



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Facoltá di Scienze MM. FF. NN.

Dipartimento di Matematica

Laurea Magistrale in Matematica

???integrazione numerica sulla sfera

Relatore: Dott. Alvise Sommariva

Correlatore: Prof. Marco Vianello

Laureando: Mariano Gentile

a.a. 2011/2012

Sommario

In questo lavoro presenteremo una formula per l'integrazione numerica su alcune regioni della sfera, includendo cupole e sottoregioni di cupole. La formula lavora su dimensioni arbitrarie, ha pesi positivi ed è esatta per polinomi sferici di grado minore o uguale ad n . Presenteremo una proprietà di regolarità per una generica formula di cubatura con pesi positivi in queste regioni. Introdurremo inoltre le (Weakly) Admissible Mesh e le costruiremo su alcune regioni della sfera. Daremo anche formule e algoritmi per l'interpolazione. Test numerici in diverse dimensioni mostreranno la validità delle nostre formule. Tutti i codici sono scritti in Matlab e sono forniti nell'appendice di questo lavoro.

In this work we present a rule for numerical integration over some regions of the sphere, that will include caps and will include certain subregions of caps. The rule will work in arbitrary dimension, it has positive weights and is exact for all spherical polynomials of degree less or equal than n . We will present a regularity property for rules with positive weights in these regions. Also we will give a general introduction to (Weakly) Admissible Mesh and we will construct them on some regions of the sphere. We will also give a formula and an algorithm for the interpolation. Numerical tests in different dimensions will show the performance of our formulas. All the codes are written in Matlab and are provided in the Appendix of this work.

Indice

1	Introduzione - AGGIUNGERE WAM	4
1.1	Notazioni	4
1.2	Polinomi sferici	6
2	Cubatura numerica	13
2.1	Costruzione di formule di cubatura numerica su triangoli e quadrati non standard in \mathbb{S}^d	13
2.2	Stime sui pesi di una formula di cubatura su regioni di \mathbb{S}^d	21
3	Interpolazione	29
3.1	Introduzione sulle WAM - INSERIRE BIBLIOGRAFIA	29
3.2	Costruzione di WAM su parti di sfera INSERIRE BIBLIOGRAFIA	32
4	Esempi di cubatura	37
4.1	Esempi su \mathbb{S}^d	37
4.2	Esempi su \mathbb{S}^2	42
5	Esempi di WAM e interpolazione	47
6	Appendice	48
6.1	Commenti sulla costruzione dei codici Matlab	48
6.2	Codici di Matlab e di Mathematica usati	48

1 Introduzione - AGGIUNGERE WAM

In questa sezione ci occuperemo dell'integrazione numerica sulla sfera (unitaria) $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$

$$\mathbb{S}^d := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d+1} : \|\mathbf{x}\| = 1\}$$

dove con $\|\cdot\|$ intendiamo la norma Euclidea in \mathbb{R}^{d+1} , riponendo particolare interesse al caso $d = 2$. In [13]. [12] e [9] (aggiungere bibliografia) sono state considerate varie questioni legate alla cubatura numerica sulla sfera multivariata e sue calotte. Ci proponiamo di continuare questo studio e di ampliarlo ad altre regioni, in particolare parti di calotte sferiche come nel seguito specificheremo, o regioni delimitate da paralleli e meridiani.

Nel seguito saranno date formule di integrazione esatte per polinomi sferici di grado $\leq n$ su regioni di \mathbb{S}^d ove useremo il prodotto tensoriale e le formule di integrazione per polinomi trigonometrici su sottointervalli di $[0, 2\pi]$ studiate in (cf. [3] [4] [5] [6] [7]) (inserire bibliografia).

Analizzeremo inoltre alcune considerazioni teoriche per una generica formula di integrazione che si pretende sia esatta per polinomi di grado $\leq n$ su \mathbb{S}^d .

Mostreremo alcuni esempi di cubatura numerica in \mathbb{S}^2 e \mathbb{S}^4 , fornendo agli utenti i relativi codici Matlab.

1.1 Notazioni

In questo lavoro, posti $\mathbf{x} = (x_k)_{k=1,\dots,d+1}$, $\mathbf{y} = (y_k)_{k=1,\dots,d+1}$, denoteremo con

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sum_{k=1}^{d+1} x_k^2$$

la distanza Euclidea in \mathbb{R}^{d+1} , mentre con

$$dist(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \arccos(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_k x_k \cdot y_k$$

intenderemo la distanza geodetica tra \mathbf{x} e \mathbf{y} sulla sfera.

La *geodetica* è definita per qualsiasi spazio metrico X , come la curva che descrive localmente la traiettoria più breve tra due punti di X .

Un'altra definizione equivalente descrive le geodetiche come le traiettorie percorse da un punto che si muove a velocità costante, senza forze su di esso che ne modifichino il moto, con le eccezioni dei vincoli alla traiettoria affinchè non esca fuori dallo spazio considerato.

Nel caso della sfera \mathbb{S}^2 si può verificare che le geodetiche sono tutte e sole gli archi di cerchi massimi, ovvero archi di cerchi concentrici alla sfera. Tutti i meridiani sono cerchi massimi, ad esempio, ma non i paralleli (con l'eccezione dell'Equatore).

Nel seguito useremo polinomi sferici di grado $\leq n$. Con essi intenderemo polinomi di grado $\leq n$ in \mathbb{R}^{d+1} ristretti a \mathbb{S}^d , ovvero:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_n(\mathbb{S}^d) &= \{p(\mathbf{x}) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R}^{d+1}) : \mathbf{x} \in \mathbb{S}^d\} = \\ &= \left\{ p(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N a_j x_1^{b_{1,j}} \dots x_{d+1}^{b_{d+1,j}} : \|\mathbf{x}\|_2 = 1, \sum_{k=1}^{d+1} b_{k,j} \leq n, \forall 1 \leq j \leq N \right\} \end{aligned}$$

Useremo inoltre due classiche parametrizzazioni della sfera.

La prima parametrizzazione è quella delle *coordinate ipersferiche*, e prevede l'utilizzo di un angolo $\phi \in [0, 2\pi]$ e angoli $\theta_i \in [0, \pi]$ tali che

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & \cos(\phi) \sin(\theta_{d-2}) \dots \sin(\theta_1) \\ x_2 & = & \sin(\phi) \sin(\theta_{d-2}) \dots \sin(\theta_1) \\ x_3 & = & \cos(\theta_{d-2}) \sin(\theta_{d-3}) \dots \sin(\theta_1) \\ x_4 & = & \cos(\theta_{d-3}) \sin(\theta_3) \dots \sin(\theta_1) \\ & \dots & \\ x_{d-1} & = & \cos(\theta_2) \sin(\theta_1) \\ x_d & = & \cos(\theta_1) \end{array} \right. \quad (1)$$

e il relativo elemento di volume è $\sin^{d-2}(\theta_1) \sin^{d-3}(\theta_2) \dots \sin(\theta_{d-2})$.

La seconda parametrizzazione prevede la sostituzione $t = \cos(\theta_1)$ e di conseguenza $\sin(\theta_1) = \sqrt{1 - t^2}$. Quindi:

$$\int_{\mathbb{S}^d} d\mathbf{x} = |\mathbb{S}^{d-1}| \int_{-1}^1 (1 - t^2)^{\frac{d-2}{2}} dt \quad (2)$$

ove abbiamo denotato $d\mathbf{S}^d(\mathbf{x})$ l'elemento di superficie di \mathbb{S}^d e con $|\mathbb{S}^{d-1}|$ l'area della superficie di \mathbb{S}^{d-1} .

In entrambi i casi denoteremo con \mathbf{z} il Polo Nord della sfera, ossia il punto di coordinate cartesiane $\mathbf{z} = (0, 0, \dots, 0, 1)$.

In questo lavoro studieremo punti su porzioni della *cupola di sfera* \mathfrak{C} , denotata con $\mathfrak{C}(\mathbf{x}, \gamma)$, $0 \leq \gamma \leq \pi$:

$$\mathfrak{C}(\mathbf{x}, \gamma) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{S}^d : \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \geq \cos \gamma\}$$

Si osserva facilmente che se in particolare $\mathbf{x} = \mathbf{z}$, con \mathbf{z} Polo Nord, utilizzando le coordinate in (2):

$$\mathfrak{C}(\mathbf{z}, \gamma) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^d : x_{d+1} \geq \cos \gamma\}$$

Definiamo inoltre il *triangolo sferico non standard* in \mathbb{S}^d , come la porzione di cupola, nelle coordinate in (1):

$$\mathfrak{P}_{\gamma_1, \dots, \gamma_{d-1}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^d : \theta_i \leq \tau_i, \phi \leq \gamma\}$$

e analogamente la seguente regione che diremo *quadrato non standard*:

$$\mathfrak{R}_{\gamma_s, \gamma_f, \tau_1, s, \tau_1, f, \dots, \tau_{d-1}, s, \tau_{d-1}, f} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^d : \tau_{i,s} \leq \theta_i \leq \tau_{i,f}, \gamma_s \leq \phi \leq \gamma_f\}$$

di cui il triangolo non standard è un caso particolare con $\gamma_s = 0, \tau_{i,s} = 0$. Osserviamo che queste due regioni in generale non coincidono con i relativi classici poligoni sferici in quanto i lati, in generale, non giacciono su geodetiche. Intuitivamente tale regione $\mathfrak{R}_{\gamma_s, \gamma_f, \tau_1, s, \tau_1, f}$ in \mathbb{S}^2 non è altro che la regione di sfera racchiusa tra due paralleli e due meridiani, nelle usuali coordinate geografiche con latitudine e longitudine. Si noti che casi particolari di tale regione sono anche le *slice* e gli *anelli*.

1.2 Polinomi sferici

Introduciamo di seguito alcune nozioni sui polinomi sferici, di cui ci occuperemo successivamente per l'interpolazione e la cubatura. Sia $[a, b]$ generico intervallo sulla retta reale, denoteremo con $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ lo spazio dei polinomi di grado $\leq n$ in una variabile, e con $\mathbb{P}_n([a, b])$ la restrizione di tali polinomi all'intervallo $[a, b]$ ovvero:

$$\mathbb{P}_n([a, b]) := \{p(\mathbf{x}) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) : \mathbf{x} \in [a, b]\}$$

Analogamente definiamo lo spazio $\mathbb{P}_n(\mathbb{S}^d)$ dei *polinomi sferici* su \mathbb{S}^d come lo spazio dei polinomi in \mathbb{R}^{d+1} ristretti alla sfera \mathbb{S}^d di grado inferiore o uguale a n precisamente:

$$\mathbb{P}_n(\mathbb{S}^d) := \{p(\mathbf{x}) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R}^{d+1}) : \mathbf{x} \in \mathbb{S}^d\}$$

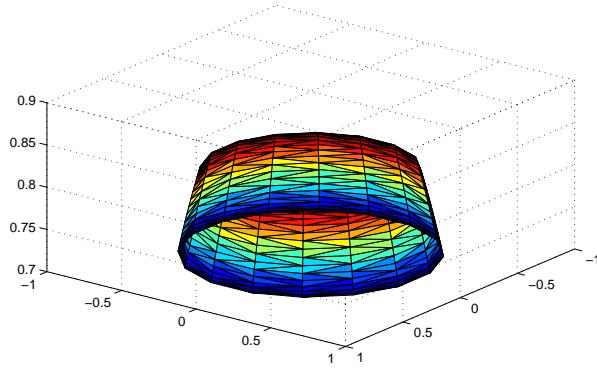


Figura 1: Esempio di anello su \mathbb{S}^2

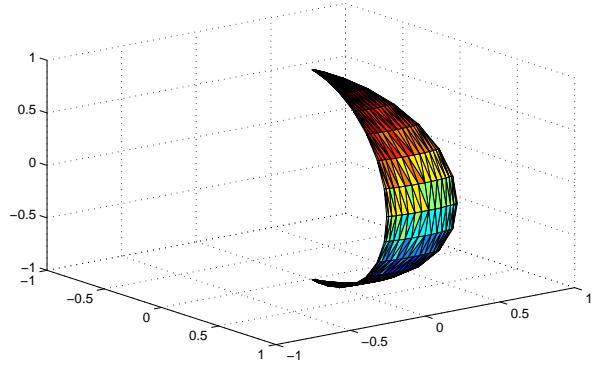


Figura 2: Esempio di slice su \mathbb{S}^2

Definiamo i polinomi omogenei di grado n come:

$$\mathbb{PO}_n(\mathbb{R}^d) := \left\{ \sum_{b_1+\dots+b_d=n} a_{b_1, \dots, b_d} x_1^{b_1} \dots x_d^{b_d} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \right\}$$

ovvero un polinomio i cui termini siano tutti di grado n . Per definire la dimensione di tale spazio $\mathbb{PO}_n(\mathbb{R}^d)$, dobbiamo contare tutti i monomi in d variabili di grado n , come in (cf. [2], [11]). Per farlo si può ragionare nel seguente modo: prendiamo i numeri $1, 2, \dots, n + d - 1$ e rimuoviamo da essi $d - 1$ numeri, chiamiamoli $\beta_1 < \dots < \beta_{d-1}$, aggiungendo infine $\beta_0 = 0, \beta_d = n + d$. Quindi definiamo $\alpha_i := \beta_i - \beta_{i-1} - 1, 1 \leq i \leq d$, ovvero il numero di interi tra β_i e β_{i-1} esclusi.

Si può osservare che in effetti $\sum_{i=1}^d \alpha_i = n$ e quindi si ricava una biiezione tra gli esponenti b_1, \dots, b_d dei polinomi omogenei e i numeri rimossi $\beta_1, \dots, \beta_{d-1}$. Di conseguenza la dimensione cercata è uguale al numero di scelte possibili di $d-1$ numeri in un'insieme di $n+d-1$, che equivalgono a:

$$\dim \mathbb{PO}_n(\mathbb{R}^d) = \binom{n+d-1}{d-1} = \binom{n+d-1}{n}$$

Ricordiamo inoltre che una funzione f si dice *armonica*, se $\Delta f(\mathbf{x}) = 0$, dove indichiamo con Δ il Laplaciano:

$$\Delta f := \sum_i \frac{d^2 f}{dx_i^2}.$$

A questo punto siamo in grado di definire la restrizione di un polinomio omogeneo armonico in \mathbb{R}^{d+1} di grado k sulla sfera \mathbb{S}^d come:

$$\mathbb{H}_k(\mathbb{S}^d) := \{p \in \mathbb{PO}_n(\mathbb{R}^{d+1}) : \Delta p(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \mathbb{S}^d\}$$

detta *armonica sferica di grado k* (cf. [9], [2], [11]). (inserire bibliografia) Vogliamo ora calcolare la dimensione di $\mathbb{H}_k(\mathbb{S}^d)$ che denoteremo $\mathbf{Z}(d, k)$. Calcoliamo in verità la dimensione di $\mathbb{H}_k(\mathbb{R}^{d-1})$ ma verificheremo che le due dimensioni in effetti coincideranno. Cominciamo notando che $p \in \mathbb{PO}_k(\mathbb{R}^{d+1})$ può essere scritto nella forma (cf. [2] cap.2)

$$p(x_1, \dots, x_{d+1}) = \sum_{j=0}^k (x_{d+1})^j p_{k-j}(x_1, \dots, x_d), p_{k-j} \in \mathbb{PO}_{k-j}(\mathbb{R}^d)$$

a cui applichiamo l'operatore Laplaciano (il pedice $\Delta_{(d)}$ indica che l'operatore è applicato a d variabili) ottenendo

$$\begin{aligned} \Delta_{(d+1)} p(x_1, \dots, x_{d+1}) &= \sum_{j=0}^{k-2} (x_{d+1})^j [\Delta_{(d)} p_{k-j}(x_1, \dots, x_d) \\ &\quad + (j+2)(j+1)p_{k-j-2}(x_1, \dots, x_d)] \end{aligned}$$

considerando invece $p(x_1, \dots, x_{d+1}) \in \mathbb{H}_k(\mathbb{R}^{d+1})$, avremo che il Laplaciano di tale polinomio è nullo di conseguenza

$$p_{k-j-2} = -\frac{1}{(j+2)(j+1)} \Delta_{(d)} p_{k-j}, 0 \leq j \leq k-2$$

quindi quello che si può osservare è che un polinomio in $\mathbb{H}_k(\mathbb{R}^{d+1})$ è completamente determinato da $p_1 \in \mathbb{PO}_k(\mathbb{R}^d)$ e da $p_2 \in \mathbb{PO}_{k-1}(\mathbb{R}^d)$. In questo modo siamo arrivati alla seguente relazione:

$$\mathbf{Z}(d, k) = \dim \mathbb{PO}_k(\mathbb{R}^d) + \dim \mathbb{PO}_{k-1}(\mathbb{R}^d)$$

Dato che conosciamo una formula chiusa per la dimensione degli spazi $\mathbb{PO}_k(\mathbb{R}^d)$, possiamo concludere che (cf. [9], [2], [11]):

$$\mathbf{Z}(d, k) := \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0 \\ \frac{(2k+d-1)\Gamma(k+d-1)}{\Gamma(d)\Gamma(k+1)} & \text{se } k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3)$$

(ricordiamo la ben nota proprietà della funzione gamma $\Gamma(k) = (k-1)!$, $k \in \mathbb{N}$). Come preannunciato quella calcolata è la dimensione di $\mathbb{H}_k(\mathbb{R}^{d+1})$. Dato $p \in \mathbb{H}_k(\mathbb{R}^{d+1})$, $Y \in \mathbb{H}_k(\mathbb{S}^d)$, si può osservare che vale la seguente relazione:

$$p(r\xi) = r^k Y(\xi)$$

di conseguenza $\dim \mathbb{H}_k(\mathbb{R}^{d+1}) = \dim \mathbb{H}_k(\mathbb{S}^d)$, come volevamo.

Teniamo presente inoltre che le armoniche sferiche di gradi differenti sono mutualmente ortogonali, (Corollario 2.15 [2]), quindi lo spazio $\mathbb{P}_n(\mathbb{S}^d)$ può essere rappresentato come somma diretta $\bigoplus_{k=0}^n \mathbb{H}_k(\mathbb{S}^d)$ (Corollario 2.19 [2]), da cui la sua dimensione sarà :

$$\sum_{k=0}^n \mathbf{Z}(d, k) = \frac{(2n+d)\Gamma(n+d)}{\Gamma(d+1)\Gamma(n+1)} = \mathbf{Z}(d+1, n) \sim (n+1)^d$$

Fissati $\alpha, \beta > -1$, sia $\mathbf{P}_k^{(\alpha, \beta)}$ il *polinomio di Jacobi* di grado k e esponenti α, β (cf. [2], [8], [14]) (se $\alpha, \beta = 0$ il polinomio di Jacobi viene detto *polinomio di Legendre*):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k^{(\alpha, \beta)}(t) &:= \frac{(-1)^k}{2^k k!} (1-t)^{-\alpha} (1+t)^{-\beta} \frac{d^k}{dt^k} [(1-t)^{\alpha+k} (1+t)^{\beta+k}] = \\ &= \sum_{s=0}^k \binom{n+\alpha}{s} \binom{n+\beta}{n-s} \left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-s} \left(\frac{x+1}{2}\right)^s \end{aligned}$$

I polinomi di Jacobi sono caratterizzati dall'essere un insieme completo di polinomi ortogonali nell'intervallo $[-1, 1]$ rispetto al seguente prodotto scalare pesato:

$$(f, g)_{\mathbf{L}_2^{(\alpha, \beta)}([-1, 1])} := \int_{-1}^1 f(t)g(t)(1-t)^\alpha(1+t)^\beta dt$$

dove la normalizzazione imposta su tali polinomi sarà (cf. [14], (4.1.1)):

$$\mathbf{P}_k^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)} \quad (4)$$

e (cf. [14], (4.3.3)):

$$\int_{-1}^1 |\mathbf{P}_k^{(\alpha,\beta)}(t)|^2 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta dt = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{(2k+\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+\beta+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\alpha+\beta+1)}$$

Siano ora $\{\mathbf{Y}_{k,1}^d, \mathbf{Y}_{k,2}^d, \dots, \mathbf{Y}_{k,\mathbf{Z}(d,k)}^d\}$ una base ortonormale di $\mathbb{H}_k(\mathbb{S}^d)$ rispetto al prodotto interno di $\mathbf{L}_2(\mathbb{S}^d)$. Per tale base vale il cosiddetto *addition theorem* (cf. [2] Teorema 2.9 (inserire bibliografia)):

$$\sum_{i=1}^{\mathbf{Z}(d,k)} \mathbf{Y}_{k,i}^d(\mathbf{x}) \mathbf{Y}_{k,i}^d(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{Z}(d,k)}{|\mathbb{S}^d|} \frac{\mathbf{P}_k^{((d-2)/2,(d-2)/2)}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})}{\mathbf{P}_k^{((d-2)/2,(d-2)/2)}(1)}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{S}^d$$

Inoltre lo spazio $\mathbb{H}_k(\mathbb{S}^d)$ è un *reproducing kernel Hilbert space* con reproducing kernel $\mathbf{K}_k^d : \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\mathbf{K}_k^d := \sum_{i=1}^{\mathbf{Z}(d,k)} \mathbf{Y}_{k,i}^d(\mathbf{x}) \mathbf{Y}_{k,i}^d(\mathbf{y})$$

Un reproducing kernel Hilbert space, in breve RKHS, è definito come uno spazio di Hilbert (con prodotto interno e che sia completo rispetto alla distanza indotta) di funzioni $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, tale che contenga un *reproducing kernel*.

Una funzione reproducing kernel possiede due importanti proprietà :

$$\begin{cases} \mathbf{K}_k^d(\cdot, \mathbf{y}) \in \mathbb{H}_k(\mathbb{S}^d), & \forall \mathbf{y} \in \mathbb{S}^d \\ (g, \mathbf{K}_k^d(\cdot, \mathbf{y}))_{\mathbf{L}_2(\mathbb{S}^d)} = g(\mathbf{y}), & \forall g \in \mathbb{H}_k(\mathbb{S}^d), \forall \mathbf{y} \in \mathbb{S}^d \end{cases} \quad (5)$$

Anche lo spazio dei polinomi $\mathbb{P}_n(\mathbb{S}^d)$ è un reproducing kernel Hilbert space con la seguente funzione $\mathbf{G}_n^d : \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\mathbf{G}_n^d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^{\mathbf{Z}(d,k)} \mathbf{Y}_{k,i}^d(\mathbf{x}) \mathbf{Y}_{k,i}^d(\mathbf{y}) = \frac{1}{|\mathbb{S}^d|} \frac{\Gamma(d/2)\Gamma(n+d)}{\Gamma(d)\Gamma(n+d/2)} \mathbf{P}_n^{(d/2,(d-2)/2)}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \quad (6)$$

Quindi anche \mathbf{G}_n^d possiede le due proprietà di reproducing kernel:

$$\begin{cases} \mathbf{G}_n^d(\cdot, \mathbf{y}) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{S}^d), & \forall \mathbf{y} \in \mathbb{S}^d \\ (p, \mathbf{G}_n^d(\cdot, \mathbf{y}))_{\mathbf{L}_2(\mathbb{S}^d)} = p(\mathbf{y}), & \forall p \in \mathbb{P}_n(\mathbb{S}^d), \forall \mathbf{y} \in \mathbb{S}^d \end{cases} \quad (7)$$

Per approfondimenti in questi temi si consideri [2], [8], [14].(inserire bibliografia)

Nel seguito del lavoro intendiamo determinare formule di cubatura su porzioni di sfera. Vogliamo mostrare che non e' restrittivo studiare il problema considerando tutte le regioni riferite al Polo Nord, in quanto con una opportuna rotazione si possono cambiare le coordinate e riportare i risultati su una simile regione generica della sfera, senza influire sull'esattezza di una formula di cubatura. In particolare ciò ci consente di considerare unicamente cupole e parti di cupole centrate nel Polo Nord senza perdita di generalità ovvero più precisamente:

Lemma

Sia $\mathfrak{R} \subset \mathbb{S}^d$ regione precedentemente definita con intervalli $[\tau_{i,s}, \tau_{i,f}]$ e $[\gamma_s, \gamma_f]$, sia \mathbf{z} il Polo Nord e \mathbf{x} il vettore $(1, 0, \dots, 0)$. Consideriamo la seguente formula:

$$\mathcal{Q}_{\mathfrak{R}}(f) := \sum_{j=1}^N \lambda_j f(\mathbf{x}_j) \approx \int_{\mathfrak{R}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{S}^d$$

dove f è una funzione continua in \mathfrak{R} , i nodi $\{\mathbf{x}_i\} \in \mathfrak{R}$, i pesi $\{\lambda_i\} \in \mathbb{R}$ e sia la formula esatta per l'integrazione in $\mathbb{P}_n(\mathfrak{R})$, spazio dei polinomi di grado al più n definiti su \mathfrak{R} . Sia $\mathfrak{R}^* \subset \mathbb{S}^d$ un'altra regione definita utilizzando coordinate tali che \mathbf{z}^* e \mathbf{x}^* siano il Polo Nord e il punto $(1, 0, \dots, 0)$ e che abbia gli stessi intervalli $[\tau_{i,s}, \tau_{i,f}]$ e $[\gamma_s, \gamma_f]$, e sia \mathbf{A} una rotazione in \mathbb{R}^{d+1} tale che $\mathbf{z}^* = \mathbf{A}\mathbf{z}$ e $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Allora la seguente formula

$$\mathcal{Q}_{\mathfrak{R}^*}(f) := \sum_{j=1}^N \lambda_j f(\mathbf{Ax}_j) \approx \int_{\mathfrak{R}^*} f(\mathbf{x}) d\mathbf{S}^d$$

con f funzione continua in \mathfrak{R}^* e i nodi $\{\mathbf{Ax}_i\} \in \mathfrak{R}^*$, è esatta su $\mathbb{P}_n(\mathfrak{R}^*)$.

Dimostrazione

Sia $p \in \mathbb{P}_n(\mathfrak{R}^*)$ allora

$$\mathcal{Q}_{\mathfrak{R}^*}(p) = \sum_{j=1}^N \lambda_j p(\mathbf{Ax}_j).$$

Ricordiamo che lo spazio dei polinomi $\mathbb{P}_n(\mathbb{S}^d)$ è invariante per rotazioni ovvero $\mathbb{P}_n(\mathbb{S}^d) = \{p \circ \mathbf{A} : p \in \mathbb{P}_n(\mathbb{S}^d)\}$. Inoltre dato che la rotazione \mathbf{A} è una mappa

biunivoca tra \mathfrak{R}^* e \mathfrak{R} , allora $p \circ \mathbf{A} \in \mathbb{P}_n(\mathfrak{R})$. Dato che \mathcal{Q} è esatta per $\mathbb{P}_n(\mathfrak{R})$ allora

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j p(\mathbf{A}\mathbf{x}_j) = \int_{\mathfrak{R}} p(\mathbf{A}\mathbf{y}) d\mathbf{S}^d = \int_{\mathfrak{R}^*} p(\mathbf{x}) d\mathbf{S}^d$$

dove abbiamo effettuato il cambio di coordinate $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{x}$ grazie al fatto che $\det(\mathbf{A}) = 1$. \square

2 Cubatura numerica

2.1 Costruzione di formule di cubatura numerica su triangoli e quadrati non standard in \mathbb{S}^d

Una delle intenzioni di questo lavoro consiste nel determinare formule di cubatura su certe sottoregioni della sfera. A tal proposito risulta utile ricordare alcune proprietà dei polinomi di Legendre e introdurre la *funzione associata di Legendre*.

Abbiamo già definito chi è il polinomio di Legendre, che si può scrivere semplicemente come:

$$\mathbf{P}_{n,d}(t) = n! \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(1-t^2)^k t^{n-2k}}{4^k k! (n-2k)! \Gamma(k + \frac{d-1}{2})} \quad (8)$$

i cui pedici indicano rispettivamente il grado del polinomio e la dimensione dello spazio su cui è definito. Per $d = 3$ si parla anche di *polinomio di Legendre standard*. Normalmente con i polinomi di Legendre si intendono polinomi ortogonali per il prodotto scalare $(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$, ovvero con la proprietà che:

$$\int_{-1}^1 p_m(x)p_n(x)dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}$$

I polinomi di Legendre descritti sono una loro generalizzazione, essi sono infatti ortogonali per il seguente prodotto scalare:

$$(f, g)_\zeta = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\xi \cdot \zeta)g(\xi \cdot \zeta)d\mathbf{S}^{d-1}(\xi)$$

In particolare effettuando i seguenti cambi di variabile (si osservi che il pedice d dei polinomi di Legendre si riferisce allo spazio \mathbb{R}^d e di conseguenza alla sfera \mathbb{S}^{d-1}) otteniamo la seguente proprietà di ortogonalità :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathbf{P}_{m,d}(\xi \cdot \zeta)\mathbf{P}_{n,d}(\xi \cdot \zeta)d\mathbf{S}^{d-1}(\xi) = \\ &= \int_{\mathbb{S}^{d-2}} \int_{-1}^1 \mathbf{P}_{m,d}(t)\mathbf{P}_{n,d}(t)(1-t^2)^{\frac{d-3}{2}}dt d\mathbf{S}^{d-2} = \\ &= |\mathbb{S}^{d-2}| \int_{-1}^1 \mathbf{P}_{m,d}(t)\mathbf{P}_{n,d}(t)(1-t^2)^{\frac{d-3}{2}}dt = 0, m \neq n \end{aligned}$$

Più precisamente:

$$\int_{-1}^1 \mathbf{P}_{m,d}(t)\mathbf{P}_{n,d}(t)(1-t^2)^{\frac{d-3}{2}}dt = \frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{|\mathbb{S}^{d-2}| \mathbf{Z}(d-1, k)} \delta_{mn}$$

Si può facilmente verificare che nel caso del polinomio *standard* di Legendre, ovvero per $d = 3$, la proprietà di ortogonalità è effettivamente la stessa di quella prima citata.

Denotiamo con $\mathbf{P}_{n,d}^{(m)}(t)$ la derivata di grado m del polinomio di Legendre

$$\mathbf{P}_{n,d}^{(m)}(t) := \frac{d^m}{dt^m} \mathbf{P}_{n,d}(t)$$

Per $d \geq 3$ definiamo dunque la *funzione associata di Legendre*:

$$\mathbf{P}_{n,d,m}(t) = \frac{(n+d-3)!}{(n+m+d-3)!} (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \mathbf{P}_{n,d}^{(m)}(t), t \in [-1, 1] \quad (9)$$

Si faccia attenzione al fatto che il pedice d di $\mathbf{P}_{n,d,m}$ si riferisce allo spazio \mathbb{R}^d mentre l'apice d di $\mathbf{Y}_{k,m}^d$ si riferisce alla sfera \mathbb{S}^d .

Si noti che $\mathbf{P}_{n,d,m}(t)$ è un polinomio solo per m pari, ma può diventare un polinomio trigonometrico con la sostituzione $t = \cos(\theta)$ e $(1-t^2)^{m/2} = \sin^m(\theta)$, come vedremo in seguito.

Definiamo infine la *funzione di Legendre normalizzata*:

$$\tilde{\mathbf{P}}_{n,d,m}(t) = \frac{(n+d-3)!}{n! \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \left[\frac{(2n+d-2)(n-m)!}{2^{d-2}(n+d+m-3)!} \right]^{1/2} (1-t^2)^{m/2} \mathbf{P}_{n,d}^{(m)}(t), t \in [-1, 1] \quad (10)$$

dove con $\mathbf{P}_{n,d}^{(m)}$ indichiamo la derivata di grado m di $\mathbf{P}_{n,d}$. Enunciamo ora un risultato fondamentale per i nostri scopi, discendente direttamente da [2], Teorema 2.47 e dalla sua dimostrazione.

Teorema

Sia $\{\mathbf{Y}_{k,j}^{d-1} : 1 \leq j \leq \mathbf{Z}(d-1, k)\}$ una base ortonormale per $\mathbb{H}_k(\mathbb{S}^{d-1})$, con $0 \leq k \leq n$, allora

$$\left\{ \tilde{\mathbf{P}}_{n,d+1,k}(t) \mathbf{Y}_{k,j}^{d-1}(\xi_{d-1}) : 1 \leq j \leq \mathbf{Z}(d-1, k), 0 \leq k \leq n \right\} \quad (11)$$

con $\xi_{d-1} \in \mathbb{S}^{d-1}$, e $\xi_d = t\mathbf{e}_d + \sqrt{1-t^2}(\xi_{d-1}, 0)^T \in \mathbb{S}^d$, è una base ortonormale per $\mathbb{H}_n(\mathbb{S}^d)$.

Prima di esporre il risultato principale di questo capitolo, ricordiamo il seguente Lemma:

Lemma

Siano $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_+$, allora:

$$\sin^{n_1}(\theta) \cos^{n_2}(\theta) = C + \sum_{j=1}^{M_s} c_{1,j} \sin(\alpha_j \theta) + \sum_{k=1}^{M_c} c_{2,k} \cos(\beta_k \theta)$$

per opportuni $C, c_{1,j}, c_{2,k} \in \mathbb{R}$, $\forall j, k$ che possono eventualmente annullarsi o essere negativi e inoltre $\alpha_j, \beta_k \in \mathbb{N}_+$, $\alpha_j, \beta_k \leq n_1 + n_2$, $\forall j, k$. In particolare l'upper bound di α_j, β_k assicura che le sommatorie sono finite, ovvero $M_s, M_c < \infty$.

Dimostrazione

Osserviamo le seguenti formule trigonometriche (citare wikipedia??):

- per n pari:

$$\begin{aligned} \cos^n(\theta) &= \frac{1}{2^n} \binom{n}{n/2} + \frac{2}{2^n} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{n}{k} \cos((n-2k)\theta) \\ \sin^n(\theta) &= \frac{1}{2^n} \binom{n}{n/2} + \frac{2}{2^n} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} (-1)^{\frac{n}{2}-k} \binom{n}{k} \cos((n-2k)\theta) \end{aligned}$$

- per n dispari:

$$\begin{aligned} \cos^n(\theta) &= \frac{2}{2^n} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{k} \cos((n-2k)\theta) \\ \sin^n(\theta) &= \frac{2}{2^n} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^{\frac{n-1}{2}-k} \binom{n}{k} \sin((n-2k)\theta) \end{aligned}$$

Le formule precedenti permettono di trasformare la potenza di un coseno e di un seno, in una sommatoria di costanti e di termini di primo grado, cambiando l'argomento delle funzioni.

Importante notare che i multipli degli argomenti nel membro di destra, sono sempre minori o uguali dell'esponente al membro di sinistra.

Usiamo le formule per calcolare $\sin^{n_1}(\theta) \cos^{n_2}(\theta)$. Per semplicità tralasciamo il calcolo delle costanti nelle formule. Sussistono essenzialmente quattro casi, a seconda se gli esponenti sono pari o dispari:

- n_1 pari, n_2 dispari

$$\begin{aligned}\sin^{n_1}(\theta) \cos^{n_2}(\theta) &= \sum_{m_1=0}^{\frac{n_1}{2}-1} \sum_{m_2=0}^{\frac{n_2-1}{2}} c_{1,m_1,m_2} \cos((n_1 - 2m_1)\theta) \cos((n_2 - 2m_2)\theta) + \\ &\quad + \sum_{m_2=0}^{\frac{n_2-1}{2}} c_{2,m_2} \cos((n_2 - 2m_2)\theta)\end{aligned}$$

- n_1 pari, n_2 pari

$$\begin{aligned}\sin^{n_1}(\theta) \cos^{n_2}(\theta) &= C + \sum_{m_1=0}^{\frac{n_1}{2}-1} \sum_{m_2=0}^{\frac{n_2-1}{2}} c_{1,m_1,m_2} \cos((n_1 - 2m_1)\theta) \cos((n_2 - 2m_2)\theta) + \\ &\quad + \sum_{m_1=0}^{\frac{n_1}{2}-1} c_{2,m_1} \cos((n_1 - 2m_1)\theta) + \sum_{m_2=0}^{\frac{n_2-1}{2}} c_{3,m_2} \cos((n_2 - 2m_2)\theta)\end{aligned}$$

- n_1 dispari, n_2 dispari

$$\sin^{n_1}(\theta) \cos^{n_2}(\theta) = \sum_{m_1=0}^{\frac{n_1-1}{2}} \sum_{m_2=0}^{\frac{n_2-1}{2}} c_{m_1,m_2} \sin((n_1 - 2m_1)\theta) \cos((n_2 - 2m_2)\theta)$$

- n_1 dispari, n_2 pari

$$\begin{aligned}\sin^{n_1}(\theta) \cos^{n_2}(\theta) &= \sum_{m_1=0}^{\frac{n_1-1}{2}} c_{1,m_1} \sin((n_1 - 2m_1)\theta) + \\ &\quad + \sum_{m_1=0}^{\frac{n_1-1}{2}} \sum_{m_2=0}^{\frac{n_2-1}{2}} c_{2,m_1,m_2} \sin((n_1 - 2m_1)\theta) \cos((n_2 - 2m_2)\theta)\end{aligned}$$

Osserviamo che in tutti i casi si ha $0 \leq n_1 - 2m_1 \leq n_1$, $0 \leq n_2 - 2m_2 \leq n_2$.

Infine per effettuare l'ultimo passaggio occorre ricordare le seguenti formule trigonometriche:

$$\cos(\theta) \cos(\phi) = \frac{\cos(\theta - \phi) + \cos(\theta + \phi)}{2}$$

$$\sin(\theta) \cos(\phi) = \frac{\sin(\theta - \phi) + \sin(\theta + \phi)}{2}$$

In questo modo otteniamo che:

$$\sin^{n_1}(\theta) \cos^{n_2}(\theta) = C + \sum_j c_{1,j} \sin(a_{1,j}\theta) + \sum_j c_{2,j} \cos(a_{2,j}\theta)$$

dove $a_{1,j}, a_{2,j} \in \mathbb{N}$ e contenute nell'intervallo $[-(n_1 + n_2), (n_1 + n_2)]$. Come ultima cosa osservando le seguenti identità $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ e $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$, otteniamo infine:

$$\sin^{n_1}(\theta) \cos^{n_2}(\theta) = C + \sum_j c_{1,j} \sin(\alpha_j \theta) + \sum_j c_{2,j} \cos(\beta_j \theta)$$

dove $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{N}_+ \cap [0, n_1 + n_2]$. \square

Quello che siamo riusciti ad ottenere con il Lemma precedente è la possibilità di riscrivere $\sin^{n_1}(\theta) \cos^{n_2}(\theta)$ come combinazione lineare di $1, \sin(\alpha\theta), \cos(\beta\theta)$ ovvero una immersione dello spazio

$$span\{1, \sin^{n_1}(\theta) \cos^{n_2}(\theta) : n_1 + n_2 \leq n, \theta \in [-\omega, \omega]\}$$

in quello dei *polinomi trigonometrici*

$$\mathbb{T}_n([-\omega, \omega]) = span\{1, \sin(k\theta), \cos(k\theta) : 1 \leq k \leq n, \theta \in [-\omega, \omega]\}$$

Richiamiamo ora la formula di quadratura esatta per lo spazio $\mathbb{T}_n([-\omega, \omega])$ di grado n definita negli articoli (cf. [3], [4], [5], [6], [7]).

Proposizione

Siano $(\xi_j, \lambda_j)_{1 \leq j \leq n+1}$ i nodi e i pesi (positivi) della formula di quadratura algebrica Gaussiana relativa alla funzione peso:

$$\omega(x) = \frac{2 \sin(\omega/2)}{\sqrt{1 - \sin^2(\omega/2)x^2}}, x \in (-1, 1)$$

Allora

$$\int_{-\omega}^{\omega} f(\theta) d\theta = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j f(\phi_j), f \in \mathbb{T}_n([-\omega, \omega]), 0 \leq \omega \leq \pi$$

dove

$$\phi_j = 2 \arcsin(\sin(\omega/2)\xi_j) \in (-\omega, \omega), j = 1, 2, \dots, n+1$$

Ricordando che con \mathfrak{R} indichiamo il *quadrato non standard* della sfera e con \mathfrak{P} il *triangolo non standard* ovvero la porzione di cupola, siamo ora in grado di esporre il seguente:

Teorema

Sia $p \in \mathbb{P}_n(\mathfrak{R})$ (oppure $p \in \mathbb{P}_n(\mathfrak{P})$) in \mathbb{S}^d , e denotiamo con λ_{j_i} i pesi e con $\theta_{i,j_i}, \phi_{j_d}$ i nodi delle formule di quadratura Gaussiane subperiodiche definite nella proposizione precedente di grado rispettivamente $n + (d - 1), n + (d - 2), \dots, n$, per gli intervalli $[\tau_{i,s}, \tau_{i,f}]$ e $[\gamma_s, \gamma_f]$ definiti in \mathfrak{R} (o $[0, \tau_i]$ e $[0, \gamma]$ se ci riferiamo a \mathfrak{P}) e definiamo i seguenti punti con le coordinate in (1):

$$\xi_{j_1, \dots, j_d} = \xi(\theta_{1,j_1}, \theta_{2,j_2}, \dots, \theta_{d-1,j_{d-1}}, \phi_{j_d})$$

Allora la seguente formula di cubatura è esatta:

$$\mathcal{Q}_{\mathfrak{R},n}(p) = \sum_{j_1=1}^{n+d} \sum_{j_2=1}^{n+d-1} \cdots \sum_{j_{d-1}=1}^{n+2} \sum_{j_d=1}^{n+1} \lambda_{j_1 \dots j_d} p(\xi_{j_1, \dots, j_d}) \quad (12)$$

con $(n+d) \dots (n+1) = \frac{(n+d)!}{n!}$ nodi, ove i pesi sono definiti come

$$\lambda_{j_1 \dots j_d} = \lambda_{j_1} \dots \lambda_{j_d} \sin^{d-1}(\theta_{1,j_1}) \sin^{d-2}(\theta_{2,j_2}) \dots \sin(\theta_{d-1,j_{d-1}})$$

Dimostrazione

Procediamo per induzione sulla dimensione del dominio d .

- Per primo caso consideriamo il cerchio \mathbb{S}^1 . La formula di cubatura (12) risulta essere con le coordinate in (1)

$$\mathcal{Q}_{\mathfrak{R},n}(p) = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j p(\phi_j)$$

ovvero esattamente la formula di quadratura subperiodica esatta sullo spazio:

$$\mathbb{T}_n([\alpha, \beta]) = \text{span}\{1, \sin(k\theta), \cos(k\theta) : 1 \leq k \leq n, \theta \in [\alpha, \beta]\}$$

(si può trovare la dimostrazione di ciò in [5] oppure in [4]). Tale spazio è effettivamente una base per i polinomi in due variabili ristretti su \mathbb{S}^1 , ovvero sul cerchio. Per dimostrare tale affermazione, ricordiamo che $\mathbb{P}_n(\mathbb{S}^1) = \bigoplus_{k=0}^n \mathbb{H}_k(\mathbb{S}^1)$. Osserviamo ora che $\{\cos(k\theta), \sin(k\theta)\}$ è una base per $\mathbb{H}_k(\mathbb{S}^1)$, come si verifica facilmente controllando la dimensione $\mathbf{Z}(1, k) = 2$, da cui segue direttamente la conclusione.

- Risulta utile studiare a parte il caso di porzioni di dominio \mathfrak{R} o \mathfrak{P} della sfera \mathbb{S}^2 . Consideriamo il caso di $\mathbb{P}_n(\mathfrak{R})$ con intervalli $[\tau_s, \tau_f]$, $[\gamma_s, \gamma_f]$ e dimostriamo che la formula è esatta per una base dello spazio delle armoniche sferiche, ad esempio pp.133 – 134, [2]:

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_{l,1}^2(\xi) &= c_l \mathbf{P}_l(\cos(\theta)) \\ \mathbf{Y}_{l,2m}^2(\xi) &= c_{l,m} \mathbf{P}_{l,3,m}(\cos(\theta)) \cos(m\phi) \\ \mathbf{Y}_{l,2m+1}^2(\xi) &= c_{l,m} \mathbf{P}_{l,3,m}(\cos(\theta)) \sin(m\phi), m = 1, \dots, l\end{aligned}$$

con $l = 0, 1, \dots, n$, ove i $c_l, c_{l,m}$ sono opportune costanti.

Dato che $\mathbb{P}_l \subset \mathbb{P}_n$, possiamo limitarci a verificare la formula per il grado massimo n , da cui automaticamente segue l'esattezza per i gradi inferiori. Avremo quindi:

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{\mathfrak{R},n}(\mathbf{Y}_{n,1}^2(\xi)) &= c_{n,1} \sum_{j_1=1}^{n+2} \sum_{j_2=1}^{n+1} \lambda_{j_1} \lambda_{j_2} \sin(\theta_{j_1}) \mathbf{P}_n(\cos(\theta_{j_1})) = \\ c_{n,1} \sum_{j_2=1}^{n+1} \lambda_{j_2} \sum_{j_1=1}^{n+2} \lambda_{j_1} \sin(\theta_{j_1}) \mathbf{P}_n(\cos(\theta_{j_1})) &= c_{n,1} \int_{\gamma_s}^{\gamma_f} d\phi \int_{\tau_s}^{\tau_f} \sin(\theta) \mathbf{P}_n(\cos(\theta)) d\theta = \\ \int_{\tau_s}^{\tau_f} \int_{\gamma_s}^{\gamma_f} \sin(\theta) \mathbf{Y}_{n,1}^2(\xi(\theta, \phi)) d\phi d\theta &= \int_{\tau_s}^{\tau_f} \int_{\gamma_s}^{\gamma_f} \mathbf{Y}_{n,1}^2(\xi) d\mathbf{S}^2\end{aligned}$$

dove si usa il Lemma precedente per giustificare l'esattezza della formula unidimensionale.

Similmente:

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{\mathfrak{R},n}(\mathbf{Y}_{n,2m}^2(\xi)) &= c_{n,m} \sum_{j_1=1}^{n+2} \sum_{j_2=1}^{n+1} \lambda_{j_1} \lambda_{j_2} \sin(\theta_{j_1}) \mathbf{P}_{n,3,m}(\cos(\theta_{j_1})) \cos(m\phi_{j_2}) = \\ c_{n,m} \sum_{j_1=1}^{n+2} \lambda_{j_1} \sin(\theta_{j_1}) \mathbf{P}_{n,3,m}(\cos(\theta_{j_1})) &\sum_{j_2=1}^{n+1} \lambda_{j_2} \cos(m\phi_{j_2})\end{aligned}$$

Ricordando la definizione di $\mathbf{P}_{n,3,m}(\cos(\theta))$, essendo $t = \cos(\theta)$ abbiamo che $(1-t^2)^{j/2} = \sin(\theta)^j$, e possiamo quindi applicare il Lemma sopra esposto per ottenere un polinomio trigonometrico riconducibile ad una somma di termini $\sin(k\theta)$ e $\cos(l\theta)$ con $k, l \leq n$. Quindi otteniamo un polinomio trigonometrico appartenente allo spazio prodotto-tensore $\mathbb{T}_{n+1}([\tau_s, \tau_f]) \otimes \mathbb{T}_n([\gamma_s, \gamma_f])$ per il quale le formule Gaussiane (sub)trigonometriche sono esatte. Continuando:

$$\begin{aligned} c_{n,m} \sum_{j_1=1}^{n+2} \lambda_{j_1} \sin(\theta_{j_1}) \mathbf{P}_{n,3,m}(\cos(\theta_{j_1})) \sum_{j_2=1}^{n+1} \lambda_{j_2} \cos(m\phi_{j_2}) &= \\ c_{n,m} \int_{\tau_s}^{\tau_f} \sin(\theta) \mathbf{P}_{n,3,m}(\cos(\theta)) d\theta \int_{\gamma_s}^{\gamma_f} \cos(m\phi_{j_2}) d\phi &= \\ \int_{\gamma_s}^{\gamma_f} \int_{\tau_s}^{\tau_f} \sin(\theta) \mathbf{Y}_{n,2m}^2(\xi(\theta, \phi)) d\theta d\phi &= \int_{\gamma_s}^{\gamma_f} \int_{\tau_s}^{\tau_f} \mathbf{Y}_{n,2m}^2(\xi) d\mathbf{S}^2 \end{aligned}$$

Ragionamento analogo con $\mathbf{Y}_{n,2m+1}^2(\xi)$.

- Consideriamo ora la generica sfera \mathbb{S}^d , e supponiamo di aver provato l'asserto per \mathbb{S}^{d-1} . Sia \mathfrak{R} la regione definita dagli intervalli $[\tau_{i,s}, \tau_{i,f}]$, $i = 1, \dots, d-1$ e $[\gamma_s, \gamma_f]$ e sia $\mathcal{Q}_{\mathfrak{R}^-, n}$ la formula costruita come sopra descritto per \mathbb{S}^{d-1} , esatta per $\{\mathbf{Y}_{k,j}^{d-1} : 1 \leq j \leq \mathbf{Z}(d-1, k)\}$, $k = 1, \dots, n$. Abbiamo già visto che una base per \mathbb{S}^d è la seguente:

$$\left\{ \widetilde{\mathbf{P}}_{l,d+1,k}(\cos(\theta_1)) \mathbf{Y}_{k,j}^{d-1}(\xi(\theta_2, \dots, \theta_{d-1}, \phi)) : 1 \leq j \leq \mathbf{Z}(d-1, k), 0 \leq k \leq n \right\}$$

con $l = 0, \dots, n$. Effettuando i ragionamenti sopra esposti per un generico elemento della base, considerando in particolare gli elementi di grado massimo, avremo:

$$\begin{aligned} \int_{\tau_{1,s}}^{\tau_{1,f}} \cdots \int_{\tau_{d-1,s}}^{\tau_{d-1,f}} \int_{\gamma_s}^{\gamma_f} \widetilde{\mathbf{P}}_{n,d+1,m}(\cos(\theta_1)) \mathbf{Y}_{k,j}^{d-1}(\xi(\theta_2, \dots, \theta_{d-1}, \phi)) d\mathbf{S}^d &= \\ \int_{\tau_{2,s}}^{\tau_{2,f}} \cdots \int_{\gamma_s}^{\gamma_f} \mathbf{Y}_{k,j}^{d-1}(\xi(\theta_2, \dots, \theta_{d-1}, \phi)) d\mathbf{S}^{d-1} \int_{\tau_{1,s}}^{\tau_{1,f}} \sin^{d-1}(\theta_1) \widetilde{\mathbf{P}}_{n,d+1,m}(\cos(\theta_1)) d\theta_1 &= \\ \mathcal{Q}_{\mathfrak{R}^-, n}(\mathbf{Y}_{k,j}^{d-1}(\xi)) \int_{\tau_{1,s}}^{\tau_{1,f}} \sin^{d-1}(\theta_1) \widetilde{\mathbf{P}}_{n,d+1,m}(\cos(\theta_1)) d\theta_1 &= \\ \mathcal{Q}_{\mathfrak{R}^-, n}(\mathbf{Y}_{k,j}^{d-1}(\xi)) \sum_{j_1=1}^{n+d} \lambda_{j_1} \sin^{d-1}(\theta_{j_1}) \widetilde{\mathbf{P}}_{n,d+1,m}(\cos(\theta_{j_1})) &= \mathcal{Q}_{\mathfrak{R}, n}(\mathbf{Y}_{k,j}^d(\xi)) \end{aligned}$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo usato il Lemma analogamente al caso \mathbb{S}^2 . \square

2.2 Stime sui pesi di una formula di cubatura su regioni di \mathbb{S}^d

In questo paragrafo generalizzeremo il Teorema 6.1 in [9], dimostrato per cupole \mathfrak{C} , alle regioni \mathfrak{P} e \mathfrak{R} di \mathbb{S}^d , trovando una stima di regolarità per i pesi di una generica formula \mathcal{Q} esatta su \mathbb{P}_n .

A questo proposito risulta utile introdurre alcuni concetti. Data la regione \mathfrak{R} o \mathfrak{P} (ricordiamo che \mathfrak{P} è un caso particolare di \mathfrak{R}), siamo interessati a trovare una cupola che la contenga. Abbiamo già osservato che le rotazioni della sfera non influenzano la formula di integrazione, quindi ruoteremo la sfera in modo da avere il Polo Nord come punto centrale di \mathfrak{R} , e considerare quindi $\mathfrak{C}(\mathbf{z}, \gamma)$, come tra poco vedremo meglio.

Definiamo le seguenti matrici di rotazione:

$$R_1^{d+1}(\eta) = \begin{pmatrix} \cos(\eta) & \sin(\eta) & 0 & \dots & 0 \\ -\sin(\eta) & \cos(\eta) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_2^{d+1}(\eta) = \begin{pmatrix} \cos(\eta) & 0 & -\sin(\eta) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sin(\eta) & 0 & \cos(\eta) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_i^{d+1}(\eta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \cos(\eta) & -\sin(\eta) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \sin(\eta) & \cos(\eta) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_d^{d+1}(\eta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \cos(\eta) & -\sin(\eta) \\ 0 & \dots & \sin(\eta) & \cos(\eta) \end{pmatrix}$$

di dimensioni $d+1 \times d+1$ e dove in R_i^{d+1} con $i \geq 3$, gli elementi di rotazione sono quelli nelle coordinate $(i, i), (i, i+1), (i+1, i), (i+1, i+1)$. Si noti che solo R_1^{d+1}

è una rotazione in senso *antiorario*, mentre tutte le altre sono rotazioni in senso *orario*. Tale differenza tra la prima matrice e le successive deriva dal fatto che per le prime due coordinate in (1), *sin* e *cos* sono invertiti rispetto alle successive.

Si può verificare che dato un punto nelle coordinate in (1), $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\theta_1, \dots, \theta_{d-1}, \phi)$, allora si ha che:

$$R_d^{d+1}(\theta_1) \cdot \dots \cdot R_2^{d+1}(\theta_{d-1}) \cdot R_1^{d+1}(\phi) \cdot \mathbf{x}(\theta_1, \dots, \theta_{d-1}, \phi) = \mathbf{z}$$

cioè l'applicazione lineare definita da $R_d^{d+1} \dots R_1^{d+1}$ mappa \mathbf{x} nel Polo Nord \mathbf{z} .

Consideriamo quindi la regione:

$$\mathfrak{R}_{\gamma_s, \gamma_f, \tau_{1,s}, \tau_{1,f}, \dots, \tau_{d-1,s}, \tau_{d-1,f}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^d : \tau_{i,s} \leq \theta_i \leq \tau_{i,f}, \gamma_s \leq \phi \leq \gamma_f\}$$

e definiamo

$$\mathbf{c} := \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\gamma_s + \gamma_f}{2}\right) \sin\left(\frac{\tau_{d-1,s} + \tau_{d-1,f}}{2}\right) \dots \sin\left(\frac{\tau_{1,s} + \tau_{1,f}}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\gamma_s + \gamma_f}{2}\right) \sin\left(\frac{\tau_{d-1,s} + \tau_{d-1,f}}{2}\right) \dots \sin\left(\frac{\tau_{1,s} + \tau_{1,f}}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\tau_{d-1,s} + \tau_{d-1,f}}{2}\right) \sin\left(\frac{\tau_{d-2,s} + \tau_{d-2,f}}{2}\right) \dots \sin\left(\frac{\tau_{1,s} + \tau_{1,f}}{2}\right) \\ \vdots \\ \cos\left(\frac{\tau_{1,s} + \tau_{1,f}}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (13)$$

che chiameremo *punto centrale*. Utilizziamo le rotazioni sopra esposte per maparlo al Polo Nord $\mathbf{z} = (0, 0, \dots, 0, 1)$:

$$R_d^{d+1}\left(\frac{\tau_{1,s} + \tau_{1,f}}{2}\right) \cdot \dots \cdot R_1^{d+1}\left(\frac{\gamma_s + \gamma_f}{2}\right) \cdot \mathbf{c}\left(\frac{\tau_{1,s} + \tau_{1,f}}{2}, \dots, \frac{\gamma_s + \gamma_f}{2}\right) = \mathbf{z}$$

Effettuando tali rotazioni per tutti i punti di \mathfrak{R} , otteniamo le nuove coordinate di tali punti ruotati verso \mathbf{z} . Ricordiamo per comodità la definizione di cupola centrata nel Polo Nord:

$$\mathfrak{C}(\mathbf{z}, \tau) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^d : x_{d+1} \geq \cos \tau\}$$

Si può vedere che per verificare che un punto appartenga alla cupola di raggio τ e centro il polo Nord, possiamo limitarci a controllare la sua ultima coordinata. Quello che ci interesserà trovare, sarà quindi il minimo delle ultime coordinate per i punti di \mathfrak{R} dopo aver effettuato le rotazioni, ovvero:

$$\cos(\mu) = \min\{y_{d+1} : \mathbf{y} = R_d^{d+1} \dots R_1^{d+1} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathfrak{R}\}$$

dove abbiamo omesso gli angoli di rotazione per comodità di lettura.

Nota: Risulta alquanto complicato fornire una stima a priori di tale minimo, data la particolare geometria della sfera. Indicati con \mathbf{D} l'estremo di \mathfrak{R} con tutti gli angoli massimizzati, e con \mathbf{d} l'estremo con tutti gli angoli minimizzati, stime *apparentemente intuitive*, ad esempio utilizzare come upper bound $\mathbf{c} \cdot \mathbf{D}$, $\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}$, oppure $\mathbf{c} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{d}$, si sono rivelate già in \mathbb{S}^2 false e inefficaci. Ciò deriva dal fatto che la regione \mathfrak{R} cambia notevolmente forma non solo a seconda dell'ampiezza degli intervalli $[\tau_{i,s}, \tau_{i,f}], [\gamma_s, \gamma_f]$, ma anche e soprattutto a seconda della sua vicinanza all'equatore o ai poli della sfera. Anche calcolando $\cos(\mu)$ simbolicamente, il risultato appare poco chiaro per poter trovare delle stime teoriche concrete (che non siano eccessivamente *larghe*). Per \mathbb{S}^2 avremo infatti:

$$\min_{\substack{\gamma_s \leq \phi \leq \gamma_f \\ \tau_s \leq \theta \leq \tau_f}} (\cos((\tau_s + \tau_f)/2) \cos(\theta) + \cos((\gamma_s + \gamma_f - 2\phi)/2) \sin((\tau_s + \tau_f)/2) \sin(\theta))$$

(i calcoli sopra esposti sono stati eseguiti con l'ausilio del calcolo simbolico di Mathematica). Già in \mathbb{S}^3 la funzione da ottimizzare è così complicata che sembra inutile menzionarla. Si noti inoltre che in alcuni casi, in particolare quando \mathfrak{R} è vicina ad uno dei poli e gli intervalli $[\tau_{i,s}, \tau_{i,f}]$ sono abbastanza grandi (quanto grandi dipende dai valori di γ_s e γ_f oltre che dalla loro differenza), prendere il punto centrale della regione potrebbe non risultare la soluzione migliore. Il teorema che seguirà rimarrà comunque valido, ma la stima varierà a seconda della grandezza della cupola considerata.

Ci limiteremo a chiamare $\cos(\mu)$ tale minimo, e a considerare quindi $\mathfrak{C}(\mathbf{c}, \mu)$, affidando al calcolo numerico via Matlab o Mathematica il compito di fornire μ da caso a caso.

Enunciamo quindi il:

Teorema

Sia $d \geq 2$ e sia \mathfrak{R} una regione di \mathbb{S}^d . Sia $\mathcal{Q}_{\mathfrak{R},n}$ data da:

$$\mathcal{Q}_{\mathfrak{R},n} := \sum_{j=1}^N \lambda_j f(\mathbf{x}_j)$$

una formula di integrazione con nodi $\mathbf{x}_j \in \mathfrak{R}$, pesi positivi e che sia esatta su $\mathbb{P}_n(\mathfrak{R})$, con $n \geq 2$. Definiamo inoltre μ come

$$\mu = \arccos(\min\{y_{d+1} : \mathbf{y} = R_d^{d+1} \dots R_1^{d+1} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathfrak{R}\}), \mu \in [0, \pi]$$

e \mathbf{c} come punto centrale di \mathfrak{R} , seguendo la definizione data in (13), tali che $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{C}(\mathbf{c}, \mu)$. Allora

$$\sum_{\substack{j=1, \\ \mathbf{x}_j \in \mathfrak{C}(\mathbf{y}, \mu/\pi n)}}^N \lambda_j \leq c\mu^d \lfloor n/2 \rfloor^{-d}$$

per ogni $\mathbf{y} \in \mathbb{S}^d$, con $\mathfrak{C}(\mathbf{y}, \mu/\pi n)$ cupola di centro \mathbf{y} e raggio $\mu/\pi n$, e la costante c dipendente dalla dimensione d , ma non da μ, n, N, \mathbf{y} e dalla formula \mathcal{Q} .

Dimostrazione

Definiamo la funzione $g_{\lfloor n/2 \rfloor} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ come:

$$g_{\lfloor n/2 \rfloor}(t) := \frac{1}{|\mathbb{S}^d|} \frac{\Gamma(d/2)\Gamma(\lfloor n/2 \rfloor + d)}{\Gamma(d)\Gamma(\lfloor n/2 \rfloor + d/2)} \mathbf{P}_{\lfloor n/2 \rfloor}^{(d/2, (d-2)/2)}(t)$$

con $\mathbf{P}_n^{(\alpha, \beta)}$ polinomio di Jacobi definito nel capitolo delle notazioni. Sempre dalle notazioni si osserva che $g_{\lfloor n/2 \rfloor}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{G}_{\lfloor n/2 \rfloor}^d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, con $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{S}^d$, e $\mathbf{G}_{\lfloor n/2 \rfloor}^d$ reproducing kernel di $\mathbb{P}_{\lfloor n/2 \rfloor}(\mathbb{S}^d)$ definito in (6). Consideriamo ora una sua normalizzazione:

$$p(t) := \frac{g_{\lfloor n/2 \rfloor}(t)}{g_{\lfloor n/2 \rfloor}(1)}, t \in [-1, 1]$$

Dalle stime che si possono trovare in [14], (4.1.1) e (7.32.2), risulta che $|p(t)| \leq p(1), t \in [-1, 1]$ e quindi si ha $0 \leq [p(t)]^2 \leq [p(1)]^2 = 1, t \in [-1, 1]$. Notiamo anche che essendo p definito con i polinomi $g_{\lfloor n/2 \rfloor}$ di grado $\lfloor n/2 \rfloor$, allora $p^2(t)$ è un polinomio di grado massimo $\leq n$.

Utilizzando la disuguaglianza di Markov e la disuguaglianza di Bessel per i polinomi definiti su $[-1, 1]$ (si guardi ad esempio [10]), possiamo verificare che:

$$\sup_{t \in [-1, 1]} |([p(t)]^2)'| \leq n^2 \quad \sup_{t \in [-1, 1]} |[p(t)]^2| = n^2$$

Dalle precedenti stime e dal teorema del valor medio si ottiene quindi:

$$|1 - [p(t)]^2| = |[p(1)]^2 - [p(t)]^2| \leq n^2(1 - t), t \in [-1, 1]$$

dove il membro destro soddisfa $n^2(1 - t) \leq 1/2$ se e solo se $0 \leq 1 - t \leq 1/(2n^2)$. Ricordando che $[p(t)]^2 \leq 1$ otteniamo infine

$$\frac{1}{2} \leq [p(t)]^2 \leq 1 \quad sse \quad 0 \leq 1 - t \leq \frac{1}{2n^2} \tag{14}$$

Definiamo inoltre una trasformazione affine $T : [0, 1] \rightarrow [\cos(13\mu/6), 1]$ nel seguente modo:

$$T(s) := \left(1 - \cos \frac{13\mu}{6}\right)s + \cos \frac{13\mu}{6} = 2 \left(\sin \frac{13\mu}{12}\right)^2 s + \cos \frac{13\mu}{6}$$

Fatte queste premesse, utili nel seguito della dimostrazione, andiamo a definire un polinomio di grado $\leq n$ che integreremo con la formula \mathcal{Q} su \mathfrak{R} . Sia quindi:

$$q(t) := \begin{cases} p(t)^2, & t \in [-1, 1] \\ p(T^{-1}(t))^2, & t \in [\cos(13\mu/6), 1] \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{se } \mu > 3\pi/13 \\ \text{se } \mu \leq 3\pi/13 \end{matrix}$$

Notiamo che il polinomio q sarà sempre positivo, essendo definito come un quadrato.

Siamo ora $\mathbf{y} \in \mathbb{S}^d$ un qualsiasi punto fissato sulla sfera d -dimensionale, e consideriamo il polinomio sferico $\mathbf{x} \rightarrow q(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$, di grado $\leq n$, che integriamo utilizzando la regola $\mathcal{Q}_{\mathfrak{R},n}$, esatta su tale polinomio.

$$\int_{\mathfrak{R}} q(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) d\mathbf{S}^d = \sum_{j=1}^N \lambda_j q(\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{y}) \geq \sum_{\substack{j=1 \\ \mathbf{x}_j \in \mathfrak{C}(\mathbf{y}, \mu/(\pi n))}}^N \lambda_j q(\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{y}) \quad (15)$$

dove la disegualanza nell'ultimo passaggio è valida poichè abbiamo semplicemente tralasciato alcuni termini positivi dalla sommatoria, dato che sia i pesi che il polinomio sono entrambi positivi.

Consideriamo dapprima il caso $\mu > 3\pi/13$.

Ricordando (7) e la positività di q , possiamo stimare il membro a sinistra di (15) come:

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{R}} q(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) d\mathbf{S}^d &\leq \int_{\mathbb{S}^d} q(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) d\mathbf{S}^d = \int_{\mathbb{S}^d} \frac{g_{\lfloor n/2 \rfloor}(t)^2}{g_{\lfloor n/2 \rfloor}(1)^2} d\mathbf{S}^d = \\ g_{\lfloor n/2 \rfloor}(1)^{-2} \int_{\mathbb{S}^d} (\mathbf{G}_{\lfloor n/2 \rfloor}^d(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^2 d\mathbf{S}^d &= g_{\lfloor n/2 \rfloor}(1)^{-2} \mathbf{G}_{\lfloor n/2 \rfloor}^d(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = g_{\lfloor n/2 \rfloor}(1)^{-1} \end{aligned}$$

Per stimare il membro a destra di (15), osserviamo che se $\mathbf{x}_j \in \mathfrak{C}(\mathbf{y}, \mu/(\pi n))$, allora per la definizione di cupola avremo che $\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{y} \geq \cos(\mu/(\pi n))$ e quindi, ricordando anche la stima $\sin x \leq x, x \geq 0$ e che $\mu \leq \pi$, otteniamo che:

$$1 - \mathbf{x}_j \cdot \mathbf{y} \leq 1 - \cos \frac{\mu}{\pi n} = 2 \left(\sin \frac{\mu}{2\pi n}\right)^2 \leq \frac{\mu^2}{2\pi^2 n^2} \leq \frac{1}{2n^2}$$

Perciò da (14) abbiamo che $1/2 \leq (p(\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{y}))^2 = q(\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{y}) \leq 1$ per ogni $\mathbf{x}_j \in \mathfrak{C}(\mathbf{y}, \mu/(\pi n))$ e quindi:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ \mathbf{x}_j \in \mathfrak{C}(\mathbf{y}, \mu/(\pi n))}}^N \lambda_j q(\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{y}) \geq \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ \mathbf{x}_j \in \mathfrak{C}(\mathbf{y}, \mu/(\pi n))}}^N \lambda_j \quad (16)$$

Combinando insieme le stime sopra effettuate e ricordando (14) otteniamo, per $\mu > 3\pi/13$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j=1 \\ \mathbf{x}_j \in \mathfrak{C}(\mathbf{y}, \mu/(\pi n))}}^N \lambda_j &\leq 2(g_{\lfloor n/2 \rfloor}(1))^{-1} = \frac{|\mathbb{S}^d| \Gamma(d+1) \Gamma(\lfloor n/2 \rfloor + 1)}{(\lfloor n/2 \rfloor + d/2) \Gamma(\lfloor n/2 \rfloor + d)} \leq \\ &\leq c \lfloor n/2 \rfloor^{-d} \leq \frac{c\mu^d}{\lfloor n/2 \rfloor^d} \end{aligned}$$

dove per la penultima stima ci riferiamo a [1], (6.1.46). Possiamo osservare che la costante c effettivamente dipende solo da d ma non da μ .

Consideriamo ora il caso in cui $\mu \leq 3\pi/13$.

Se $\mathbf{y} \in \mathbb{S}^d \setminus \mathfrak{C}(\mathbf{c}, \mu + \mu/(\pi n))$ allora il teorema è automaticamente vero, dato che $\mathfrak{C}(\mathbf{y}, \mu/(\pi n)) \cap \mathfrak{C}(\mathbf{c}, \mu) = \emptyset$ e quindi la sommatoria dei pesi sarebbe zero, non avendo nessun termine. Consideriamo quindi $\mathbf{y} \in \mathfrak{C}(\mathbf{c}, \mu + \mu/(\pi n))$. Allora per $\mathbf{x} \in \mathfrak{C}(\mathbf{z}, \mu)$ avremo

$$dist(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq dist(\mathbf{x}, \mathbf{c}) + dist(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \leq$$

$$\mu + \left(\mu + \frac{\mu}{\pi n} \right) \leq 2\mu + \frac{\mu}{2\pi} \leq 2\mu + \frac{\mu}{6} = \frac{13\mu}{6}$$

il che significa $\mathfrak{C}(\mathbf{c}, \mu) \subset \mathfrak{C}(\mathbf{y}, 13\mu/6)$. Riprendiamo allora la (15) e stimiamone il membro sinistro:

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{R}} q(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) d\mathbf{S}^d &\leq \int_{\mathfrak{C}(\mathbf{c}, \mu)} q(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) d\mathbf{S}^d \leq \\ \int_{\mathfrak{C}(\mathbf{y}, 13\mu/6)} q(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) d\mathbf{S}^d &= |\mathbb{S}^{d-1}| \int_{cos(13\mu/6)}^1 p(T^{-1}(t))^2 (1 - t^2)^{\frac{d-2}{2}} dt = \\ 2 \left(\sin \frac{13\mu}{12} \right)^2 |\mathbb{S}^{d-1}| \int_0^1 &p(s)^2 (1 - (T(s))^2)^{\frac{d-2}{2}} ds \end{aligned}$$

avendo utilizzato il cambio di variabili in (2) e successivamente la sostituzione $t = T(s)$. Inoltre

$$1 - (T(s))^2 = (1 + T(s))(1 - T(s)) \leq 2(1 - (1 - \cos(13\mu/6))s - \cos(13\mu/6)) = \\ 2(1 - \cos(13\mu/6))(1 - s) \leq 4(\sin(13\mu/12))^2(1 - s^2)$$

per ogni $s \in [0, 1]$. Di conseguenza avremo:

$$\int_{\Re} q(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) d\mathbf{S}^d \leq 2 \left(\sin \frac{13\mu}{12} \right)^2 |\mathbb{S}^{d-1}| \int_0^1 p(s)^2 (1 - (T(s))^2)^{\frac{d-2}{2}} ds \leq \\ 2^{d-1} \left(\sin \frac{13\mu}{12} \right)^d |\mathbb{S}^{d-1}| \int_0^1 p(s)^2 (1 - s^2)^{\frac{d-2}{2}} ds \leq \\ 2^{d-1} \left(\sin \frac{13\mu}{12} \right)^d |\mathbb{S}^{d-1}| \int_{-1}^1 p(s)^2 (1 - s^2)^{\frac{d-2}{2}} ds = \\ 2^{d-1} \left(\sin \frac{13\mu}{12} \right)^d |\mathbb{S}^{d-1}| \int_{-1}^1 \frac{(g_{[n/2]}(s))^2}{(g_{[n/2]}(1))^2} (1 - s^2)^{\frac{d-2}{2}} ds = \\ 2^{d-1} \left(\sin \frac{13\mu}{12} \right)^d (g_{[n/2]}(1))^{-2} \int_{\mathbb{S}^d} (\mathbf{G}_{[n/2]}^d(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^2 d\mathbf{S}^d = \\ 2^{d-1} \left(\sin \frac{13\mu}{12} \right)^d (g_{[n/2]}(1))^{-2} \mathbf{G}_{[n/2]}^d(\mathbf{y}, \mathbf{y}) =$$

avendo usato (7) e (2). Da (14) ricaviamo

$$\frac{1}{2} \leq p(T^{-1}(t))^2 \leq 1 \quad sse \quad 0 \leq 1 - T^{-1}(t) \leq \frac{1}{2n^2}$$

ma $0 \leq 1 - T^{-1}(t) \leq 1/(2n^2)$ è equivalente a

$$0 \leq 1 - T^{-1}(t) = 1 - \frac{t - \cos(13\mu/6)}{1 - \cos(13\mu/6)} = \frac{1 - t}{1 - \cos(13\mu/6)} = \\ \frac{1 - t}{2(\sin(13\mu/12))^2} \leq \frac{1}{2n^2}$$

il che porta a

$$\frac{1}{2} \leq p(T^{-1}(t))^2 \leq 1 \quad sse \quad 0 \leq 1 - t \leq (\sin(13\mu/12))^2/n^2$$

Verifichiamo l'ultima condizione: se $\mathbf{x}_j \in \mathfrak{C}(\mathbf{y}, \mu/(\pi n))$, allora si ha che $\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{y} \geq \cos(\mu/(\pi n))$ e quindi

$$1 - \mathbf{x}_j \cdot \mathbf{y} \leq 1 - \cos \frac{\mu}{\pi n} = 2 \left(\sin \frac{\mu}{2\pi n} \right)^2 \leq$$

$$\frac{\mu^2}{2\pi^2 n^2} \leq \frac{1}{n^2} \left(\sin \frac{\mu}{2\sqrt{2}} \right)^2 \leq \frac{1}{n^2} \left(\sin \frac{13\mu}{12} \right)^2$$

dove abbiamo utilizzato $\sin x \leq x$, se $x \geq 0$, $x \leq (\pi/2) \sin x$, se $x \in [0, \pi/2]$, e inoltre $\mu/(2\sqrt{2}) \leq 13\mu/12 \leq \pi/4$, se $\mu \leq 3\pi/13$, con la monotonicità di \sin in $[0, \pi/2]$. Con quest'ultima stima quindi otteniamo che $q(\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{y}) \geq 1/2$ per ogni $\mathbf{x}_j \in \mathfrak{C}(\mathbf{y}, \mu/(\pi n))$, e di conseguenza possiamo stimare il membro destro di (15) come in (16) e ottenere infine:

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \leq 2^{d-1} \left(\sin \frac{13\mu}{12} \right)^d (g_{\lfloor n/2 \rfloor}(1))^{-1} \leq \\ \mathbf{x}_j \in \mathfrak{C}(\mathbf{y}, \mu/(\pi n)) \\ 2^{d-1} \left(\frac{13\mu}{12} \right)^d (g_{\lfloor n/2 \rfloor}(1))^{-1} \leq c\mu^d \lfloor n/2 \rfloor^{-d}$$

con la stima in [1] (6.1.46) per stimare $(g_{\lfloor n/2 \rfloor}(1))^{-1}$. Anche in questo caso la costante c dipende unicamente dalla dimensione d . \square

3 Interpolazione

3.1 Introduzione sulle WAM - INSERIRE BIBLIOGRAFIA

In questo capitolo introdurremo la nozione di Admissible Mesh e di Weakly Admissible Mesh, mostrando come da queste sia possibile estrarre punti in qualche senso *quasi-ottimali* per l'interpolazione polinomiale multivariata. La ricerca di buoni punti per l'interpolazione è un problema tuttora aperto, anche su domini standard.

(inserire bibliografia) Dato $K \subset \mathbb{R}^d$ o \mathbb{C}^d , sia $\prod_N := \text{span}\{\psi_j\}_{1 \leq j \leq N}$ uno spazio di dimensione finita di funzioni continue linearmente indipendenti. Sia dato un insieme di punti $\{P_1, \dots, P_N\} \subset K$ e costruiamo la matrice di Vandermonde:

$$V(P_1, \dots, P_N) := [\psi_i(P_j)]_{1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N}$$

è noto che se $\det(V(P_1, \dots, P_N)) \neq 0$ allora i punti $\{P_1, \dots, P_N\}$ sono un insieme unisolvente per l'interpolazione su \prod_N ovvero due funzioni che assumono gli stessi valori nei precedenti punti, sono coincidenti nello spazio \prod_N . Inoltre definendo

$$\varphi_j(x) := \frac{\det(V(P_1, \dots, P_{j-1}, x, P_{j+1}, \dots, P_N))}{\det(V(P_1, \dots, P_{j-1}, P_j, P_{j+1}, \dots, P_N))}, \quad 1 \leq j \leq N$$

si ha che φ_j sono una base cardinale per lo spazio, ovvero $\varphi_j(\chi_k) = \delta_{jk}$, ed è possibile costruire il polinomio interpolatorio di Lagrange

$$L_{S_N}(f)(x) := \sum_{j=1}^N f(P_j) \varphi_j(x)$$

Si può inoltre valutare l'errore dell'interpolazione con la seguente formula

$$\|f - L_{S_N}(f)\|_\infty \leq (1 + \Lambda_N) \inf_{q \in \prod_N} \|f - q\|_\infty \quad (17)$$

dove abbiamo indicato con Λ_N la costante di Lebesgue definita come:

$$\Lambda_N := \|L_{S_N}\| = \max_{x \in K} \sum_{j=1}^N |\varphi_j(x)|$$

(inserire bibliografia) Dalla stima di interpolazione (17) si comprende l'importanza di cercare punti per cui Λ_N sia minima. Dalla definizione delle φ_j si può intuire immediatamente come la scelta dei punti $\{P_1, \dots, P_N\}$ su cui interpolare

la funzione giochi un ruolo essenziale per la buona riuscita del metodo. Purtroppo la ricerca di punti ottimi, ovvero punti che minimizzino la costante di Lebesgue, è un problema computazionalmente difficile da risolvere.

Le ricerche spesso si sono basate sul calcolo di altri punti non ottimi ma per cui tuttavia sia *sotto controllo* la crescita di Λ_N , come ad esempio i *punti di Fekete*, (inserire bibliografia) tali da massimizzare il determinante della matrice di Vandermonde. In questo modo si ottiene la seguente maggiorazione:

$$\Lambda_N := \max_{x \in K} \sum_{j=1}^N |\varphi_j(x)| = \max_{x \in K} \sum_{j=1}^N \left| \frac{\det(V(P_1, \dots, P_{j-1}, x, P_{j+1}, \dots, P_N))}{\det(V(P_1, \dots, P_{j-1}, P_j, P_{j+1}, \dots, P_N))} \right| \leq N$$

La ricerca di punti di Fekete nel continuo, ovvero la massimizzazione del determinante della matrice di Vandermonde, è un problema di ottimizzazione non lineare, che diventa computazionalmente pesante già per gradi bassi, ed è stato risolto solo in pochi e semplici casi (inserire bibliografia).

Proprio nell'ottica dell'interpolazione polinomiale è stata sviluppata inizialmente la teoria delle *Admissible Mesh*, e delle *Weakly Admissible Mesh* che abbrevieremo rispettivamente con AM e WAM.(inserire bibliografia) Mostreremo come determinare, partendo da queste, degli insiemi particolari detti *punti approssimati di Fekete*, che consistono nello scegliere da una mesh di punti prefissati quelli che maggiorano il determinante della matrice di Vandermonde. Come specificheremo in seguito, si può verificare che la loro distribuzione asintotica è simile ai punti di Fekete nel continuo.

Sia $K \subset \mathbb{R}^d$ (è possibile anche considerare $K \subset \mathbb{C}^d$, ma nel seguito ci riferiremo in particolare al caso reale) insieme compatto *polynomialmente determinante*, ovvero che un polinomio nullo su K è il polinomio identicamente zero. Questo è verificato se ad esempio K contiene una palla aperta reale. Ricordiamo a tal proposito che una palla aperta in \mathbb{R}^d centrata in \mathbf{x} di raggio r , è definita come:

$$B_r(\mathbf{x}) := \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d : \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|_2 < r \}$$

Sia \mathbb{P}_n^d lo spazio dei polinomi di grado totale al più n in d variabili. Una Weakly Admissible Mesh, WAM, per K è una sequenza di insiemi discreti $\mathcal{A}_n \subset K$ tale che:

$$\|p\|_K \leq C(\mathcal{A}_n) \|p\|_{\mathcal{A}_n}, \quad p \in \mathbb{P}_n^d$$

dove la cardinalità $card(\mathcal{A}_n)$ e la costante $C(\mathcal{A}_n)$ crescono al più polynomialmente all'aumentare di n , precisamente:

$$N := dim(\mathbb{P}_n^d) = \binom{n+d}{d} \leq card(\mathcal{A}_n) = \mathcal{O}(n^\alpha), \quad \alpha > 0$$

$$C(\mathcal{A}_n) = \mathcal{O}(n^\beta), \quad \beta > 0$$

Quando la costante $C(\mathcal{A}_n)$ è limitata, cioè $C(\mathcal{A}_n) < C$, si parla di Admissible Mesh, AM.

In (inserire bibliografia) è stato dimostrato come costruire AMs su insiemi compatti che soddisfano la disuguaglianza polinomiale di Markov (denotati per brevità *compatti di Markov*):

$$\|\nabla p\|_K \leq Mn^r \|p\|_K, \quad p \in \mathbb{P}_n^d(K)$$

dove $\|\nabla p\|_K = \max_{x \in K} \|\nabla p(x)\|_\infty$. Le AM si possono costruire essenzialmente discretizzando uniformemente il compatto con una spaziatura di $\mathcal{O}(n^{-r})$, dove r è l'esponente presente nella disuguaglianza di Markov. La AM risultante avrà quindi una cardinalità di $\mathcal{O}(n^{rd})$ punti (nel caso reale, diventando $\mathcal{O}(n^{2rd})$ se si considerano compatti nei complessi). Dato che per molti compatti, come ad esempio i compatti convessi reali, si ha $r = 2$, la cardinalità di tali mesh rendono il problema computazionalmente complicato già per dimensioni $d = 2, 3$ a gradi bassi. D'altra parte, è possibile costruire WAM con cardinalità $\mathcal{O}(n^2)$ e costante $C(\mathcal{A}_n) = \mathcal{O}(\log^2 n)$ su domini bidimensionali (inserire bibliografia).

Elenchiamo di seguito alcune importanti proprietà delle (W)AM:

1. $C(\mathcal{A}_n)$ è invariante sotto mappe affini;
2. sequenze di insiemi discreti unisolventi per l'interpolazione la cui costante di Lebesgue cresce al più polinomialmente con n è una WAM, la cui costante $C(\mathcal{A}_n)$ è la costante di Lebesgue stessa;
3. ogni insieme contenente una WAM, la cui cardinalità cresce al più polinomialmente, è una WAM con la stessa costante $C(\mathcal{A}_n)$;
4. una unione finita di WAM è una WAM per la corrispondente unione dei compatti, la cui costante è il massimo tra le costanti;
5. un prodotto cartesiano finito di WAM è una WAM per il corrispondente prodotto dei compatti, la cui costante è il prodotto delle costanti;
6. data una mappa polinomiale π_s di grado s , allora $\pi_s(\mathcal{A}_{ns})$ è una WAM per $\pi_s(K)$ con costante $C(\mathcal{A}_{ns})$;
7. ogni K che soddisfa una disuguaglianza polinomiale di Markov $\|\nabla p\|_K \leq Mn^r \|p\|_K$, $p \in \mathbb{P}_n^d(K)$, possiede una AM di cardinalità $\mathcal{O}(n^{rd})$;

8. sia $\mathcal{L}_{\mathcal{A}_n}(f)$ il polinomio approssimante $f \in C(K)$ nel senso dei minimi quadrati su una WAM, allora si ha

$$\|f - \mathcal{L}_{\mathcal{A}_n}(f)\|_K \lesssim C(\mathcal{A}_n) \sqrt{\text{card}(\mathcal{A}_n)} \min\{\|f - p\|_K, p \in \mathbb{P}_n^d(K)\};$$

9. la costante di Lebesgue dei punti approssimati di Fekete estratti da una WAM può essere maggiorata da $\Lambda_n \leq NC(\mathcal{A}_n)$ (maggiorazione tratta dai punti di Fekete nel continuo moltiplicati per il fattore $C(\mathcal{A}_n)$); inoltre la loro distribuzione asintotica è la stessa dei punti di Fekete nel caso continuo nel senso che le corrispondenti misure di probabilità discrete convergono debolmente alla misura di equilibrio pluripotenziale di K .

Le proprietà sopra esposte mostrano come sia possibile manipolare facilmente le WAM, e la loro potenzialità per l'interpolazione e l'approssimazione ai minimi quadrati.

Data una WAM, rimane il problema di estrarre da essa i punti approssimati di Fekete. Tale estrazione risulta in realtà inaspettatamente semplice a livello implementativo, utilizzando strumenti standard e ottimizzati dell'algebra lineare numerica, quali ad esempio la fattorizzazione QR. La descrizione dettagliata di tali algoritmi si può incontrare in (inserire bibliografia).

3.2 Costruzione di WAM su parti di sfera INSERIRE BIBLIOGRAFIA

In questa sezione utilizzeremo i punti studiati in (cf. [3] e [6]) per l'interpolazione trigonometrica subperiodica, per costruire delle WAM su regioni della sfera. In tali articoli è stato provato che, dati i punti

$$\xi_j := \xi_j(n) = \cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{2(2n+1)}\right) \in (-1, 1), \quad j = 1, 2, \dots, 2n+1$$

ovvero gli zeri del polinomio di Chebyshev del primo tipo $T_{2n+1}(\cdot) = \cos(n \arccos(\cdot))$, allora i punti angolari

$$\theta_j := \theta_j(n, \omega) = 2 \arcsin(\alpha \xi_j) \in (-\omega, \omega), \quad j = 1, 2, \dots, 2n+1, \quad \alpha = \sin(\omega/2)$$

ovvero zeri di $T_{2n+1}(\sin(\theta/2)/\alpha)$, sono unisolventi per l'interpolazione in $\mathbb{T}_n([-\omega, \omega])$. Definendo

$$l_j(x) = \frac{T_{2n+1}(x)}{T'_{2n+1}(\xi_j)(x - \xi_j)}, \quad x = \frac{\sin(\theta/2)}{\alpha}$$

e inoltre

$$a_j(\theta) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\cos(\theta/2)}{\cos(\theta_j/2)} \right) \quad b_j(\theta) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\cos(\theta/2)}{\cos(\theta_j/2)} \right) = 1 - a_j(\theta)$$

allora i corrispondenti polinomi di Lagrange trigonometrici possono essere riscritti come

$$L_j(\theta) = l_j(x), \quad j = n+1$$

$$L_j(\theta) = a_j(\theta)l_j(x) + b_j(\theta)l_{2n+2-j}(x), \quad j \neq n+1$$

$$L_{2n+2-j}(\theta) = b_j(\theta)l_j(x) + a_j(\theta)l_{2n+2-j}(x)$$

Si è oltretutto dimostrato che la corrispondente costante di Lebesgue assume il suo valore massimo agli estremi $\pm\omega$, è indipendente dall'angolo ω , e soddisfa

$$\begin{aligned} \Lambda_n &= \max_{\theta \in [-\omega, \omega]} \sum_{j=1}^{2n+1} |L_j(\theta)| = \max_{\theta \in [-\pi, \pi]} \sum_{j=1}^{2n+1} |L_j(\theta)| = \sum_{j=1}^{2n+1} |L_j(\pm\pi)| = \\ &= \sum_{j=1}^{2n+1} |L_j(\pm\omega)| = \sum_{j=1}^{2n+1} |l_j(\pm 1)| = \max_{x \in [-1, 1]} \sum_{j=1}^{2n+1} |l_j(x)| \end{aligned}$$

ed è stata anche osservata la seguente stima

$$\Lambda_n \leq \frac{2}{\pi} \log(n) + \delta_n \approx \mathcal{O}(\log(n))$$

dove δ_n assume valori compresi tra $5/3$ e $(2/\pi)(\log(16/\pi) + \gamma) = 1.40379\dots$, γ costante di Eulero-Mascheroni.

Ricordiamo le proprietà (2) e (5) delle WAM, ovvero insiemi unisolventi per l'interpolazione la cui costante di Lebesgue cresce al più polinomialmente con n è una WAM con costante la stessa costante di Lebesgue, e il prodotto cartesiano di due WAM è una WAM con costante il prodotto delle costanti.

Osservando che $\Lambda_n \leq \mathcal{O}(\log(n)) \leq \mathcal{O}(n^\alpha)$ per qualche $\alpha > 1$ possiamo utilizzare i punti appena descritti come una WAM e da essa cercheremo una WAM sulla sfera. A tal proposito osserviamo che se volessimo trasportare i punti dall'intervallo $I = (-\omega, \omega)$ ad un intervallo generico $\tilde{I} = (\beta_i, \beta_f)$ allora è possibile eseguire la seguente traslazione $T : I \rightarrow \tilde{I}$:

$$T(\theta) = \theta + \frac{\beta_i + \beta_f}{2}$$

e inoltre possiamo notare che $\omega = (\beta_f - \beta_i)/2$. Possiamo ora enunciare:

Teorema

Sia $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{\gamma_i, \gamma_f, \tau_i, \tau_f}$ una regione in \mathbb{S}^2 . Allora la seguente griglia di punti

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_n := (\phi_j, \theta_k)_{j,k} = \\ \left\{ 2 \arcsin \left(\sin \left(\frac{(\gamma_f - \gamma_i)/2}{2} \right) \cos \left(\frac{(2j-1)\pi}{2(2n+1)} \right) \right) + \frac{\gamma_i + \gamma_f}{2}, 1 \leq j \leq 2n+1 \right\} \\ \times \left\{ 2 \arcsin \left(\sin \left(\frac{(\tau_f - \tau_i)/2}{2} \right) \cos \left(\frac{(2k-1)\pi}{2(2n+1)} \right) \right) + \frac{\tau_i + \tau_f}{2}, 1 \leq k \leq 2n+1 \right\}\end{aligned}$$

è una WAM su \mathfrak{R} di cardinalità $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$ e costante $C(\mathcal{S}_n) = \mathcal{O}(\log^2(n))$.

Dimostrazione

Dato un polinomio sferico $p(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{P}_n(\mathfrak{R}) \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{S}^2)$, è possibile riscrivere nelle coordinate in (1) come $q(\phi, \theta) = p(\cos(\phi) \sin(\theta), \sin(\phi) \sin(\theta), \cos(\theta))$, diventando un polinomio trigonometrico in ϕ di grado al più n per ogni fissato θ e viceversa un polinomio trigonometrico in θ di grado al più n per ogni fissato ϕ . Come detto all'inizio di questa sezione, i punti sub-trigonometrici sopra descritti sono unisolventi per l'interpolazione con costante di Lebesgue $\mathcal{O}(\log(n))$, quindi possiamo scrivere:

$$|p(x_1, x_2, x_3)| = |q(\phi, \theta)| = |p(\cos(\phi) \sin(\theta), \sin(\phi) \sin(\theta), \cos(\theta))|$$

considerandolo come funzione di ϕ , fissando θ

$$\begin{aligned}|p(\cos(\phi) \sin(\theta), \sin(\phi) \sin(\theta), \cos(\theta))| \\ \leq c_1 \log(n) \max_j |p(\cos(\phi_j) \sin(\theta), \sin(\phi_j) \sin(\theta), \cos(\theta))|\end{aligned}$$

con c_1 costante, e similmente

$$\begin{aligned}|p(\cos(\phi_j) \sin(\theta), \sin(\phi_j) \sin(\theta), \cos(\theta))| \\ \leq c_2 \log(n) \max_k |p(\cos(\phi_j) \sin(\theta_k), \sin(\phi_j) \sin(\theta_k), \cos(\theta_k))|\end{aligned}$$

unendo infine le diseguaglianze abbiamo $\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathfrak{R}$

$$|p(x_1, x_2, x_3)| \leq c_1 c_2 \log^2(n) \max_{j,k} |p(\cos(\phi_j) \sin(\theta_k), \sin(\phi_j) \sin(\theta_k), \cos(\theta_k))|$$

mostrando appunto come la griglia sua una WAM di costante $C(\mathcal{S}_n) = \mathcal{O}(\log^2(n))$. La cardinalità è il prodotto delle singole cardinalità $(2n+1) \times (2n+1)$. \square

Ottenute WAM per una generica regione \mathfrak{R} , siamo in grado di ottenere WAM di cardinalità $4n^2 + 4n + 1$ anche per i suoi casi particolari, come le porzioni di cupole \mathfrak{P} o le cupole \mathfrak{C} , gli anelli e le slice. Ad ogni modo, per alcune regioni è possibile diminuire tale cardinalità , ad esempio le cupole:

Teorema

Sia $\mathfrak{C}(\mathbf{z}, \gamma)$ una cupola in \mathbb{S}^2 . Allora la seguente griglia di punti

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_n := (\phi_j, \theta_k)_{j,k} &= \left\{ \frac{\pi k}{n+1}, 0 \leq j \leq n \right\} \\ &\times \left\{ 2 \arcsin \left(\sin \left(\frac{\gamma}{2} \right) \cos \left(\frac{(2k-1)\pi}{2(2n+1)} \right) \right), 1 \leq k \leq 2n+1 \right\}\end{aligned}$$

è una WAM su $\mathfrak{C}(\mathbf{z}, \gamma)$ di cardinalità $(2n+1) \times (n+1) - n = 2n^2 + 2n + 1$ e costante $C(\mathcal{S}_n) = \mathcal{O}(\log^2(n))$, dove si utilizzano le coordinate in (1) modificate in modo che $\phi \in [0, \pi]$ e $\theta \in [-\pi, \pi]$. Si noti che grazie alla proprietà del coseno $\cos(\gamma) = \cos(-\gamma)$, la definizione della cupola rimane invariata.

Dimostrazione

Osserviamo come nel caso precedente che un polinomio sferico $p(x_1, x_2, x_3)$ di grado n , si può riscrivere in $p(\cos(\phi) \sin(\theta), \sin(\phi) \sin(\theta), \cos(\theta))$ diventando quindi un polinomio trigonometrico di grado al più n in ϕ per un fissato θ e viceversa di grado al più n in θ per un fissato ϕ . Per tale polinomio, è possibile prendere $\phi \in [0, 2\pi]$, dato che le coordinate rimangono all'interno della cupola $\mathfrak{C}(\mathbf{z}, \gamma)$. Inoltre la griglia \mathcal{S}_n rimane invariata se consideriamo la sua estensione $\phi_j \in \left\{ \frac{2\pi k}{2n+2}, 0 \leq k \leq 2n+1 \right\}$. La griglia in questo modo estesa è una WAM infatti, similmente alla precedente dimostrazione si ha

$$\begin{aligned}|p(x_1, x_2, x_3)| &= |q(\phi, \theta)| = |p(\cos(\phi) \sin(\theta), \sin(\phi) \sin(\theta), \cos(\theta))| \\ &\leq c_1 \log(n) \max_j |p(\cos(\phi_j) \sin(\theta), \sin(\phi_j) \sin(\theta), \cos(\theta))| \\ &\leq c_1 c_2 \log^2(n) \max_{j,k} |p(\cos(\phi_j) \sin(\theta_k), \sin(\phi_j) \sin(\theta_k), \cos(\theta_k))|\end{aligned}$$

dove abbiamo usato i punti sub-periodici per $\theta \in [-\gamma, \gamma]$, e i $2n+2$ punti equispaziati sul cerchio $[0, 2\pi]$ per ϕ di costante anch'essi $\mathcal{O}(\log(n))$ (cf. inserire bibliografia articolo WAM LS, numero 7).

Avendo dimostrato che la griglia estesa è una WAM di costante $C(\mathcal{S}_n) = \mathcal{O}(\log^2(n))$, concludiamo osservando che i punti equispaziati sono simmetrici rispetto al centro del cerchio su cui sono calcolati, e i punti subperiodici sono

simmetrici rispetto al loro centro calcolato per $k = n$. Considerando inoltre la ripetizione di tale centro, possiamo affermare che il numero di punti distinti di tale griglia è $(2n + 1) \times (2n + 2)/2 - n = 2n^2 + 2n + 1$. \square

NON CREDO CI POSSA RIUSCIRE Con ulteriore restrizioni sui polinomi si possono creare WAM anche su altre regioni. Si noti infatti che trasformando un polinomio in $\mathbb{P}_n(\mathbb{S}^2)$ utilizzando le coordinate descritte in (2), esso diviene $p(x_1, x_2, x_3) = q(\phi, t)$, ove q è un polinomio se e solo se p contiene i termini x_1, x_2 con grado pari. Definiamo quindi uno spazio $\widetilde{\mathbb{P}}_n(\mathbb{S}^2) \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{S}^2)$ definito come i polinomi che contengono i termini x_1 e x_2 con grado pari.

4 Esempi di cubatura

4.1 Esempi su \mathbb{S}^d

Sperimentiamo numericamente l'esattezza polinomiale della formula sopra esposta. Sia dato un polinomio p in \mathbb{S}^d di grado n :

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^J a_j x_1^{b_{1,j}} x_2^{b_{2,j}} \dots x_{d+1}^{b_{d+1,j}}$$

con $a_j \in \mathbb{R}$, $b_{i,j} \in \mathbb{N}$, $\sum_i b_{i,j} \leq n$ per ogni j , e $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1,\dots,d+1}$ sono le coordinate cartesiane del punto $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^d$. Per la linearità dell'integrale avremo che

$$\int p(\mathbf{x}) d\mathbf{S}^d = \int \sum_{j=1}^J a_j x_1^{b_{1,j}} x_2^{b_{2,j}} \dots x_{d+1}^{b_{d+1,j}} d\mathbf{S}^d = \sum_{j=1}^J a_j \int x_1^{b_{1,j}} x_2^{b_{2,j}} \dots x_{d+1}^{b_{d+1,j}} d\mathbf{S}^d$$

di conseguenza per testare il grado precisione delle formule fino a grado n basta verificare l'esattezza sui monomi $x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_{d+1}^{b_{d+1}}$.

Osserviamo che al crescere del grado di precisione e della dimensione della sfera \mathbb{S}^d , aumentano anche il numero di punti di valutazione della funzione e di conseguenza è inevitabile che aumentino pure gli errori di approssimazione. Si noti inoltre che anche la regione \mathfrak{R} gioca un ruolo importante. Quale esempio consideriamo il monomio in $\mathbb{P}_{13}(\mathbb{S}^4)$

$$p(\mathbf{x}) = x_1^4 x_2^3 x_3^2 x_4^2 x_5^2$$

Per capire l'origine del problema di approssimazione eseguiamo il cambio di coordinate in (1) dentro l'integrale, da cui avremo

$$\begin{aligned} & \int_{\mathfrak{R}} x_1^4 x_2^3 x_3^2 x_4^2 x_5^2 d\mathbf{S}^4 = \\ & \int_{\mathfrak{R}} (\cos(\phi) \sin(\theta_3) \sin(\theta_2) \sin(\theta_1))^4 (\sin(\phi) \sin(\theta_3) \sin(\theta_2) \sin(\theta_1))^3 \cdot \\ & \quad \cdot (\cos(\theta_3) \sin(\theta_2) \sin(\theta_1))^2 (\cos(\theta_2) \sin(\theta_1))^2 (\cos(\theta_1))^2 d\mathbf{S}^4 = \\ & \int_{\mathfrak{R}} \cos^4(\phi) \sin^3(\phi) \cos^2(\theta_3) \sin^7(\theta_3) \cos^2(\theta_2) \sin^9(\theta_2) \cos^2(\theta_1) \sin^{11}(\theta_1) d\mathbf{S}^4 = \\ & \int_{\mathfrak{R}} \cos^4(\phi) \sin^3(\phi) \cos^2(\theta_3) \sin^7(\theta_3) \cos^2(\theta_2) \sin^9(\theta_2) \cos^2(\theta_1) \sin^{11}(\theta_1) \cdot \\ & \quad \cdot \sin^3(\theta_1) \sin^2(\theta_2) \sin(\theta_3) d\phi d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 = \end{aligned}$$

$$\int_{\mathfrak{R}} \cos^4(\phi) \sin^3(\phi) \cos^2(\theta_3) \sin^8(\theta_3) \cos^2(\theta_2) \sin^{11}(\theta_2) \cos^2(\theta_1) \sin^{14}(\theta_1) d\phi d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3$$

Si tenga presente che tutti i termini del precedente integrale assumono valori nell'intervallo $[-1, 1]$, si capisce dunque che si dovrà lavorare con numeri molto piccoli in valore assoluto.

Definiamo una regione test come:

$$\mathfrak{R}_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^4 : \gamma \in [\pi/3, \pi/2], \tau_3 \in [0.001, 0.7], \tau_2 \in [0.001, 0.7], \tau_1 \in [0.001, 0.7]\} \quad (18)$$

Se si volesse calcolare l'integrale del precedente polinomio su tale regione, il cui valore esatto è $2.190268569130004 \times 10^{-13}$, si deve considerare che la sommatoria della formula \mathcal{Q} comprende 57120 termini che variano in valore assoluto da un massimo di 10^{-16} fino ad un minimo di 10^{-95} , e in casi peggiori la differenza tra i vari addendi della sommatoria può essere anche maggiore. Conseguentemente ci si trova di fronte al classico problema di cancellazione. Quindi aumentando il grado di precisione, possiamo ottenere un peggioramento delle stime.

Introduciamo ora le regioni test:

$$\mathfrak{R}_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^4 : \gamma \in [\pi/4, 3\pi/4], \tau_3 \in [0.01, 0.65], \tau_2 \in [0.01, 0.65], \tau_1 \in [0.01, 0.65]\} \quad (19)$$

$$\mathfrak{R}_3 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^4 : \gamma \in [\pi/4, 7\pi/4], \tau_3 \in [0.6, 1.3], \tau_2 \in [0.6, 1.3], \tau_1 \in [0.6, 1.3]\} \quad (20)$$

e calcoliamo su $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3$ l'integrale dei seguenti polinomi:

- Sia $p_1(\mathbf{x}) = x_3 x_4^3 x_5^4$, con il camio di coordinate otteniamo:

$$\int_{\mathfrak{R}} x_3 x_4^3 x_5^4 d\mathbf{S}^4 = \int_{\mathfrak{R}} (\cos(\theta_3) \sin(\theta_2) \sin(\theta_1))^3 (\cos(\theta_2) \sin(\theta_1))^3 \cdot$$

$$\cdot (\cos(\theta_1))^4 \sin^3(\theta_1) \sin^2(\theta_2) \sin(\theta_3) d\phi d\theta_3 d\theta_2 d\theta_1 =$$

$$\int_{\mathfrak{R}} \cos(\theta_3) \sin(\theta_3) \cos^3(\theta_2) \sin^3(\theta_2) \cos^4(\theta_1) \sin^7(\theta_1) d\phi d\theta_3 d\theta_2 d\theta_1 =$$

$$\int_{\gamma} d\phi \int_{\tau_3} \cos(\theta_3) \sin(\theta_3) d\theta_3 \int_{\tau_2} \cos^3(\theta_2) \sin^3(\theta_2) d\theta_2 \int_{\tau_1} \cos^4(\theta_1) \sin^7(\theta_1) d\theta_1$$

Utilizzando Mathematica per il calcolo di ognuno di questi integrali ottieniamo:

$$[\phi]_{\gamma} \cdot \left[-\frac{1}{2} \cos^2(\theta_3) \right]_{\tau_3} \cdot \left[-\frac{3}{64} \cos(2\theta_2) + \frac{1}{192} \cos(6\theta_2) \right]_{\tau_2} \cdot \\ \cdot \left[-\frac{7 \cos(\theta_1)}{512} - \frac{1}{512} \cos(3\theta_1) + \frac{11 \cos(5\theta_1)}{5120} - \frac{\cos(7\theta_1)}{7168} - \frac{\cos(9\theta_1)}{3072} + \frac{\cos(11\theta_1)}{11264} \right]_{\tau_1}$$

I valori esatti di tali integrali sulle nostre tre regioni test sono:

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_1 &: 6.877102537851039 E - 06 \\ \mathfrak{R}_2 &: 9.77175415282563 E - 06 \\ \mathfrak{R}_3 &: 1.140642041191397 E - 03\end{aligned}$$

Calcolando gli integrali con la formula da noi introdotta avente grado di precisione 8 e 11880 nodi, ricaviamo:

Regione	Integrale numerico	Errore assoluto	Errore relativo
\mathfrak{R}_1	$6.877102537850998 E - 06$	$4.06 E - 20$	$5.91 E - 15$
\mathfrak{R}_2	$9.771754152825726 E - 06$	$9.48 E - 20$	$9.70 E - 15$
\mathfrak{R}_3	$1.140642041191405 E - 03$	$7.80 E - 18$	$6.84 E - 15$

Come si vede dai risultati, gli errori assoluti dipendono ovviamente dal valore dell'integrale esatto che si intende approssimare, mentre gli errori relativi restano sempre dell'ordine della precisione di macchina 10^{-15}

- Sia $p_2(\mathbf{x}) = x_1^2 x_2^2 x_3 x_4 x_5^3$. Dopo il cambio di varibili come nel caso precedente, otteniamo:

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{R}} x_1^2 x_2^2 x_3 x_4 x_5^3 d\mathbf{S}^4 &= \int_{\gamma} \cos^2(\phi) \sin^2(\phi) d\phi \int_{\tau_3} \cos(\theta_3) \sin^5(\theta_3) d\theta_3 \cdot \\ &\quad \cdot \int_{\tau_2} \cos(\theta_2) \sin^7(\theta_2) d\theta_2 \int_{\tau_1} \cos^3(\theta_1) \sin^9(\theta_1) d\theta_1\end{aligned}$$

Calcoliamo anche in questo caso l'integrale indefinito con l'aiuto di Mathematica:

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\phi}{8} - \frac{1}{32} \sin(4\phi) \right]_{\gamma} \cdot \left[\frac{\sin^6(\theta_3)}{6} \right]_{\tau_3} \cdot \left[\frac{\sin^8(\theta_2)}{8} \right]_{\tau_2} \cdot \\ &\quad \cdot \left[-\frac{9 \cos(2\theta_1)}{1024} + \frac{27 \cos(4\theta_1)}{8192} + \frac{\cos(6\theta_1)}{6144} - \frac{3 \cos(8\theta_1)}{4096} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3 \cos(10\theta_1)}{10240} - \frac{\cos(12\theta_1)}{24576} \right]_{\tau_1}\end{aligned}$$

Le soluzioni esatte sono:

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_1 &: 1.36584263588778 E - 09 \\ \mathfrak{R}_2 &: 1.655704704552359 E - 09 \\ \mathfrak{R}_3 &: 1.06131379058252 E - 04\end{aligned}$$

e le nostre stime saranno, con grado di precisione 9 e 17160 nodi:

Regione	Integrale numerico	Errore assoluto	Errore relativo
\mathfrak{R}_1	1.365842635887772	$E - 09$	$8.06 E - 24$
\mathfrak{R}_2	1.655704704552349	$E - 09$	$1.01 E - 23$
\mathfrak{R}_3	1.061313790582525	$E - 04$	$5.14 E - 19$

anche in questo caso quindi otteniamo errori relativi al limite della precisione di macchina.

- Sia $p_3(\mathbf{x}) = x_1^4 x_2^3 x_3^2 x_4^2 x_5^2$. Con i soliti cambi di variabili otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{R}} x_1^4 x_2^3 x_3^2 x_4^2 x_5^2 d\mathbf{S}^4 = \\ \int_{\gamma} \cos^4(\phi) \sin^3(\phi) d\phi \int_{\tau_3} \cos^2(\theta_3) \sin^8(\theta_3) d\theta_3 \cdot \\ \cdot \int_{\tau_2} \cos^2(\theta_2) \sin^{11}(\theta_2) d\theta_2 \int_{\tau_1} \cos^2(\theta_1) \sin^{14}(\theta_1) d\theta_1 \end{aligned}$$

Il suo integrale indefinito è :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{70} \cos^5(\phi) \cdot (-9 + 5 \cos(2\phi)) \right]_{\gamma} \cdot \left[\frac{1}{30720} \cdot (840\theta_3 - 420 \sin(2\theta_3) \right. \\ & \left. - 120 \sin(4\theta_3) + 130 \sin(6\theta_3) - 45 \sin(8\theta_3) + 6 \sin(10\theta_3)) \right]_{\tau_3} \cdot \\ & \cdot \left[\frac{1}{4612608} \cos^3(\theta_2) \cdot (-586654 + 642234 \cos(2\theta_2) - 238200 \cos(4\theta_2) + \right. \\ & \left. + 60305 \cos(6\theta_2) - 9450 \cos(8\theta_2) + 693 \cos(10\theta_2)) \right]_{\tau_2} \cdot \\ & \cdot \left[\frac{1}{55050240} \cdot (720720\theta_1 - 480480 \sin(2\theta_1) + 101920 \sin(6\theta_1) \right. \\ & \left. - 76440 \sin(8\theta_1) + 32928 \sin(10\theta_1) - 8960 \sin(12\theta_1) + \right. \\ & \left. + 1440 \sin(14\theta_1) - 105 \sin(16\theta_1)) \right]_{\tau_1} \end{aligned}$$

e i valori esatti sulle varie regioni:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_1 & : 2.190268569130004 \quad E - 13 \\ \mathfrak{R}_2 & : 3.946789748508915 \quad E - 13 \\ \mathfrak{R}_3 & : 3.060360093430965 \quad E - 07 \end{aligned}$$

Calcolando l'integrale con la formula di cubatura introdotta con grado di precisione 13 e 57120 punti, otteniamo:

Regione	Integrale numerico	Errore assoluto	Errore relativo
\mathfrak{R}_1	$2.190268569129981 \cdot 10^{-13}$	$2.29 \cdot 10^{-27}$	$1.04 \cdot 10^{-14}$
\mathfrak{R}_2	$3.946789748508966 \cdot 10^{-13}$	$5.09 \cdot 10^{-27}$	$1.29 \cdot 10^{-14}$
\mathfrak{R}_3	$3.060360093431082 \cdot 10^{-07}$	$1.16 \cdot 10^{-20}$	$3.80 \cdot 10^{-14}$

Come si vede dalle tabelle, possiamo notare che già con il grado 13, gli errori relativi iniziano ad aumentare, passando dall'ordine 10^{-15} dei precedenti esempi all'ordine 10^{-14} .

- Sia $p_4(\mathbf{x}) = x_1^6 x_2^6 x_3^7 x_4^7 x_5^7$. Tale integrale diviene:

$$\int_{\mathfrak{R}} x_1^6 x_2^6 x_3^7 x_4^7 x_5^7 d\mathbf{S}^4 = \\ \int_{\gamma} \cos^6(\phi) \sin^6(\phi) d\phi \int_{\tau_3} \cos^7(\theta_3) \sin^{13}(\theta_3) d\theta_3 \cdot \\ \cdot \int_{\tau_2} \cos^7(\theta_2) \sin^{21}(\theta_2) d\theta_2 \int_{\tau_1} \cos^7(\theta_1) \sin^{29}(\theta_1) d\theta_1$$

E il suo integrale indefinito calcolato con Mathematica:

$$\left[\frac{1}{24576} (120\phi - 45 \sin(4\phi) + 9 \sin(8\phi) - \sin(12\phi)) \right]_{\gamma} \cdot \\ \cdot \left[\frac{1}{220200960} (-152880 \cos^2(\theta_3) + 19110 \cos(4\theta_3) + 11760 \cos(6\theta_3) \right. \\ \left. - 9240 \cos(8\theta_3) - 336 \cos(10\theta_3) + 2415 \cos(12\theta_3) - 660 \cos(14\theta_3) \right. \\ \left. - 210 \cos(16\theta_3) + 140 \cos(18\theta_3) - 21 \cos(20\theta_3)) \right]_{\tau_3} \cdot \\ \cdot \left[\frac{1}{537407782912} (-72424352 \cos^2(\theta_2) + 15842827 \cos(4\theta_2) + 532532 \cos(6\theta_2) \right. \\ \left. - 5591586 \cos(8\theta_2) + 3111108 \cos(10\theta_2) + 49049 \cos(12\theta_2) - 980408 \cos(14\theta_2) \right. \\ \left. + 532532 \cos(16\theta_2) - 56056 \cos(18\theta_2) - 77077 \cos(20\theta_2) + 48412 \cos(22\theta_2) \right. \\ \left. - 14014 \cos(24\theta_2) + 2156 \cos(26\theta_2) - 143 \cos(28\theta_2)) \right]_{\tau_2} \cdot \\ \cdot \left[\frac{1}{105140799406080} (-2143071000 \cos(2\theta_1) + 1178689050 \cos(4\theta_1) \right. \\ \left. - 244922400 \cos(6\theta_1) - 244922400 \cos(8\theta_1) + 283258080 \cos(10\theta_1) \right]$$

$$\begin{aligned}
& -121130100 \cos(12\theta_1) - 13843440 \cos(14\theta_1) + 52179120 \cos(16\theta_1) \\
& - 33405680 \cos(18\theta_1) + 8714268 \cos(20\theta_1) + 2472480 \cos(22\theta_1) \\
& - 3598560 \cos(24\theta_1) + 1884960 \cos(26\theta_1) - 625005 \cos(28\theta_1) \\
& + 141372 \cos(30\theta_1) - 21420 \cos(32\theta_1) + 1980 \cos(34\theta_1) - 85 \cos(36\theta_1)) \Big|_{\tau_1}
\end{aligned}$$

Sulle regioni test il valore di tale integrale è :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}_1 & : 2.539589341735816 E - 22 \\
\mathfrak{R}_2 & : 8.87026372813527 E - 23 \\
\mathfrak{R}_3 & : 6.509187109835031 E - 14
\end{aligned}$$

mentre l'integrale numerico da noi calcolato restituisce i seguenti valori, calcolati con grado di precisione 33 e 1585080 punti:

Regione	Integrale numerico	Errore assoluto	Errore relativo
\mathfrak{R}_1	2.539589341735154 E - 22	6.61 E - 35	2.60 E - 13
\mathfrak{R}_2	8.870263728130242 E - 23	5.02 E - 35	5.66 E - 13
\mathfrak{R}_3	6.509187109835014 E - 14	1.64 E - 28	2.52 E - 15

Possiamo vedere che anche in questo caso, su alcune regioni, in particolare le regioni dove l'integrale risulta essere *piccolo* in valore assoluto, ci possono essere problemi di approssimazione che non ci permettono di raggiungere la precisione di macchina negli errori relativi.

4.2 Esempi su \mathbb{S}^2

Creiamo alcuni esempi su \mathbb{S}^2 in modo tale da poter disegnare i punti e capire come si dispongono sulle varie regioni. Nei successivi disegni useremo una triangolazione di Delaunay per vedere meglio come si dispongono i punti sulla sfera. Coloreremo ogni triangolo in base ai pesi dei rispettivi vertici, un colore tendente al blu indica che la media dei pesi dei vertici è relativamente piccola, mentre un colore tendente al rosso indica che i pesi incidono maggiormente nel calcolo dell'integrale.

Come nella sezione precedente verifichiamo l'esattezza della formula per un monomio, successivamente proveremo a testare la formula con funzioni non polinomiali. Siano le regioni test:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}_1 & := \mathbf{x} \in \mathbb{S}^2 : \phi \in [0.2, 1.2], \theta \in [0.5, 1.2] \\
\mathfrak{R}_2 & := \mathbf{x} \in \mathbb{S}^2 : \phi \in [0, 2\pi], \theta \in [0.8, 1.4] \\
\mathfrak{R}_3 & := \mathbf{x} \in \mathbb{S}^2 : \phi \in [0.5, 1], \theta \in [0, pi]
\end{aligned}$$

si possono osservare le tre regioni nelle figure, costruite per vari gradi.

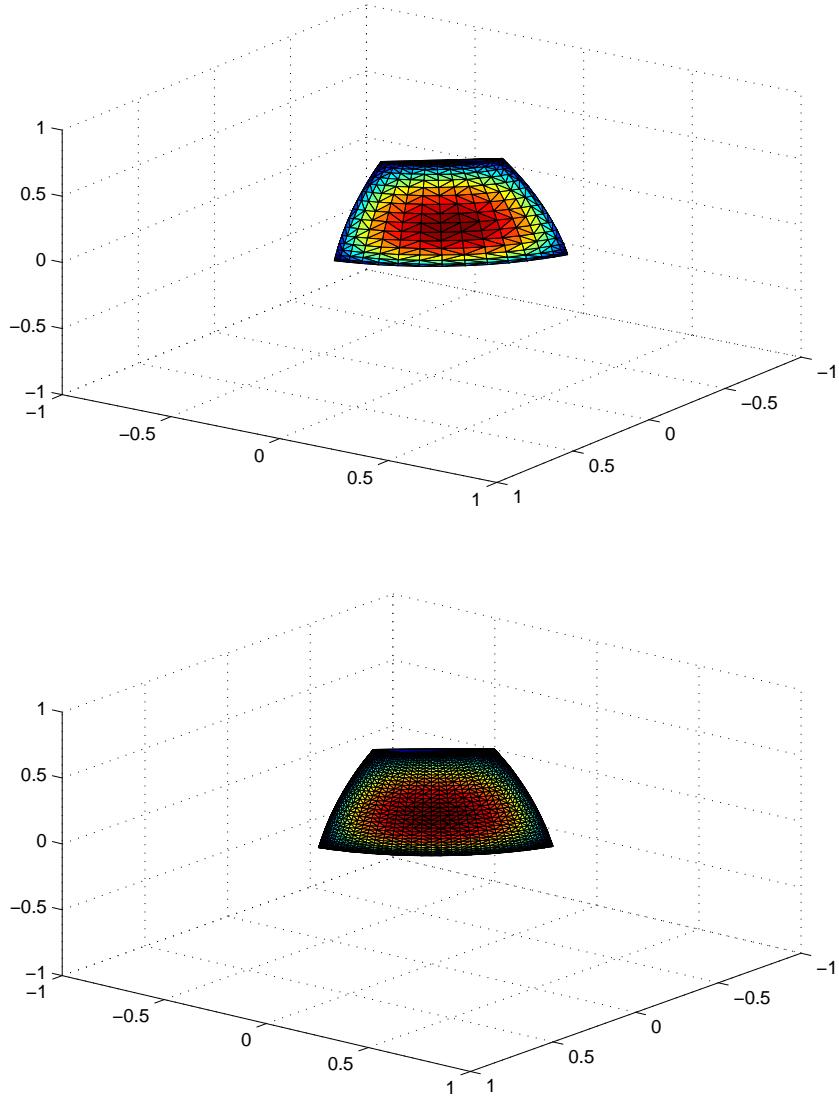


Figura 3: *Regione \mathfrak{R}_1 per gradi rispettivamente 15 in alto e 35 in basso*

- sia $p(x_1, x_2, x_3) = x_1^7 x_2^6 x_3^2$. L'integrale di tale polinomio risulta:

$$\int_{\mathbb{S}^2} x_1^7 x_2^6 x_3^2 d\mathbf{S}^2 = \int_{\gamma} \cos^7(\phi) \sin^6(\phi) d\phi \int_{\tau} \cos^2(\theta) \sin^{14}(\theta) d\theta$$

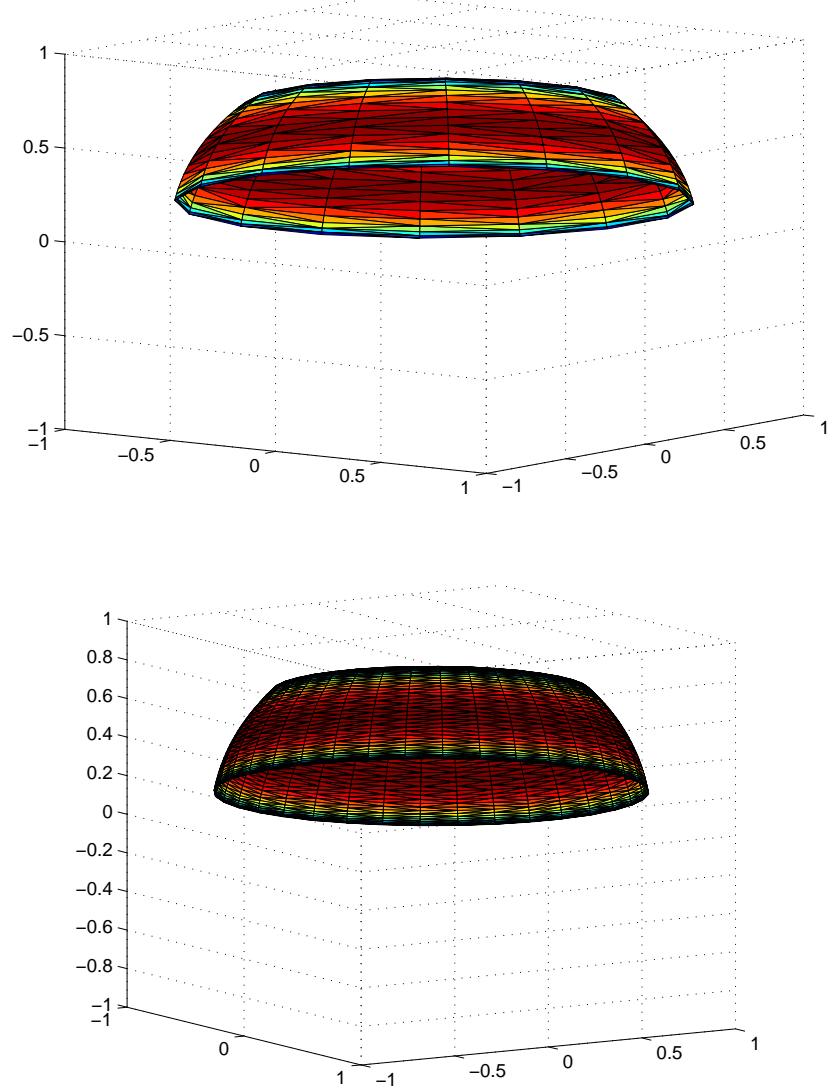


Figura 4: *Regione \mathfrak{R}_2 (anello) per gradi rispettivamente 15 in alto e 35 in basso*

Calcolando l'integrale indefinito otteniamo con Mathematica

$$\left[\frac{(5230 + 6377 \cos(2\phi) + 1890 \cos(4\phi) + 231 \cos(6\phi)) \sin^7(\phi)}{96096} \right]_{\gamma} .$$

$$. \left[\frac{1}{55050240} (720720\theta - 480480 \sin(2\theta) + 101920 \sin(6\theta) - 76440 \sin(8\theta) \right]$$

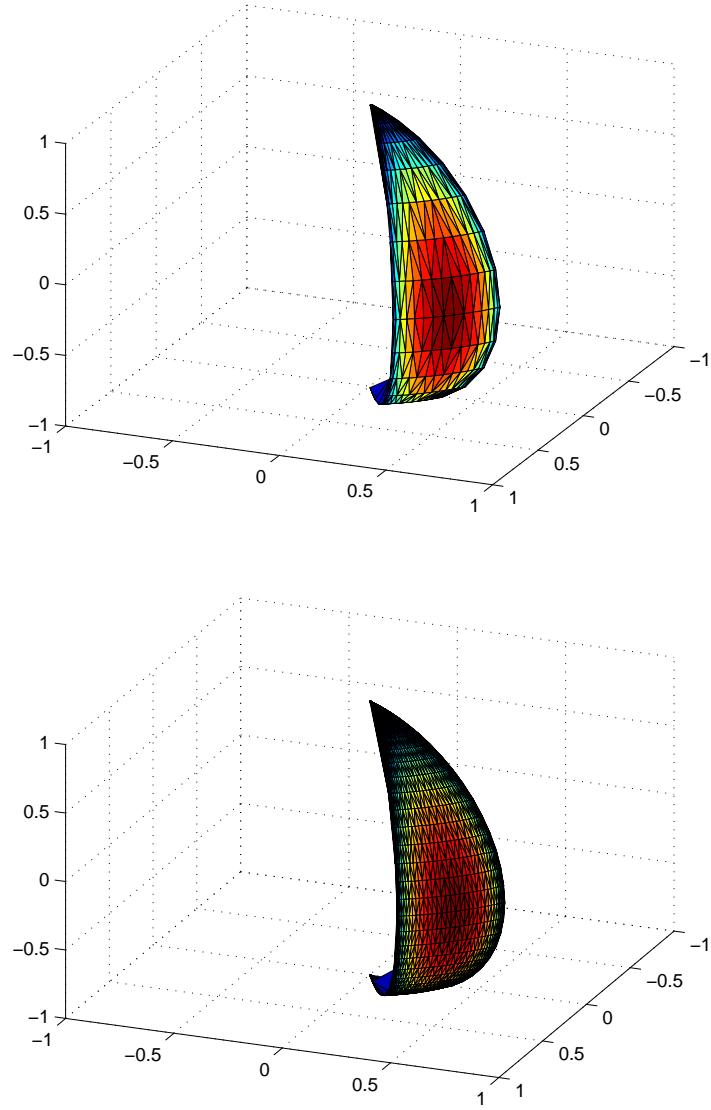


Figura 5: *Regione \mathfrak{R}_3 (slice) per gradi rispettivamente 15 in alto e 35 in basso*

$$+32928 \sin(10\theta) - 8960 \sin(12\theta) + 1440 \sin(14\theta) - 105 \sin(16\theta))\big]_{\tau}$$

I valori esatti di tali integrali sulle nostre tre regioni test sono:

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_1 &: 0 E 0 \\ \mathfrak{R}_2 &: 0 E - 0 \\ \mathfrak{R}_3 &: 0 E - 0\end{aligned}$$

Calcolando gli integrali con la formula da noi introdotta avente grado di precisione 8 e 11880 nodi, ricaviamo:

Regione	Integrale numerico	Errore assoluto	Errore relativo
\Re_1	$0 E - 06$	$4.06 E - 20$	$5.91 E - 15$
\Re_2	$0 E - 06$	$9.48 E - 20$	$9.70 E - 15$
\Re_3	$0 E - 03$	$7.80 E - 18$	$6.84 E - 15$

5 Esempi di WAM e interpolazione

6 Appendice

6.1 Commenti sulla costruzione dei codici Matlab

6.2 Codici di Matlab e di Mathematica usati

Per i calcoli simbolici e il calcolo di integrali esatti ci siamo riferiti alle seguenti funzioni di Mathematica:

`Integrate[f,x]`
gives the indefinite integral of f in dx

`Integrate[f,{x,x_min,x_max}]`
gives the definite integral of f in dx from x_min to x_max

`Simplify[expr]`
performs a sequence of algebraic and other transformations on expr,
and returns the simplest form it finds

`ScientificForm[expr]`
prints with all real numbers in expr given in scientific notation

`ScientificForm[expr,n]`
prints with numbers given to n-digit precision

Riferimenti bibliografici

- [1] MILTON ABRAMOWITZ AND IRENE A. STEGUN. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables,. *Dover Publications, New York*, 1972.
- [2] KENDALL ATKINSON AND WEIMIN HAN. Spherical harmonics and approximations on the unit sphere: An introduction,. *Springer*.
- [3] LEN BOS AND MARCO VIANELLO. Subperiodic trigonometric interpolation and quadrature,. *Appl. Math. Comput.*, **218**:10630–10638, 2012.
- [4] GASpare DA FIES AND MARCO VIANELLO. Algebraic cubature on planar lenses and bubbles,. *Dolomites Res. Notes Approx. DRNA*, **5**:7–12, 2012.
- [5] GASpare DA FIES AND MARCO VIANELLO. Trigonometric gaussian quadrature on subintervals of the period,. *Electron. Trans. Numer. Anal.*, **39**:102–112, 2012.
- [6] GASpare DA FIES AND MARCO VIANELLO. On the lebesgue constant of subperiodic trigonometric interpolation,. to appear.
- [7] ALVISE SOMMARIVA GASpare DA FIES AND MARCO VIANELLO. Algebraic cubature by linear blending of elliptical arcs,. *Adv. Comput. Math.*, submitted.
- [8] WALTER GAUTSCHI. Orthogonal polynomials: Computation and approximation,. *Oxford University Press, New York*, 2004.
- [9] KERSTIN HESSE AND ROBERT S. WOMERSLEY. Numerical integration with polynomial exactness over a spherical cap,. *Adv. Comput. Math.*, **36**:451–483, 2012.
- [10] A. MARKOV. On a problem of d.i. mendeleev,. *Selected Works (in Russian)*, GITTL, Moscow-Leningrad, 1948.
- [11] C. MULLER. Spherical armonics,. *Lecture Notes in Mathematics, vol.17*, Springer, New York, 1966.
- [12] IAN H. SLOAN AND ROBERT S. WOMERSLEY. How good can polynomial interpolation on the sphere be?,. *Advances in Computational Mathematics*, **14**:195–226, 2001.
- [13] IAN H. SLOAN AND ROBERT S. WOMERSLEY. Extremal systems of points and numerical integration on the sphere,. *Advances in Computational Mathematics*, **21**:102–125, 2004.

- [14] GABOR SZEGO. Orthogonal polynomials,. *American Mathematical Society Colloquium Publications*, **23**, 1939.