d = 2, 3$ a gradi bassi. D'altra parte, è possibile costruire WAM con cardinalità $\mathcal{O}(n^2)$ e costante $C(\mathcal{A}_n) = \mathcal{O}(\log^2 n)$ su domini bidimensionali.

Elenchiamo di seguito alcune importanti proprietà delle (W)AM (cf. [6], [8]):

1. $C(\mathcal{A}_n)$ è invariante sotto mappe affini;
2. sequenze di insiemi discreti unisolventi per l'interpolazione la cui costante di Lebesgue cresce al più polinomialmente con n è una WAM, la cui costante $C(\mathcal{A}_n)$ è la costante di Lebesgue stessa;
3. ogni insieme contenente una WAM, la cui cardinalità cresce al più polinomialmente, è una WAM con la stessa costante $C(\mathcal{A}_n)$;
4. una unione finita di WAM è una WAM per la corrispondente unione dei compatti, la cui costante è il massimo tra le costanti;
5. un prodotto cartesiano finito di WAM è una WAM per il corrispondente prodotto dei compatti, la cui costante è il prodotto delle costanti;
6. data una mappa polinomiale π_s di grado s , allora $\pi_s(\mathcal{A}_{ns})$ è una WAM per $\pi_s(K)$ con costante $C(\mathcal{A}_{ns})$;
7. ogni K che soddisfa una disuguaglianza polinomiale di Markov $\|\nabla p\|_K \leq Mn^r \|p\|_K, p \in \mathbb{P}_n^d(K)$, possiede una AM di cardinalità $\mathcal{O}(n^{rd})$;

8. sia $\mathcal{L}_{\mathcal{A}_n}(f)$ il polinomio approssimante $f \in C(K)$ nel senso dei minimi quadrati su una WAM, allora si ha

$$\|f - \mathcal{L}_{\mathcal{A}_n}(f)\|_K \lesssim C(\mathcal{A}_n) \sqrt{\text{card}(\mathcal{A}_n)} \min\{\|f - p\|_K, p \in \mathbb{P}_n^d(K)\};$$

9. la costante di Lebesgue dei punti approssimati di Fekete estratti da una WAM può essere maggiorata da $\Lambda_n \leq NC(\mathcal{A}_n)$ (maggiorazione tratta dai punti di Fekete nel continuo moltiplicati per il fattore $C(\mathcal{A}_n)$); inoltre la loro distribuzione asintotica è la stessa dei punti di Fekete nel caso continuo nel senso che le corrispondenti misure di probabilità discrete convergono debolmente alla misura di equilibrio pluripotenziiale di K.

Le proprietà sopra esposte mostrano come sia possibile manipolare facilmente le WAM, e la loro potenzialità per l'interpolazione e l'approssimazione ai minimi quadrati. WAM su diverse regioni di \mathbb{R}^2 sono state costruite usando tali proprietà, si veda ad esempio [4], [6], [8], [19] e [18] dove sono analizzate WAM su domini quali il quadrato, il semplice e il cerchio, e dall'unione di queste anche su poligoni qualsiasi. Per regioni non poligonali si guardi ad esempio [4] e [30]. Un'ulteriore importante proprietà delle (W)AM, è la possibilità di essere perturbata senza perdere la proprietà di essere WAM, come si può vedere in [31] e in [27].

Data una WAM, rimane il problema di estrarre da essa i punti approssimati di Fekete. Tale estrazione risulta in realtà inaspettatamente semplice a livello implementativo, utilizzando strumenti standard e ottimizzati dell'algebra lineare numerica, quali ad esempio la fattorizzazione QR. La descrizione dettagliata di tali algoritmi si può incontrare in [36] e [5].

4.2 Costruzione di WAM su parti di sfera

In questa sezione utilizzeremo i punti studiati in [9] e [16] per l'interpolazione trigonometrica subperiodica, per costruire delle WAM su regioni della sfera. In tali articoli è stato provato che, dati i punti

$$\xi_j := \xi_j(n) = \cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{2(2n+1)}\right) \in (-1, 1), \quad j = 1, 2, \dots, 2n+1$$

ovvero gli zeri del polinomio di Chebyshev del primo tipo $T_{2n+1}(\cdot) = \cos(n \arccos(\cdot))$, allora i punti angolari

$$\theta_j := \theta_j(n, \omega) = 2 \arcsin(\alpha \xi_j) \in (-\omega, \omega), \quad j = 1, 2, \dots, 2n+1, \quad \alpha = \sin(\omega/2)$$

ovvero zeri di $T_{2n+1}(\sin(\theta/2)/\alpha)$, sono unisolvienti per l'interpolazione in $\mathbb{T}_n([- \omega, \omega])$. Definendo

$$l_j(x) = \frac{T_{2n+1}(x)}{T'_{2n+1}(\xi_j)(x - \xi_j)}, \quad x = \frac{\sin(\theta/2)}{\alpha}$$

e inoltre

$$a_j(\theta) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\cos(\theta/2)}{\cos(\theta_j/2)} \right) \quad b_j(\theta) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\cos(\theta/2)}{\cos(\theta_j/2)} \right) = 1 - a_j(\theta)$$

allora i corrispondenti polinomi di Lagrange trigonometrici possono essere riscritti come

$$L_j(\theta) = l_j(x), \quad j = n + 1$$

$$L_j(\theta) = a_j(\theta)l_j(x) + b_j(\theta)l_{2n+2-j}(x), \quad j \neq n + 1$$

$$L_{2n+2-j}(\theta) = b_j(\theta)l_j(x) + a_j(\theta)l_{2n+2-j}(x)$$

Si è inoltre dimostrato che la corrispondente costante di Lebesgue assume il suo valore massimo agli estremi $\pm\omega$, è indipendente dall'angolo ω , soddisfa

$$\begin{aligned} \Lambda_n &= \max_{\theta \in [-\omega, \omega]} \sum_{j=1}^{2n+1} |L_j(\theta)| = \max_{\theta \in [-\pi, \pi]} \sum_{j=1}^{2n+1} |L_j(\theta)| = \sum_{j=1}^{2n+1} |L_j(\pm\pi)| = \\ &= \sum_{j=1}^{2n+1} |L_j(\pm\omega)| = \sum_{j=1}^{2n+1} |l_j(\pm 1)| = \max_{x \in [-1, 1]} \sum_{j=1}^{2n+1} |l_j(x)| \end{aligned}$$

e che vale stima

$$\Lambda_n \leq \frac{2}{\pi} \log(n) + \delta_n \approx \mathcal{O}(\log(n))$$

dove δ_n assume valori compresi tra $5/3$ e $(2/\pi)(\log(16/\pi) + \gamma) = 1.40379 \dots$, γ costante di Eulero-Mascheroni.

Ricordiamo le proprietà (2) e (5) delle WAM: insiemi unisolvanti per l'interpolazione la cui costante di Lebesgue cresce al più polinomialmente con n è una WAM con costante la stessa costante di Lebesgue, e il prodotto cartesiano di due WAM è una WAM con costante il prodotto delle costanti.

Osservando che $\Lambda_n \leq \mathcal{O}(\log(n)) \leq \mathcal{O}(n^\alpha)$ per qualche $\alpha > 1$ possiamo utilizzare i punti appena descritti come una WAM e da essa cercheremo una WAM sulla sfera. A tal proposito osserviamo che se volessimo trasportare i punti dall'intervallo $I = (-\omega, \omega)$ ad un intervallo generico $\tilde{I} = (\beta_i, \beta_f)$ allora è possibile eseguire la seguente traslazione $T : I \rightarrow \tilde{I}$:

$$T(\theta) = \theta + \frac{\beta_i + \beta_f}{2}$$

e inoltre si può notare che $\omega = (\beta_f - \beta_i)/2$. Possiamo ora enunciare:

Teorema 6 Sia $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{\gamma_i, \gamma_f, \tau_i, \tau_f}$ una regione in \mathbb{S}^2 , che ricordiamo essere definita come

$$\mathfrak{R}_{\gamma_i, \gamma_f, \tau_i, \tau_f} = \{\mathbf{x}(\phi, \theta) \in \mathbb{S}^2 : \gamma_i \leq \phi \leq \gamma_f, \tau_i \leq \theta \leq \tau_f\}$$

Allora la griglia di punti

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n &:= (\phi_j, \theta_k)_{j,k} = \\ &\left\{ 2 \arcsin \left(\sin \left(\frac{(\gamma_f - \gamma_i)/2}{2} \right) \cos \left(\frac{(2j-1)\pi}{2(2n+1)} \right) \right) + \frac{\gamma_i + \gamma_f}{2}, 1 \leq j \leq 2n+1 \right\} \\ &\times \left\{ 2 \arcsin \left(\sin \left(\frac{(\tau_f - \tau_i)/2}{2} \right) \cos \left(\frac{(2k-1)\pi}{2(2n+1)} \right) \right) + \frac{\tau_i + \tau_f}{2}, 1 \leq k \leq 2n+1 \right\} \end{aligned}$$

è una WAM su \mathfrak{R} di cardinalità $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$ e costante $C(\mathcal{S}_n) = \mathcal{O}(\log^2(n))$.

Dimostrazione

Dato un polinomio sferico $p(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{P}_n(\mathfrak{R})$, è possibile riscriverlo nelle coordinate ipersferiche descritte in (1) come

$$q(\phi, \theta) = p(\cos(\phi) \sin(\theta), \sin(\phi) \sin(\theta), \cos(\theta))$$

diventando un polinomio trigonometrico in ϕ di grado al più n per ogni fissato θ e viceversa un polinomio trigonometrico in θ di grado al più n per ogni fissato ϕ . Come detto all'inizio di questa sezione, i punti sub-trigonometrici sopra descritti sono unisolventi per l'interpolazione con costante di Lebesgue $\mathcal{O}(\log(n))$, quindi possiamo scrivere:

$$|p(x_1, x_2, x_3)| = |q(\phi, \theta)| = |p(\cos(\phi) \sin(\theta), \sin(\phi) \sin(\theta), \cos(\theta))|$$

considerandolo come funzione di ϕ , fissando θ

$$\begin{aligned} &|p(\cos(\phi) \sin(\theta), \sin(\phi) \sin(\theta), \cos(\theta))| \\ &\leq c_1 \log(n) \max_j |p(\cos(\phi_j) \sin(\theta), \sin(\phi_j) \sin(\theta), \cos(\theta))| \end{aligned}$$

con c_1 costante, e similmente

$$\begin{aligned} &|p(\cos(\phi_j) \sin(\theta), \sin(\phi_j) \sin(\theta), \cos(\theta))| \\ &\leq c_2 \log(n) \max_k |p(\cos(\phi_j) \sin(\theta_k), \sin(\phi_j) \sin(\theta_k), \cos(\theta_k))| \end{aligned}$$

unendo infine le disuguaglianze abbiamo $\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathfrak{R}$

$$|p(x_1, x_2, x_3)| \leq c_1 c_2 \log^2(n) \max_{j,k} |p(\cos(\phi_j) \sin(\theta_k), \sin(\phi_j) \sin(\theta_k), \cos(\theta_k))|$$

mostrando appunto come la griglia sia una WAM di costante $C(\mathcal{S}_n) = \mathcal{O}(\log^2(n))$. La cardinalità è il prodotto delle singole cardinalità $(2n+1) * (2n+1)$. \square

Ottenute WAM per una generica regione \mathfrak{R} , siamo in grado di ottenere WAM di cardinalità $4n^2 + 4n + 1$ anche per i suoi casi particolari, come le porzioni di cupole \mathfrak{P} o le cupole \mathfrak{C} , gli anelli e le slice. Ad ogni modo, per alcune regioni è possibile diminuire tale cardinalità ad esempio le cupole:

Teorema 7 *Sia $\mathfrak{C}(\mathbf{z}, \gamma)$ una cupola in \mathbb{S}^2 . Allora la seguente griglia di punti*

$$\mathcal{S}_n := (\phi_j, \theta_k)_{j,k} = \left\{ \frac{\pi j}{n+1}, 0 \leq j \leq n \right\} \\ \times \left\{ 2 \arcsin \left(\sin \left(\frac{\gamma}{2} \right) \cos \left(\frac{(2k-1)\pi}{2(2n+1)} \right) \right), 1 \leq k \leq 2n+1 \right\}$$

è una WAM su $\mathfrak{C}(\mathbf{z}, \gamma)$ di cardinalità $(2n+1) \times (n+1) - n = 2n^2 + 2n + 1$ e costante $C(\mathcal{S}_n) = \mathcal{O}(\log^2(n))$.

Nota 3 *Nella seguente dimostrazione si utilizzeranno le coordinate ipersferiche (1) modificando gli intervalli degli angoli in modo che $\phi \in [0, \pi]$ e $\theta \in [-\pi, \pi]$. Si può verificare che tali coordinate descrivono ugualmente la cupola, con la stessa trasformazione delle precedenti. Tale cambio sarà fondamentale per dimostrare il teorema. Si noti in particolare che grazie alla proprietà del coseno $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$, la definizione della cupola $\mathfrak{C}(\mathbf{z}, \gamma)$ rimane invariata.*

Dimostrazione

Osserviamo come nel caso precedente che un polinomio sferico $p(x_1, x_2, x_3)$ di grado n , si può riscrivere in $p(\cos(\phi) \sin(\theta), \sin(\phi) \sin(\theta), \cos(\theta))$ diventando quindi un polinomio trigonometrico di grado al più n in ϕ per un fissato θ e viceversa di grado al più n in θ per un fissato ϕ . Per tale polinomio, è possibile prendere $\phi \in [0, 2\pi]$, dato che le coordinate rimangono all'interno della cupola $\mathfrak{C}(\mathbf{z}, \gamma)$. Inoltre la griglia \mathcal{S}_n rimane invariata se consideriamo la sua estensione $\phi_j \in \left\{ \frac{2\pi k}{2n+2}, 0 \leq k \leq 2n+1 \right\}$. La griglia in questo modo estesa è una WAM infatti, similmente alla precedente dimostrazione si ha

$$\begin{aligned} |p(x_1, x_2, x_3)| &= |q(\phi, \theta)| = |p(\cos(\phi) \sin(\theta), \sin(\phi) \sin(\theta), \cos(\theta))| \\ &\leq c_1 \log(n) \max_j |p(\cos(\phi_j) \sin(\theta), \sin(\phi_j) \sin(\theta), \cos(\theta))| \\ &\leq c_1 c_2 \log^2(n) \max_{j,k} |p(\cos(\phi_j) \sin(\theta_k), \sin(\phi_j) \sin(\theta_k), \cos(\theta_k))| \end{aligned}$$

dove abbiamo usato i punti sub-periodici per $\theta \in [-\gamma, \gamma]$, e i $2n + 2$ punti equispaziati sul cerchio $[0, 2\pi]$ per ϕ di costante anch'essi $\mathcal{O}(\log(n))$ (cf. [32], par. 1.3).

Avendo dimostrato che la griglia estesa è una WAM di costante $C(\mathcal{S}_n) = \mathcal{O}(\log^2(n))$, concludiamo osservando che i punti equispaziati sono simmetrici rispetto al centro del cerchio su cui sono calcolati, e i punti subperiodici sono simmetrici rispetto al loro centro calcolato per $k = n + 1$. Considerando inoltre la ripetizione di tale centro, possiamo affermare che il numero di punti distinti di tale griglia è $(2n + 1) \times (2n + 2)/2 - n = 2n^2 + 2n + 1$. \square

5 Esempi di WAM e interpolazione

Riprendendo quanto detto nella sezione 4, mostreremo ora alcuni esempi di interpolazione sulla sfera \mathbb{S}^2 , estrapolando i punti approssimati di Fekete da una WAM. A tal proposito, diamo alcuni cenni sul cuore degli algoritmi descritti in dettaglio negli articoli [5] e [36]. La parte principale dell'estrazione dei punti approssimati di Fekete può essere descritta dal pseudocodice:

- inizializzazione
 $\mathbf{P} = [\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_M]; \text{ ind} = [];$
 $\mathbf{W} = \mathbf{V}(\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_N) := [\psi_i(\mathbf{P}_j)]_{1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M}, \quad M \gg N$
- greedy algorithm per trovare la sottomatrice di volume massimo
for $k = 1, \dots, N$
- scegliere la colonna di norma massima $\text{col}_{i_k}(\mathbf{W})$; $\text{ind} = [\text{ind}, i_k]$;
- rimuovere dalle colonne di \mathbf{W} la proiezione ortogonale su col_{i_k} ;
- punti approssimati di Fekete
 $\xi = \mathbf{P}(\text{ind})$

La parte centrale di tale algoritmo può essere implementata efficientemente con la fattorizzazione QR con pivoting sulle colonne. In Matlab (ma non in Octave!) ciò si riduce al semplice comando

$$\omega = \mathbf{W}^T \backslash \mathbf{b}; \quad \text{find}(\omega \neq 0)$$

con \mathbf{b} vettore non nullo, dato che l'operatore standard backslash usa esattamente la fattorizzazione QR con pivoting sulle colonne quando è applicato a un sistema indeterminato, come nel nostro caso, si ricordi infatti $M \gg N$.

Uno dei principali problemi che si hanno nell'esecuzione di tale algoritmo è il condizionamento della matrice. Le matrici di Vandermonde infatti, dipendentemente dalla scelta della base polinomiale e dal grado, possono essere mal condizionate. Per questo motivo si procede a ortogonalizzazioni successive, prima di effettuare il greedy algorithm sopra esposto, mediante cambio di basi con la fattorizzazione QR della matrice \mathbf{W} . Per il funzionamento dell'algoritmo non è richiesta la completa ortogonalizzazione della matrice, ma solo un miglioramento del condizionamento. In generale vale la regola che se il condizionamento di \mathbf{V} è inferiore al reciproco della precisione di macchina, ovvero a 10^{15} , allora due iterazioni di tale procedura ottengono il risultato voluto.

Ottenuti dalle WAM dei punti unisolventi su sottoregioni della sfera, nel nostro caso i punti approssimati di Fekete, la cui costante di Lebesgue sia $\Lambda_n \leq NC(\mathcal{A}_n)$

(con N cardinalità dell'insieme) e data una base per lo spazio dei polinomi sferici, ad esempio le armoniche sferiche $\mathbf{Y}_{l,j}^2$ (ricordiamo che l'apice 2 non indica la potenza bensì ricorda che sono polinomi sulla sfera \mathbb{S}^2), pp.133 – 134, [2]:

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_{l,1}^2(\xi) &= c_l \mathbf{P}_l(\cos(\theta)) \\ \mathbf{Y}_{l,2m}^2(\xi) &= c_{l,m} \mathbf{P}_{l,3,m}(\cos(\theta)) \cos(m\phi) \\ \mathbf{Y}_{l,2m+1}^2(\xi) &= c_{l,m} \mathbf{P}_{l,3,m}(\cos(\theta)) \sin(m\phi), \quad m = 1, \dots, l \end{cases}$$

con $l = 0, 1, \dots, n$, ove i $c_l, c_{l,m}$ sono opportune costanti e

$$\xi = \xi(\phi, \theta) = (\cos(\phi) \sin(\theta), \sin(\phi), \sin(\theta), \cos(\theta))^T$$

è ben noto che è possibile ricavare il polinomio interpolante di grado n per una funzione f , risolvendo il sistema (si veda ad esempio [3], cap.3)

$$\mathbf{V}(\mathbf{Y}_{l,j}^2, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{y}$$

con \mathbf{V} matrice di Vandermonde calcolata per la base $\mathbf{Y}_{l,j}^2$ nei punti $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{\mathbf{Z}(3,n)})^T$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{\mathbf{Z}(3,n)})^T$ vettori di incognite e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{\mathbf{Z}(3,n)})^T$ valori assunti dalla funzione f nei punti \mathbf{x} (si ricordi la dimensione dei polinomi sferici $\mathbf{Z}(3, n)$ calcolata in (4)). A questo punto è possibile scrivere il polinomio interpolante come

$$\mathcal{I}_{\mathbf{Z}(3,n)}(\mathbf{x}) := \mathbf{a}^T * \mathbf{Y}_{l,j}^2(\mathbf{x})$$

5.1 Esempi su regioni generiche di \mathbb{S}^2

Studiamo nel seguito due monomi, in modo da verificare effettivamente l'unisolvenza dei punti approssimati di Fekete, sulle seguenti regioni:

$$\mathfrak{R}_1 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2 : \phi \in [0.2, 1.2], \theta \in [0.5, 1.2]\}$$

$$\mathfrak{R}_2 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2 : \phi \in [0, 2\pi], \theta \in [0.8, 1.4]\}$$

$$\mathfrak{R}_3 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2 : \phi \in [0.5, 1], \theta \in [0, \pi]\}$$

$$\mathfrak{R}_4 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2 : \phi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi/3]\}$$

Quello che vedremo nelle prossime figure sarà utilizzare una WAM da cui estrarre i punti di Fekete e successivamente valuteremo gli errori della nostra interpolazione nei punti della WAM di partenza, prima per un grado inferiore, e successivamente per un grado corretto per il monomio. Si osservi che la regione \mathfrak{R}_4 è una cupola, si potrà quindi verificare la riduzione del numero di punti coerentemente con il Teorema 7, per grado n pari e per grado dispari.

6 Appendice

6.1 Commenti sulla costruzione dei codici Matlab

6.2 Codici di Matlab e di Mathematica usati

Per i calcoli simbolici e il calcolo di integrali esatti ci siamo riferiti alle seguenti funzioni di Mathematica:

`Integrate[f,x]`

gives the indefinite integral of f in dx

`Integrate[f,{x,x_min,x_max}]`

gives the definite integral of f in dx from x_{\min} to x_{\max}

`Simplify[expr]`

performs a sequence of algebraic and other transformations on $expr$, and returns the simplest form it finds

`ScientificForm[expr]`

prints with all real numbers in $expr$ given in scientific notation

`ScientificForm[expr,n]`

prints with numbers given to n -digit precision

Riferimenti bibliografici

- [1] MILTON ABRAMOWITZ AND IRENE A. STEGUN. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. *Dover Publications, New York*, 1972.
- [2] KENDALL ATKINSON AND WEIMIN HAN. Spherical Harmonics and Approximations on the Unit Sphere: An Introduction. *Springer*, 2012.
- [3] KENDALL E. ATKINSON. An introduction to numerical analysis, 2nd edition. *John Wiley and Sons, Inc.*, 1989.
- [4] L. BOS, J.P. CALVI, N. LEVENBERG, A. SOMMARIVA, AND M.VIANELLO. Geometric Weakly Admissible Meshes, Discrete Least Squares Approximations and Approximate Fekete Points. *Math. Comp.*, **80**:1601–1621, 2011.
- [5] L. BOS, S. DE MARCHI, A. SOMMARIVA, AND M.VIANELLO. Computing multivariate Fekete and Leja points by numerical linear algebra. *SIAM J. Numer. Anal.*, **48**:1984–1999, 2010.
- [6] L. BOS, S. DE MARCHI, A. SOMMARIVA, AND M.VIANELLO. Weakly Admissible Meshes and Discrete Extremal Sets. *Numer. Math. Theory Methods Appl.*, **4**:1–12, 2011.
- [7] L. BOS AND M.VIANELLO. Low cardinality Admissible Meshes on quadrangles, triangles and disks. *Math. Inequal. Appl.*, **15**:229–235, 2012.
- [8] L. BOS, A. SOMMARIVA, AND M.VIANELLO. Least-squares polynomial approximation on weakly admissible meshes: disk and triangle. *J. Comput. Appl. Math.*, **235**:660–668, 2010.
- [9] LEN BOS AND MARCO VIANELLO. Subperiodic trigonometric interpolation and quadrature. *Appl. Math. Comput.*, **218**:10630–10638, 2012.
- [10] M. BRIANI, A. SOMMARIVA, AND M.VIANELLO. Computing Fekete and Lebesgue points: simplex, square, disk. *J. Comput. Appl. Math.*, **236**:2477–2486, 2012.
- [11] M. CALIARI, S. DE MARCHI, A. SOMMARIVA, AND M.VIANELLO. Padua2DM: fast interpolation and cubature at the Padua points in Matlab/Octave. *Numer. Algorithms*, **56**:45–60, 2011.

- [12] JEAN-PAUL CALVI AND NORMAN LEVENBERG. Uniform approximation by discrete least squares polynomials. *Journal of Approximation Theory*, **152**:82–100, 2008.
- [13] GASPARE DA FIES, ALVISE SOMMARIVA, AND MARCO VIANELLO. Algebraic cubature by linear blending of elliptical arcs. *Adv. Comput. Math.*, submitted.
- [14] GASPARE DA FIES AND MARCO VIANELLO. Algebraic cubature on planar lenses and bubbles. *Dolomites Res. Notes Approx. DRNA*, **5**:7–12, 2012.
- [15] GASPARE DA FIES AND MARCO VIANELLO. Trigonometric Gaussian quadrature on subintervals of the period. *Electron. Trans. Numer. Anal.*, **39**:102–112, 2012.
- [16] GASPARE DA FIES AND MARCO VIANELLO. On the Lebesgue constant of subperiodic trigonometric interpolation. to appear.
- [17] WALTER GAUTSCHI. Orthogonal Polynomials: Computation and Approximation. *Oxford University Press, New York*, 2004.
- [18] M. GENTILE. An algorithm for convex quadrangulation of polygons, Laurea Thesis in Mathematics (Italian). *University of Padova*, (advisors A.Sommariva, co-advisors M. Vianello), 2010.
- [19] M. GENTILE, A. SOMMARIVA, AND M.VIANELLO. Polynomial interpolation and cubature over polygons. *J. Comput. Appl. Math.*, **235**:5232–5239, 2011.
- [20] KERSTIN HESSE AND ROBERT S. WOMERSLEY. Numerical integration with polynomial exactness over a spherical cap. *Adv. Comput. Math.*, **36**:451–483, 2012.
- [21] BECKMANN J., H. N. MHASKAR, AND J. PRESTIN. Quadrature formulas for integration of multivariate trigonometric polynomials on spherical triangle. *GEM-International Journal on Geomathematics*, pages 1–20, 2012.
- [22] A. MARKOV. On a problem of D.I. Mendelev. *Selected Works (in Russian)*, GITTL, Moscow-Leningrad, 1948.
- [23] M.BRIANI. Calcolo di punti quasi ottimali per l'interpolazione polinomiale sul triangolo, Laurea Thesis in Mathematics (Italian). *University of Padova*, (advisors A.Sommariva, co-advisors M. Vianello), 2010.

- [24] H. N. MHASKAR. Local quadrature formulas on the sphere. *Journal of Complexity*, **20**,5:753–772, 2004.
- [25] H. N. MHASKAR. Local quadrature formulas on the sphere II. *Advances in Constructive Approximation*, Nashboro Press, Nashville, pages 333–344, 2004.
- [26] C. MULLER. Spherical Armonics. *Lecture Notes in Mathematics*, vol.17, Springer, New York, 1966.
- [27] F. PIAZZON. Recent results in the theory of polynomial admissible meshes, Master Thesis in Mathematics. *University of Padova*, (advisor M. Vianello, counter-advisors L. Bos), 2012.
- [28] F. PIAZZON AND M.VIANELLO. Computing optimal polynomial meshes on planar starlike domains. *online draft*.
- [29] F. PIAZZON AND M.VIANELLO. Polynomial meshes on some classes of planar compact domains. *online draft*.
- [30] F. PIAZZON AND M.VIANELLO. Analytic transformations of admissible meshes. *East J. Approx.*, **16**:313–322, 2010.
- [31] F. PIAZZON AND M.VIANELLO. Small perturbations of polynomial meshes. *Appl. Anal.*, **published online**, 2012.
- [32] THEODORE J. RIVLIN. The Chebyshev polynomials. *John Wiley and Sons, Inc.*, 1974.
- [33] GIUSEPPE RODRIGUEZ. Algoritmi numerici. *Pitagora Editrice, Bologna*, 2008.
- [34] IAN H. SLOAN AND ROBERT S. WOMERSLEY. How Good can Polynomial Interpolation on the Sphere be? *Advances in Computational Mathematics*, **14**:195–226, 2001.
- [35] IAN H. SLOAN AND ROBERT S. WOMERSLEY. Extremal systems of points and numerical integration on the Sphere. *Advances in Computational Mathematics*, **21**:102–125, 2004.
- [36] A. SOMMARIVA AND M.VIANELLO. Computing approximate Fekete points by QR factorizations of Vandermonde matrices. *Comput. Math. Appl.*, **57**:1324–1336, 2009.

- [37] A. SOMMARIVA AND M. VIANELLO. Approximate Fekete points for weighted polynomial interpolation. *Electron. Trans. Numer. Anal.*, **37**:1–22, 2010.
- [38] GABOR SZEGO. Orthogonal polynomials. *American Mathematical Society Colloquium Publications*, **23**, 1939.
- [39] SAKAI TAKASHI. Riemannian geometry. *Amer. Mathematical Society*, vol.149, 1996.