UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
Facoltá di Scienze MM. FF. NN.
Dipartimento di Matematica
Laurea Magistrale in Matematica

???integrazione numerica sulla sfera

Relatore: Dott. Alvise Sommariva
Correlatore: Prof. Marco Vianello

Laureando: Mariano Gentile

a.a. 2011/2012

Sommario

In this work we present a rule for numerical integration over some regions of the sphere, that will include caps and pieces of caps. The rule will work in arbitrary dimension, it has positive weights and is exact for all spherical polynomials of degree less or equal to n. We will present a regular property for any rule with positive weights in these regions. Numerical tests in different dimensions will prove the performance of this rule. All the codes are written in Matlab and are shown at the end of this work.

Indice

1 Introduzione

Nelle seguenti pagine ci occuperemo dell'integrazione numerica sulla sfera (unitaria) $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$

$$\mathbb{S}^d := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d+1} : \|\mathbf{x}\| = 1\}$$

dove con $\|\cdot\|$ intendiamo la norma Euclidea in $\mathbb{R}^{d+1}$, con particolare interesse al caso $d = 2$. Recentemente questo argomento è stato oggetto di vari sviluppi, come ad esempio in (cf. [9]) (inserire bibliografia), che comprendono l'integrazione su tutta la sfera o su particolari regioni di essa. Ci proponiamo di continuare questi sviluppi e di ampliarli ad altri tipi di regioni, in particolare parti di calotte sferiche come nel seguito specificheremo, o regioni delimitate da paralleli e meridiani.

Nel seguito saranno date formule di integrazione esatte per polinomi sferici di grado $\leq n$ su regioni di $\mathbb{S}^d$ ove useremo il prodotto tensoriale e le formule di integrazione uno-dimensionali per polinomi trigonometrici su sottointervalli di $[0, 2\pi]$ studiate in [3] [4] [5] [6] [7] (inserire bibliografia).

Saranno mostrati esempi pratici in $\mathbb{S}^2$ e $\mathbb{S}^4$ elaborati in Matlab, e alla fine saranno messi a disposizione tutti i codici utilizzati.

Analizzeremo inoltre alcune considerazioni teoriche per una generica formula di integrazione che si pretende sia esatta per polinomi di grado $\leq n$ su $\mathbb{S}^d$.

2 Notazioni

In questo lavoro, posti $\mathbf{x} = (x_k)_{k=1}^{d+1}$, $\mathbf{y} = (y_k)_{k=1}^{d+1}$, denoteremo con

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sum_{k=1}^{d+1} x_k^2$$

la distanza Euclidea in $\mathbb{R}^{d+1}$, mentre con

$$dist(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \arccos(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}),\ \ \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_k x_k \cdot y_k$$

intenderemo la distanza geodetica tra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sulla sfera.

La *geodetica* è definita per qualsiasi spazio, come la curva che descrive localmente la traiettoria più breve tra due punti di tale spazio.
Un'altra definizione equivalente descrive le geodetiche come le traiettorie percorse da un punto che si muove a velocità costante, senza forze su di esso che ne modifichino il moto, con le eccezioni dei vincoli alla traiettoria affinchè non esca fuori dallo spazio considerato.
Nel caso della sfera $\mathbb{S}^2$ si può verificare che le geodetiche sono tutte e sole gli archi di cerchi massimi, ovvero archi di cerchi concentrici alla sfera. Tutti i meridiani sono cerchi massimi, ad esempio, ma non i paralleli (con l'eccezione dell'Equatore).

Nel seguito useremo polinomi sferici di grado $\leq n$. Con essi intenderemo polinomi di grado $\leq n$ in $\mathbb{R}^{d+1}$ ristretti a $\mathbb{S}^d$, ovvero:

$$\mathbb{P}_n(\mathbb{S}^d) = \{p(\mathbf{x}) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R}^{d+1}) : \mathbf{x} \in \mathbb{S}^d\} =$$

$$= \{p(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N} a_j x_1^{b_{1,j}} \dots x_{d+1}^{b_{d+1,j}} : \|\mathbf{x}\|_2 = 1,\ \sum_{k=1}^{d+1} b_{k,j} \leq n,\ \forall 1 \leq j \leq N\}$$

Useremo inoltre due classiche parametrizzazioni della sfera:

La prima parametrizzazione sarà data dalle normali *coordinate ipersferiche*, e prevede l'utilizzo di un angolo $\phi \in [0, 2\pi]$ e angoli $\theta_i \in [0, \pi]$ tali che

$$\begin{cases} x_1 & = & \cos(\phi)\sin(\theta_{d-2})\dots\sin(\theta_1) \\ x_2 & = & \sin(\phi)\sin(\theta_{d-2})\dots\sin(\theta_1) \\ x_3 & = & \cos(\theta_{d-2})\sin(\theta_{d-3})\dots\sin(\theta_1) \\ x_4 & = & \cos(\theta_{d-3})\sin(\theta_3)\dots\sin(\theta_1) \\ & \dots & \\ x_{d-1} & = & \cos(\theta_2)\sin(\theta_1) \\ x_d & = & \cos(\theta_1) \end{cases} \tag{1}$$

e il relativo elemento di volume è $\sin^{d-2}(\theta_1)\sin^{d-3}(\theta_2)\dots\sin(\theta_{d-2})$.

La seconda parametrizzazione prevede di sostituire $\cos(\theta_1) = t$ e di conseguenza $\sin(\theta_1) = \sqrt{1-t^2}$. Conseguentemente:

$$\int_{\mathbb{S}^d} d\mathbf{S}^d(\mathbf{x}) = |\mathbb{S}^{d-1}| \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\frac{d-2}{2}} dt \tag{2}$$

ove abbiamo denotato $d\mathbf{S}^d(\mathbf{x})$ l'elemento di superficie di $\mathbb{S}^d$ e con $|\mathbb{S}^{d-1}|$ l'area della superficie di $\mathbb{S}^{d-1}$.
In entrambi i casi denoteremo con $\mathbf{z}$ il Polo Nord della sfera, ossia il punto di coordinate cartesiane $\mathbf{z} = (0, 0, \dots, 0, 1)$.

In questo lavoro studieremo punti su porzioni della *cupola di sfera* $\mathfrak{C}$, denotata con $\mathfrak{C}(\mathbf{x}, \gamma), 0 \leq \gamma \leq \pi$:

$$\mathfrak{C}(\mathbf{x}, \gamma) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{S}^d : \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \geq \cos\gamma\}$$

Si osserva facilmente che se in particolare $\mathbf{x} = \mathbf{z}$, con $\mathbf{z}$ Polo Nord, utilizzando le coordinate in (2):

$$\mathfrak{C}(\mathbf{z}, \gamma) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^d : x_{d+1} \geq \cos\gamma\}$$

Definiamo inoltre il *triangolo sferico non standard* in $\mathbb{S}^d$, come la porzione di cupola, nelle coordinate in (1):

$$\mathfrak{P}_{\gamma,\tau_1,\dots,\tau_{d-1}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^d : \theta_i \leq \tau_i, \phi \leq \gamma\}$$

e analogamente la seguente regione che diremo *quadrato non standard*:

$$\mathfrak{R}_{\gamma_s,\gamma_f,\tau_{1,s},\tau_{1,f},\dots,\tau_{d-1,s},\tau_{d-1,f}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^d : \tau_{i,s} \leq \theta_i \leq \tau_{i,f}, \gamma_s \leq \phi \leq \gamma_f\}$$

di cui il triangolo non standard è un caso particolare con $\gamma_s = 0, \tau_{i,s} = 0$. Osserviamo che queste due regioni in generale non coincidono con i relativi classici poligoni sferici in quanto i lati, in generale, non giacciono su geodetiche. Intuitivamente tale regione $\mathfrak{R}_{\gamma_s,\gamma_f,\tau_s,\tau_f}$ in $\mathbb{S}^2$ non è altro che la regione di sfera racchiusa tra due paralleli e due meridiani, nelle usuali coordinate geografiche con latitudine e longitudine.

3 Polinomi sferici

Di seguito intendiamo determinare formule di cubatura su porzioni di sfera. Non e' restrittivo studiare il problema considerando tutte le regioni riferite al Polo Nord, in quanto con una opportuna rotazione si possono cambiare le coordinate e riportare i risultati su una simile regione generica della sfera, senza influire sull'esattezza di una formula di cubatura. In particolare ciò ci consente di considerare unicamente cupole e parti di cupole centrate nel Polo Nord senza perdita di generalità , più precisamente:

Lemma

Sia $\mathfrak{R} \subset \mathbb{S}^d$ regione precedentemente definita con intervalli $[\tau_{i,s}, \tau_{i,f}]$ e $[\gamma_s, \gamma_f]$, utilizzando le coordinate con $\mathbf{z}$ Polo Nord e $\mathbf{x}$ vettore $(1, 0, \ldots, 0)$ (in particolare $\mathbf{z} \cdot \mathbf{x} = 0$). Consideriamo la seguente formula:

$$\mathcal{Q}_{\mathfrak{R}}(f) := \sum_{j=1}^{N} \lambda_j f(\mathbf{x}_j) \approx \int_{\mathfrak{R}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{S}^d$$

dove f è una funzione continua in $\mathfrak{R}$, i nodi $\{\mathbf{x}_i\} \in \mathfrak{R}$, i pesi $\{\lambda_i\} \in \mathbb{R}$ e sia la formula esatta per l'integrazione in $\mathbb{P}_n(\mathfrak{R})$, spazio dei polinomi di grado al più n definiti su $\mathfrak{R}$. Sia $\mathfrak{R}^* \subset \mathbb{S}^d$ un'altra regione definita utilizzando coordinate tali che $\mathbf{z}^*$ e $\mathbf{x}^*$ siano il Polo Nord e il punto $(1, 0, \ldots, 0,)$ (quindi $\mathbf{z}^* \cdot \mathbf{x}^* = 0$) e che abbia gli stessi intervalli $[\tau_{i,s}, \tau_{i,f}]$ e $[\gamma_s, \gamma_f]$, e sia $\mathbf{A}$ una rotazione in $\mathbb{R}^{d+1}$ tale che $\mathbf{z}^* = \mathbf{A}\mathbf{z}$ e $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Allora la seguente formula

$$\mathcal{Q}_{\mathfrak{R}^*}(f) := \sum_{j=1}^{N} \lambda_j f(\mathbf{A}\mathbf{x}_j) \approx \int_{\mathfrak{R}^*} f(\mathbf{x}) d\mathbf{S}^d$$

con f funzione continua in $\mathfrak{R}^*$ e i nodi $\{\mathbf{A}\mathbf{x}_i\} \in \mathfrak{R}^*$, è esatta su $\mathbb{P}_n(\mathfrak{R}^*)$.

Dimostrazione

Sia $p \in \mathbb{P}_n(\mathfrak{R}^*)$ allora

$$\mathcal{Q}_{\mathfrak{R}^*}(p) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j f(\mathbf{A}\mathbf{x}_j)$$

Ricordiamo che lo spazio dei polinomi $\mathbb{P}_n(\mathbb{S}^d)$ è invariante per le rotazioni ovvero $\mathbb{P}_n(\mathbb{S}^d) = \{p \circ \mathbf{A} : p \in \mathbb{P}_n(\mathbb{S}^d)\}$. Inoltre dato che la rotazione $\mathbf{A}$ è una mappa biunivoca tra $\mathfrak{R}^*$ e $\mathfrak{R}$, allora $p \circ \mathbf{A} \in \mathbb{P}_n(\mathfrak{R})$. Dato che $\mathcal{Q}$ è esatta per $\mathbb{P}_n(\mathfrak{R})$ allora

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j f(\mathbf{A}\mathbf{x}_j) = \int_{\mathfrak{R}} p(\mathbf{A}\mathbf{y}) d\mathbf{S}^d = \int_{\mathfrak{R}^*} p(\mathbf{x}) d\mathbf{S}^d$$

dove abbiamo effettuato il cambio di coordinate $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{x}$ grazie al fatto che $\det(\mathbf{A}) = 1$. $\square$

Sia ora $[a, b]$ generico intervallo sulla retta reale, denoteremo con $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ lo spazio dei polinomi di grado $\leq n$ in una variabile, e con $\mathbb{P}_n([a, b])$ la restrizione di tali polinomi all'intervallo $[a, b]$ ovvero:

$$\mathbb{P}_n([a, b]) := \{p(\mathbf{x}) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) : \mathbf{x} \in [a, b]\}$$

Analogamente definiamo lo spazio $\mathbb{P}_n(\mathbb{S}^d)$ dei *polinomi sferici* su $\mathbb{S}^d$ come lo spazio dei polinomi in $\mathbb{R}^{d+1}$ ristretti alla sfera $\mathbb{S}^d$ di grado inferiore o uguale a n precisamente:

$$\mathbb{P}_n(\mathbb{S}^d) := \{p(\mathbf{x}) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R}^{d+1}) : \mathbf{x} \in \mathbb{S}^d\}$$

Definiamo inoltre i polinomi omogenei di grado n come:

$$\mathbb{PO}_n(\mathbb{R}^d) := \left\{ \sum_{b_1 + \cdots + b_d = n} a_{b_1, \ldots, b_d} x_1^{b_1} \ldots x_1^{b_d} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \right\}$$

ovvero un polinomio i cui termini siano tutti di grado n.
Ricordiamo ora che una funzione f si dice *armonica*, se f è tale che $\Delta f(\mathbf{x}) = 0$.

A questo punto siamo in grado di definire la restrizione di un polinomio omogeneo armonico in $\mathbb{R}^{d+1}$ di grado k sulla sfera $\mathbb{S}^d$ come:

$$\mathbb{H}_k(\mathbb{S}^d) := \left\{p \in \mathbb{PO}_n(\mathbb{R}^{d+1}) : \Delta p(\mathbf{x}) = 0, \, \mathbf{x} \in \mathbb{S}^d\right\}$$

detta *armonica sferica di grado* k (cf. [9], [2]). (inserire bibliografia) La sua dimensione $\mathbf{Z}(d, k)$ è data da:

$$\mathbf{Z}(d, k) := \begin{cases} 1 & se \quad k = 0 \\ \frac{(2k+d-1)\Gamma(k+d-1)}{\Gamma(d)\Gamma(k+1)} & se \quad k = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{3}$$

Le armoniche sferiche di gradi differenti sono mutualmente ortogonali, di conseguenza lo spazio $\mathbb{P}_n(\mathbb{S}^d)$ può essere rappresentato come somma diretta $\bigoplus_{k=0}^{n} \mathbb{H}_k(\mathbb{S}^d)$

e quindi la sua dimensione sarà :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbf{Z}(d,k) = \frac{(2n+d)\Gamma(n+d)}{\Gamma(d+1)\Gamma(n+1)} = \mathbf{Z}(d+1,n) \sim (n+1)^d$$

Fissati $\alpha, \beta > -1$, sia $\mathbf{P}_k^{(\alpha,\beta)}$ il *polinomio di Jacobi* di grado k e esponenti α, β (cf. [2], [8], [13]) (se $\alpha, \beta = 0$ il polinomio di Jacobi viene detto *polinomio di Legendre*):

$$\mathbf{P}_k^{(\alpha,\beta)}(t) := \frac{(-1)^k}{2^k k!}(1-t)^{-\alpha}(1+t)^{-\beta}\frac{d^k}{dt^k}\left[(1-t)^{\alpha+k}(1+t)^{\beta+k}\right] =$$

$$= \sum_{s=0}^{k} \left(\begin{array}{c} n+\alpha \\ s \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} n+\beta \\ n-s \end{array} \right) \left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-s} \left(\frac{x+1}{2}\right)^{s}$$

I polinomi di Jacobi sono caratterizzati dall'essere un insieme completo di polinomi ortogonali nell'intervallo $[-1,1]$ rispetto al seguente prodotto scalare pesato:

$$(f,g)_{\mathbf{L}_2^{(\alpha,\beta)}([-1,1])} := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}dt$$

dove la normalizzazione imposta su tali polinomi sarà (cf. [13], (4.1.1)):

$$\mathbf{P}_k^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)} \tag{4}$$

e (cf. [13], (4.3.3)):

$$\int_{-1}^{1} |\mathbf{P}_k^{(\alpha,\beta)}(t)|^2(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}dt = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{(2k+\alpha+\beta+1)}\frac{\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+\beta+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\alpha+\beta+1)}$$

Siano ora $\{\mathbf{Y}_{k,1}^d, \mathbf{Y}_{k,2}^d, \ldots \mathbf{Y}_{k,\mathbf{Z}(d,k)}^d\}$ una base ortonormale di $\mathbb{H}_k(\mathbb{S}^d)$ rispetto al prodotto interno di $\mathbf{L}_2(\mathbb{S}^d)$. Per tale base vale il cosidetto *addition theorem* (cf. [2] Teorema 2.9 (inserire bibliografia)):

$$\sum_{i=1}^{\mathbf{Z}(d,k)} \mathbf{Y}_{k,i}^d(\mathbf{x})\mathbf{Y}_{k,i}^d(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{Z}(d,k)}{|\mathbb{S}^d|}\frac{\mathbf{P}_k^{((d-2)/2,(d-2)/2)}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})}{\mathbf{P}_k^{((d-2)/2,(d-2)/2)}(1)}, \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{S}^d$$

Inoltre lo spazio $\mathbb{H}_k(\mathbb{S}^d)$ è un *reproducing kernel Hilbert space* con reproducing kernel $\mathbf{K}_k^d : \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}$:

$$\mathbf{K}_k^d := \sum_{i=1}^{\mathbf{Z}(d,k)} \mathbf{Y}_{k,i}^d(\mathbf{x})\mathbf{Y}_{k,i}^d(\mathbf{y})$$

Un reproducing kernel Hilbert space, in breve RKHS, è definito come uno spazio di Hilbert (con prodotto interno e che sia completo rispetto alla distanza indotta) di funzioni $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, tale che contenga un *reproducing kernel.*

Una funzione reproducing kernel possiede due importanti proprietà :

$$\begin{cases} \mathbf{K}_k^d(\cdot, \mathbf{y}) \in \mathbb{H}_k(\mathbb{S}^d), & \forall \mathbf{y} \in \mathbb{S}^d \\ \big(g, \mathbf{K}_k^d(\cdot, \mathbf{y})\big)_{\mathbf{L}_2(\mathbb{S}^d)} = g(\mathbf{y}), & \forall g \in \mathbb{H}_k(\mathbb{S}^d), \forall \mathbf{y} \in \mathbb{S}^d \end{cases} \tag{5}$$

Anche lo spazio dei polinomi $\mathbb{P}_n(\mathbb{S}^d)$ è un reproducing kernel Hilbert space con la seguente funzione $\mathbf{G}_n^d : \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}$:

$$\mathbf{G}_n^d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{\mathbf{Z}(d,k)} \mathbf{Y}_{k,i}^d(\mathbf{x}) \mathbf{Y}_{k,i}^d(\mathbf{y}) = \frac{1}{|\mathbb{S}^d|} \frac{\Gamma(d/2)\Gamma(n+d)}{\Gamma(d)\Gamma(n+d/2)} \mathbf{P}_n^{(d/2,(d-2)/2)}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \tag{6}$$

Quindi anche $\mathbf{G}_n^d$ possiede le due proprietà di reproducing kernel:

$$\begin{cases} \mathbf{G}_n^d(\cdot, \mathbf{y}) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{S}^d), & \forall \mathbf{y} \in \mathbb{S}^d \\ \big(p, \mathbf{G}_n^d(\cdot, \mathbf{y})\big)_{\mathbf{L}_2(\mathbb{S}^d)} = p(\mathbf{y}), & \forall p \in \mathbb{P}_n(\mathbb{S}^d), \forall \mathbf{y} \in \mathbb{S}^d \end{cases} \tag{7}$$

Per approfondimenti in questi temi si consideri [2], [8], [13].(inserire bibliografia)

4 Costruzione di formule di integrazione numerica su triangoli e quadrati non standard in $\mathbb{S}^d$

Consideriamo alcune importanti proprietá dei polinomi di Legendre che useremo di seguito per la costruzione di formule di cubatura (cf. [2]). A tal proposito risultera' fondamentale il concetto di *funzione associata di Legendre*, che definiremo tra poco.

Abbiamo già definito chi è il polinomio di Legendre, che si può scrivere semplicemente come:

$$\mathbf{P}_{n,d}(t) = n!\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}(-1)^k \frac{(1-t^2)^k t^{n-2k}}{4^k k!(n-2k)!\Gamma(k+\frac{d-1}{2})} \tag{8}$$

i cui pedici indicano rispettivamente il grado del polinomio e la dimensione dello spazio su cui è definito. Per $d = 3$ si parla anche di *polinomio di Legendre standard*. Denotiamo con $\mathbf{P}_{n,d}^{(m)}(t)$ la derivata di grado m del polinomio di Legendre

$$\mathbf{P}_{n,d}^{(m)}(t) := \frac{d^m}{dt^m}\mathbf{P}_{n,d}(t)$$

Per $d \geq 3$ definiamo dunque la *funzione associata di Legendre*:

$$\mathbf{P}_{n,d,m}(t) = \frac{(n+d-3)!}{(n+m+d-3)!}(1-t^2)^{\frac{m}{2}}\mathbf{P}_{n,d}^{(m)}(t), t \in [-1,1] \tag{9}$$

Si faccia attenzione al fatto che il pedice d di $\mathbf{P}_{n,d,m}$ si riferisce allo spazio $\mathbb{R}^d$ mentre l'apice d di $\mathbf{Y}_{k,m}^d$ si riferisce alla sfera $\mathbb{S}^d$.

Si noti che $\mathbf{P}_{n,d,m}(t)$ è un polinomio solo per m pari, ma può diventare un polinomio trigonometrico con la sostituzione $t = \cos(\theta)$ e $(1-t^2)^{m/2} = \sin^m(\theta)$, come vedremo in seguito.

Definiamo infine la *funzione di Legendre normalizzata*:

$$\widetilde{\mathbf{P}}_{n,d,m}(t) = \frac{(n+d-3)!}{n!\Gamma(\frac{d-1}{2})}\left[\frac{(2n+d-2)(n-m)!}{2^{d-2}(n+d+m-3)!}\right]^{1/2}(1-t^2)^{m/2}\mathbf{P}_{n,d}^{(m)}(t), t \in [-1,1] \tag{10}$$

dove con $\mathbf{P}_{n,d}^{(m)}$ indichiamo la derivata di grado m di $\mathbf{P}_{n,d}$. Enunciamo ora un risultato fondamentale per i nostri scopi, discendente direttamente da [2], Teorema 2.47 e dalla sua dimostrazione.

Teorema

Sia $\{\mathbf{Y}_{k,j}^{d-1} : 1 \leq j \leq \mathbf{Z}(d-1,k)\}$ una base ortonormale per $\mathbb{H}_k(\mathbb{S}^{d-1})$, con $0 \leq k \leq n$, allora

$$\left\{\widetilde{\mathbf{P}}_{n,d+1,m}(t)\mathbf{Y}_{k,j}^{d-1}(\xi_{d-1}) : 1 \leq j \leq \mathbf{Z}(d-1,k), 0 \leq m \leq n\right\} \tag{11}$$

con $\xi_{d-1} \in \mathbb{S}^{d-1}$, e $\xi_d = t\mathbf{e}_d + \sqrt{1-t^2}(\xi_{d-1}, 0)^T \in \mathbb{S}^d$, è una base ortonormale per $\mathbb{H}_k(\mathbb{S}^d)$.

Prima di esporre il risultato principale di questo capitolo, ricordiamo il seguente Lemma:

Lemma

Siano $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_+$, allora:

$$\sin^{n_1}(\theta)\cos^{n_2}(\theta) = \sum_{j=1}^{M_s} c_{1,j}\sin(a_{1,j}\theta) + \sum_{h=1}^{M_c} c_{2,h}\cos(a_{2,h}\theta)$$

per opportuni $c_{1,j}, c_{2,h} \in \mathbb{N}$, $\forall j, h$ che possono eventualmente annullarsi o essere negativi e inoltre $a_{1,j}, a_{2,h} \in \mathbb{N}_+$, $a_{1,j}, a_{2,h} \leq n_1 + n_2$, $\forall j, h$. In particolare l'upper bound di $a_{1,j}, a_{2,h}$ assicura che le sommatorie sono finite, ovvero $M_s, M_c < \infty$.

Dimostrazione

Osserviamo che:

- per n pari:

$$\cos^n(\theta) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{n/2} + \frac{2}{2^n}\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\binom{n}{k}\cos((n-2k)\theta)$$

$$\sin^n(\theta) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{n/2} + \frac{2}{2^n}\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}(-1)^{\frac{n}{2}-k}\binom{n}{k}\cos((n-2k)\theta)$$

- per n dispari:

$$\cos^n(\theta) = \frac{2}{2^n}\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{k}\cos((n-2k)\theta)$$

$$\sin^n(\theta) = \frac{2}{2^n}\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^{\frac{n-1}{2}-k}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)\sin((n-2k)\theta)$$

Le formule precedenti permettono di trasformare la potenza di un coseno e di un seno, in una sommatoria di costanti e di termini di primo grado, cambiando l'argomento delle funzioni.
Importante notare che i multipli degli argomenti nel membro di destra, sono sempre minori o uguali dell'esponente al membro di sinistra.
Usiamo le formule per calcolare $\sin^{n_1}(\theta)\cos^{n_2}(\theta)$. Per facilità di lettura, non riportiamo le costanti nelle formule. Guardiamo i vari casi:

- n_1 pari, n_2 dispari

$$\sum_{m_1=0}^{\frac{n_1}{2}-1}\sum_{m_2=0}^{\frac{n_2-1}{2}}\cos(n_1-2m_1\theta)\cos(n_2-2m_2\theta)+\sum_{m_2=0}^{\frac{n_2-1}{2}}\cos(n_2-2m_2\theta)$$

- n_1 pari, n_2 pari

$$\sum_{m_1=0}^{\frac{n_1}{2}-1}\cos(n_1-2m_1\theta)+\sum_{m_2=0}^{\frac{n_2}{2}-1}\cos(n_2-2m_2\theta)+\sum_{m_1=0}^{\frac{n_1}{2}-1}\sum_{m_2=0}^{\frac{n_2}{2}-1}\cos(n_1-2m_1\theta)\cos(n_2-2m_2\theta)$$

- n_1 dispari, n_2 dispari

$$\sum_{m_1=0}^{\frac{n_1-1}{2}}\sum_{m_2=0}^{\frac{n_2-1}{2}}\sin(n_1-2m_1\theta)\cos(n_2-2m_2\theta)$$

- n_1 dispari, n_2 pari

$$\sum_{m_1=0}^{\frac{n_1-1}{2}}\sin(n_1-2m_1\theta)+\sum_{m_1=0}^{\frac{n_1-1}{2}}\sum_{m_2=0}^{\frac{n_2}{2}-1}\sin(n_1-2m_1\theta)\cos(n_2-2m_2\theta)$$

Osserviamo che in tutti i casi si ha $0 \leq n_1 - 2m_1 \leq n_1$, $0 \leq n_2 - 2m_2 \leq n_2$.
Infine per effettuare l'ultimo passaggio occorre ricordare le seguenti formule trigonometriche:

$$\cos(\theta)\cos(\phi) = \frac{\cos(\theta-\phi)+\cos(\theta+\phi)}{2}$$

$$\sin(\theta)\cos(\phi) = \frac{\sin(\theta-\phi)+\sin(\theta+\phi)}{2}$$

Grazie alle ultime due formule riusciamo ad arrivare a (anche qui tralasciamo le costanti):

$$\sum_j \sin(a_{1,j}\theta) + \sum_j \cos(a_{2,j}\theta)$$

dove $a_{1,j}, a_{2,j} \in \mathbb{N}$ e contenute nell'intervallo $[-(n_1+n_2),(n_1+n_2)]$. Come ultima cosa osserviamo ancora le seguenti identità $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ e $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$, e otteniamo infine una sommatoria di termini del tipo $\sum_j \sin(a_{1,j}) + \sum_h \cos(a_{2,h})$ dove $a_{1,j}, a_{2,h} \in \mathbb{N}_+ \cap [0, n_1+n_2]$, dunque la tesi. $\square$

Richiamiamo ora la formula uno-dimensionale esatta per lo spazio dei *polinomi trigonometrici*:

$$\mathbb{T}_n([-\omega,\omega]) = span\{1, \sin(k\theta), \cos(k\theta) : 1 \le k \le n, \theta \in [-\omega,\omega]\}$$

definita negli articoli (cf. [3], [4], [5], [6], [7]).

Proposizione

Siano $(\xi_j, \lambda_j)_{1\le j\le n+1}$ i nodi e i pesi (positivi) della formula di quadratura algebrica Gaussiana relativa alla funzione peso:

$$\omega(x) = \frac{2\sin(\omega/2)}{\sqrt{1-\sin^2(\omega/2)x^2}}, x \in (-1,1)$$

Allora

$$\int_{-\omega}^{\omega} f(\theta)d\theta = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j f(\phi_j), f \in \mathbb{T}_n([-\omega,\omega]), 0 \le \omega \le \pi$$

dove

$$\phi_j = 2\arcsin(\sin(\omega/2)\xi_j) \in (-\omega,\omega), j = 1,2,\ldots,n+1$$

Siamo ora in grado di esporre il seguente:

Teorema

Sia $p \in \mathbb{P}_n(\mathfrak{R})$ (oppure $p \in \mathbb{P}_n(\mathfrak{P})$) in $\mathbb{S}^d$ allora la seguente formula di integrazione è esatta:

$$\mathcal{Q}_{\mathfrak{R},n}(p) = \sum_{j_1=1}^{n+1+(d-1)} \sum_{j_2=1}^{n+1+(d-2)} \cdots \sum_{j_{d-1}=1}^{n+1+1} \sum_{j_d=1}^{n+1} \lambda_{j_1\ldots j_d} p(\xi_{j_1,\ldots,j_d}) \qquad (12)$$

con $(n+d)\dots(n+1) = \frac{(n+d)!}{n!}$ punti, ove i pesi sono definiti come

$$\lambda_{j_1\dots j_d} = \lambda_{j_1}\dots\lambda_{j_d}\sin^{d-1}(\theta_{1,j_1})\sin^{d-2}(\theta_{2,j_2})\dots\sin(\theta_{d-1,j_{d-1}})$$

e i λ_{j_i} sono i pesi della formula di quadratura Gaussiana subperiodica definita nella proposizione precedente di grado rispettivamente $n+(d-1)$, $n+(d-2)$,..., n, per gli intervalli $[\tau_{i,s},\tau_{i,f}]$ e $[\gamma_s,\gamma_f]$ definiti in $\mathfrak{R}$ (o $[0,\tau_i]$ e $[0,\gamma]$ se ci riferiamo a $\mathfrak{P}$), e i nodi definiti con le coordinate in (1):

$$\xi_{j_1,\dots,j_d} = \xi(\theta_{1,j_1},\theta_{2,j_2},\dots,\theta_{d-1,j_{d-1}},\phi_{j_d})$$

dove i singoli angoli sono i nodi della formula di quadratura Gaussiana subperiodica per gli intervalli sopra citati.

Dimostrazione

Procediamo per induzione su d.

$\mathbb{S}^1$, il cerchio.
In questo caso non dobbiamo far altro che applicare la formula di quadratura nel caso uno-dimensionale, la cui esattezza è dimostrata in [5] oppure in [4], per lo spazio:

$$\mathbb{T}_n([\alpha,\beta]) = span\{1,\sin(k\theta),\cos(k\theta) : 1\leq k\leq n, \theta\in[\alpha,\beta]\}$$

$\mathbb{S}^2$, la sfera.
Consideriamo il caso più generale di $\mathbb{P}_n(\mathfrak{R})$ con intervalli $[\tau_s,\tau_f]$ $[\gamma_s,\gamma_f]$ e dimostriamo che la formula è esatta per una base dello spazio delle armoniche sferiche, ad esempio [2] pp.$133-134$:

$$\mathbf{Y}^2_{n,1}(\xi) = c_{n,1}\mathbf{P}_n(\cos(\theta))$$

$$\mathbf{Y}^2_{n,2m}(\xi) = c_{n,m}\mathbf{P}_{n,3,m}(\cos(\theta))\cos(m\phi)$$

$$\mathbf{Y}^2_{n,2m+1}(\xi) = c_{n,m}\mathbf{P}_{n,3,m}(\cos(\theta))\sin(m\phi), m=1,\dots,n$$

ove i $c_n, c_{n,m}$ sono opportune costanti.
Avremo quindi:

$$\mathcal{Q}_{\mathfrak{R},n}(\mathbf{Y}^2_{n,1}(\xi)) = c_{n,1}\sum_{j_1=1}^{n+1+1}\sum_{j_2=1}^{n+1}\lambda_{j_1}\lambda_{j_2}\sin(\theta_{j_1})\mathbf{P}_n(\cos(\theta_{j_1})) =$$

$$c_{n,1}\sum_{j_2=1}^{n+1}\lambda_{j_2}\sum_{j_1=1}^{n+1+1}\lambda_{j_1}\sin(\theta_{j_1})\mathbf{P}_n(\cos(\theta_{j_1})) = c_{n,1}\int_{\gamma_s}^{\gamma_f}d\phi\int_{\tau_s}^{\tau_f}\sin(\theta)\mathbf{P}_n(\cos(\theta))d\theta =$$

$$\int_{\tau_s}^{\tau_f}\int_{\gamma_s}^{\gamma_f}\sin(\theta)\mathbf{Y}^2_{n,1}(\xi(\theta,\phi))d\phi d\theta=\int_{\tau_s}^{\tau_f}\int_{\gamma_s}^{\gamma_f}\mathbf{Y}^2_{n,1}(\xi)d\mathbf{S}^2$$

dove si usa il Lemma precedente per giustificare l'esattezza della formula unidimensionale.
Continuando con le altre basi si ha:

$$\mathcal{Q}_{\mathfrak{R},n}(\mathbf{Y}^2_{n,2m}(\xi))=c_{n,m}\sum_{j_1=1}^{n+1+1}\sum_{j_2=1}^{n+1}\lambda_{j_1}\lambda_{j_2}\sin(\theta_{j_1})\mathbf{P}_{n,3,m}(\cos(\theta_{j_1}))\cos(m\phi_{j_2})=$$

$$c_{n,m}\sum_{j_1=1}^{n+1+1}\lambda_{j_1}\sin(\theta_{j_1})\mathbf{P}_{n,3,m}(\cos(\theta_{j_1}))\sum_{j_2=1}^{n+1}\lambda_{j_2}\cos(m\phi_{j_2})$$

Riguardando definizione di $\mathbf{P}_{n,3,m}(\cos(\theta))$ e notando che $(1-t^2)^{j/2}$ si riduce in questo caso a $\sin(\theta)^j$, possiamo applicare il Lemma sopra esposto per ottenere un polinomio trigonometrico riconducibile ad una somma di termini $\sin(a\theta)$ e $\cos(b\theta)$ con $a,b\leq n$. Quindi otteniamo un polinomio trigonometrico appartenente allo spazio prodotto-tensore $\mathbb{T}_{n+1}([\tau_s,\tau_f])\bigotimes\mathbb{T}_n([\gamma_s,\gamma_f])$ per il quale le formule Gaussiane (sub)trigonometriche sono esatte. Continuando:

$$c_{n,m}\sum_{j_1=1}^{n+1+1}\lambda_{j_1}\sin(\theta_{j_1})\mathbf{P}_{n,3,m}(\cos(\theta_{j_1}))\sum_{j_2=1}^{n+1}\lambda_{j_2}\cos(m\phi_{j_2})=$$

$$c_{n,m}\int_{\tau_s}^{\tau_f}\sin(\theta)\mathbf{P}_{n,3,m}(\cos(\theta))d\theta\int_{\gamma_s}^{\gamma_f}\cos(m\phi_{j_2})d\phi=$$

$$\int_{\gamma_s}^{\gamma_f}\int_{\tau_s}^{\tau_f}\sin(\theta)\mathbf{Y}^2_{n,2m}(\xi(\theta,\phi))d\theta d\phi=\int_{\gamma_s}^{\gamma_f}\int_{\tau_s}^{\tau_f}\mathbf{Y}^2_{n,2m}(\xi)d\mathbf{S}^2$$

Ragionamento analogo con $\mathbf{Y}^2_{n,2m+1}(\xi)$.

$\mathbb{S}^d$, passo induttivo.

Sia $\mathfrak{R}$ la regione definita dagli intervalli $[\tau_{i,s},\tau_{i,f}]$ e $[\gamma_s,\gamma_f]$ e sia $\mathcal{Q}_{\mathfrak{R}^-,n-1}$ la formula costruita come sopra descritto per $\mathbb{S}^{d-1}$, esatta per $\{\mathbf{Y}^{d-1}_{k,j}:1\leq j\leq\mathbf{Z}(d-1,k)\}$. Abbiamo già visto che una base per $\mathbb{S}^d$ è la seguente:

$$\left\{\widetilde{\mathbf{P}}_{n,d+1,m}(\cos(\theta_1))\mathbf{Y}^{d-1}_{k,j}(\xi(\theta_2,\dots,\theta_{d-1},\phi)):1\leq j\leq\mathbf{Z}(d-1,k),0\leq m\leq n\right\}$$

Effettuando i ragionamenti sopra esposti per un generico elemento della base avremo:

$$\int_{\tau_{1,s}}^{\tau_{1,f}}\dots\int_{\tau_{d-1,s}}^{\tau_{d-1,f}}\int_{\gamma_s}^{\gamma_f}\widetilde{\mathbf{P}}_{n,d+1,m}(\cos(\theta_1))\mathbf{Y}^{d-1}_{k,j}(\xi(\theta_2,\dots,\theta_{d-1},\phi))d\mathbf{S}^d=$$

$$\int_{\tau_{2,s}}^{\tau_{2,f}} \cdots \int_{\gamma_s}^{\gamma_f} \mathbf{Y}_{k,j}^{d-1}(\xi(\theta_2,\dots,\theta_{d-1},\phi))d\mathbf{S}^{d-1} \int_{\tau_{1,s}}^{\tau_{1,f}} \sin^{d-1}(\theta_1)\widetilde{\mathbf{P}}_{n,d+1,m}(\cos(\theta_1))d\theta_1 =$$

$$\mathcal{Q}_{\mathfrak{R}^-,n-1}(\mathbf{Y}_{k,j}^{d-1}(\xi)) \int_{\tau_{1,s}}^{\tau_{1,f}} \sin^{d-1}(\theta_1)\widetilde{\mathbf{P}}_{n,d+1,m}(\cos(\theta_1))d\theta_1 =$$

$$\mathcal{Q}_{\mathfrak{R}^-,n-1}(\mathbf{Y}_{k,j}^{d-1}(\xi)) \sum_{j_1=1}^{n+1+d-1} \lambda_{j_1} \sin^{d-1}(\theta_{j_1})\widetilde{\mathbf{P}}_{n,d+1,m}(\cos(\theta_{j_1})) = \mathcal{Q}_{\mathfrak{R},n}(\mathbf{Y}_{k,j}^{d}(\xi))$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo usato il Lemma analogamente al caso $\mathbb{S}^2$.
$\square$

5 Stime sui pesi di una formula di integrazione su regioni di $\mathbb{S}^d$

Quello che faremo in questa sezione sarà allargare il Teorema 6.1 in [9], scritto per cupole $\mathfrak{C}$, alle nostre regioni $\mathfrak{P}$ e $\mathfrak{R}$ di $\mathbb{S}^d$, trovando una stima di regolarità per i pesi di una generica formula $\mathcal{Q}$ esatta su $\mathbb{P}_n(\cdot)$.

Prima di enunciare il Teorema, premettiamo alcuni concetti: data la nostra regione $\mathfrak{R}$ (ci riferiremo in particolare a tale regione, essendo $\mathfrak{P}$ un suo caso particolare), ci interesserà trovare una cupola che la contenga. Abbiamo già osservato che le rotazioni della sfera non influenzano la formula di integrazione, quindi ruoteremo la sfera in modo da avere il polo Nord come punto centrale di $\mathfrak{R}$, e considerare quindi $\mathfrak{C}(\mathbf{z}, \gamma)$, come tra poco vedremo meglio.

Consideriamo le seguenti matrici di rotazione:

$$R_1^{d+1}(\eta) = \begin{pmatrix} \cos(\eta) & \sin(\eta) & 0 & \dots & 0 \\ -\sin(\eta) & \cos(\eta) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_2^{d+1}(\eta) = \begin{pmatrix} \cos(\eta) & 0 & -\sin(\eta) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sin(\eta) & 0 & \cos(\eta) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_i^{d+1}(\eta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \cos(\eta) & -\sin(\eta) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \sin(\eta) & \cos(\eta) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_d^{d+1}(\eta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \cos(\eta) & -\sin(\eta) \\ 0 & \dots & \sin(\eta) & \cos(\eta) \end{pmatrix}$$

di dimensioni $d+1 \times d+1$ e dove in R_i^{d+1} con $i \geq 3$, gli elementi di rotazione sono quelli nelle coordinate $(i,i), (i,i+1), (i+1,i), (i+1,i+1)$. Si noti che solo R_1^{d+1}

è una rotazione in senso *antiorario*, mentre tutte le altre sono rotazioni in senso *orario*. Tale differenza tra la prima matrice e le successive deriva dal fatto che per le prime due coordinate in (1), sin e cos sono invertiti rispetto alle successive.

Si può verificare che dato un punto $\mathbf{x}(\theta_1, \ldots, \theta_{d-1}, \phi)$ le seguenti rotazioni portano tale punto in $\mathbf{z}$:

$$R_d^{d+1}(\theta_1) \cdot \cdots \cdot R_2^{d+1}(\theta_{d-1}) \cdot R_1^{d+1}(\phi) \cdot \mathbf{x}(\theta_1, \ldots, \theta_{d-1}, \phi) = \mathbf{z}$$

Consideriamo quindi la nostra regione:

$$\mathfrak{R}_{\gamma_s,\gamma_f,\tau_{1,s},\tau_{1,f},\ldots,\tau_{d-1,s},\tau_{d-1,f}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^d : \tau_{i,s} \leq \theta_i \leq \tau_{i,f}, \gamma_s \leq \phi \leq \gamma_f\}$$

e il suo punto centrale

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\gamma_s+\gamma_f}{2}) \sin(\frac{\tau_{d-1,s}+\tau_{d-1,f}}{2}) \ldots \sin(\frac{\tau_{1,s}+\tau_{1,f}}{2})) \\ \sin(\frac{\gamma_s+\gamma_f}{2}) \sin(\frac{\tau_{d-1,s}+\tau_{d-1,f}}{2}) \ldots \sin(\frac{\tau_{1,s}+\tau_{1,f}}{2})) \\ \cos(\frac{\tau_{d-1,s}+\tau_{d-1,f}}{2}) \sin(\frac{\tau_{d-2,s}+\tau_{d-2,f}}{2})) \ldots \sin(\frac{\tau_{1,s}+\tau_{1,f}}{2})) \\ \ldots \\ \cos(\frac{\tau_{1,s}+\tau_{1,f}}{2}) \end{pmatrix}$$

ed utilizziamo le rotazioni sopra esposte per ruotarlo fino a portarlo al polo Nord $\mathbf{z} = (0, 0, \ldots, 0, 1)$:

$$R_d^{d+1}(\frac{\tau_{1,s} + \tau_{1,f}}{2}) \cdot \cdots \cdot R_1^{d+1}(\frac{\gamma_s + \gamma_f}{2}) \cdot \mathbf{c}(\frac{\tau_{1,s} + \tau_{1,f}}{2}, \ldots, \frac{\gamma_s + \gamma_f}{2}) = \mathbf{z}$$

Effettuando tali rotazioni per tutti i punti di $\mathfrak{R}$, otteniamo le nuove coordinate di tali punti ruotati verso $\mathbf{z}$. Ricordiamo per comodità la definizione di cupola centrata nel polo Nord:

$$\mathfrak{C}(\mathbf{z}, \tau) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^d : x_{d+1} \geq \cos\tau\}$$

Si può vedere che per verificare che un punto appartenga alla cupola di raggio τ e centro il polo Nord, possiamo limitarci a controllare la sua ultima coordinata. Quello che ci interesserà trovare, sarà quindi il minimo delle ultime coordinate per i punti di $\mathfrak{R}$ dopo aver effettuato le rotazioni, ovvero:

$$\cos(\mu) = \min_{\substack{\mathbf{y} = R_d^{d+1} \ldots R_1^{d+1} \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \in \mathfrak{R}}} (y_{d+1})$$

dove abbiamo omesso gli angoli di rotazione per comodità di lettura.

Dare una stima a priori di tale minimo risulta alquanto complicato, data la particolare geometria della sfera: stime *apparentemente intuitive*, ad esempio utilizzare come upper bound $\mathbf{c} \cdot \mathbf{D}$, $\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}$, oppure $\mathbf{c} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{d}$, dove con $\mathbf{D}$ indichiamo l'estremo di $\mathfrak{R}$ con tutti gli angoli massimizzati, e $\mathbf{d}$ l'estremo con tutti gli angoli minimizzati, si sono rivelate già in $\mathbb{S}^2$ false e inefficaci. Ciò deriva dal fatto che la regione $\mathfrak{R}$ cambia notevolmente forma non solo a seconda dell'ampiezza degli intervalli $[\tau_{i,s}, \tau_{i,f}], [\gamma_s, \gamma_f]$, ma anche e soprattutto a seconda della sua vicinanza all'equatore o ai poli della sfera.

Anche calcolando $\cos(\mu)$ simbolicamente, il risultato appare poco chiaro per poter trovare delle stime teoriche concrete (che non siano eccessivamente *larghe*). Per $\mathbb{S}^2$ avremo infatti:

$$\min_{\substack{\gamma_s \leq \phi \leq \gamma_f \\ \tau_s \leq \theta \leq \tau_f}} (\cos((\tau_s+\tau_f)/2)\cos(\theta)+\cos((\gamma_s+\gamma_f-2\phi)/2)\sin((\tau_s+\tau_f)/2)\sin(\theta))$$

(i calcoli sopra esposti sono stati eseguiti con l'ausilio del calcolo simbolico di Mathematica). Per $\mathbb{S}^3$ il risultato dei calcoli appare incomprensibile ed evitiamo di riportarlo. Si noti inoltre che in alcuni casi, in particolare quando $\mathfrak{R}$ è vicina ad uno dei poli e gli intervalli $[\tau_{i,s}, \tau_{i,f}]$ sono abbastanza grandi (quanto grandi dipende dai valori di γ_s e γ_f oltre che dalla loro differenza), prendere il punto centrale della regione potrebbe non risultare la soluzione migliore. Il teorema che seguirà rimarrà comunque valido, ma la stima varierà a seconda della grandezza della cupola considerata.

Di conseguenza ci limiteremo a chiamare $\cos(\mu)$ tale minimo, e a considerare quindi $\mathfrak{C}(\mathbf{c}, \mu)$, affidando a calcolatori come Matlab o Mathematica il compito di calcolare μ da caso a caso.

Enunciamo quindi il:

Teorema

Sia $d \geq 2$ e sia $\mathfrak{R}$ una regione di $\mathbb{S}^d$. Sia $\mathcal{Q}_{\mathfrak{R},n}$ data da:

$$\mathcal{Q}_{\mathfrak{R},n} := \sum_{j=1}^{N} \lambda_j f(\mathbf{x}_j)$$

una formula di integrazione con nodi $\mathbf{x}_j \in \mathfrak{R}$, pesi positivi e che sia esatta su $\mathbb{P}_n(\mathfrak{R})$, con $n \geq 2$. Sia inoltre μ definito precedentemente, tale che $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{C}(\mathbf{c}, \mu)$

con $\mathbf{c}$ punto centrale di $\mathfrak{R}$. Allora

$$\sum_{\substack{j=1,\\ \mathbf{x}_j \in \mathfrak{C}(\mathbf{y},\mu/\pi n)}}^{N} \lambda_j \leq c\mu^d \lfloor n/2 \rfloor^{-d}$$

per ogni $\mathbf{y} \in \mathbb{S}^d$, con $\mathfrak{C}(\mathbf{y},\mu/\pi n)$ cupola di centro $\mathbf{y}$ e raggio $\mu/\pi n$, e la costante c dipendente dalla dimensione d, ma non da μ, n, N, $\mathbf{y}$ e dalla formula $\mathcal{Q}$.

Dimostrazione

Definiamo la funzione $g_{\lfloor n/2 \rfloor} : [-1,1] \to \mathbb{R}$ come:

$$g_{\lfloor n/2 \rfloor}(t) := \frac{1}{|\mathbb{S}^d|} \frac{\Gamma(d/2)\Gamma(\lfloor n/2 \rfloor + d)}{\Gamma(d)\Gamma(\lfloor n/2 \rfloor + d/2)} \mathbf{P}_{\lfloor n/2 \rfloor}^{(d/2,(d-2)/2)}(t)$$

con $\mathbf{P}_n^{(\alpha,\beta)}$ polinomio di Jacobi definito nel capitolo delle notazioni. Sempre dalle notazioni si osserva che $g_{\lfloor n/2 \rfloor}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{G}_{\lfloor n/2 \rfloor}^d(\mathbf{x},\mathbf{y})$, con $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{S}^d$, e $\mathbf{G}_{\lfloor n/2 \rfloor}^d$ reproducing kernel di $\mathbb{P}_{\lfloor n/2 \rfloor}(\mathbb{S}^d)$ definito in (6). Consideriamo ora una sua normalizzazione:

$$p(t) := \frac{g_{\lfloor n/2 \rfloor}(t)}{g_{\lfloor n/2 \rfloor}(1)}, t \in [-1,1]$$

Dalle stime che si possono trovare in [13], (4.1.1) e (7.32.2), risulta che $|p(t)| \leq p(1), t \in [-1,1]$ e quindi si ha $0 \leq [p(t)]^2 \leq [p(1)]^2 = 1, t \in [-1,1]$. Notiamo anche che essendo p definito con i polinomi $g_{\lfloor n/2 \rfloor}$ di grado $\lfloor n/2 \rfloor$, allora $p^2(t)$ è un polinomio di grado massimo $\leq n$.
Utilizzando la disuguaglianza di Markov e la disuguaglianza di Bessel per i polinomi definiti su $[-1,1]$ (si guardi ad esempio [10]), possiamo verificare che:

$$\sup_{t \in [-1,1]} \left| ([p(t)]^2)' \right| \leq n^2 \qquad \sup_{t \in [-1,1]} |[p(t)]^2| = n^2$$

Dalle precedenti stime e dal teorema del valor medio si ottiene quindi:

$$\left|1 - [p(t)]^2\right| = \left|[p(1)]^2 - [p(t)]^2\right| \leq n^2(1-t), t \in [-1,1]$$

dove il membro destro soddisfa $n^2(1-t) \leq 1/2$ se e solo se $0 \leq 1-t \leq 1/(2n^2)$.
Ricordando che $[p(t)]^2 \leq 1$ otteniamo infine

$$\tfrac{1}{2} \leq [p(t)]^2 \leq 1 \quad sse \quad 0 \leq 1-t \leq \tfrac{1}{2n^2} \tag{13}$$

Definiamo inoltre una trasformazione affine $T : [0,1] \to [\cos(13\mu/6, 1]$ nel seguente modo:

$$T(s) := \left(1 - \cos\frac{13\mu}{6}\right)s + \cos\frac{13\mu}{6} = 2\left(\sin\frac{13\mu}{12}\right)^2 s + \cos\frac{13\mu}{6}$$

Fatte queste premesse, utili nel seguito della dimostrazione, andiamo a definire un polinomio di grado $\leq n$ che integreremo con la formula $\mathcal{Q}$ su $\mathfrak{R}$. Sia quindi:

$$q(t) := \begin{cases} p(t)^2, & t \in [-1,1] \quad se \quad \mu > 3\pi/13 \\ p(T^{-1}(t))^2, & t \in [\cos(13\mu/6), 1] \quad se \quad \mu \leq 3\pi/13 \end{cases}$$

Notiamo che il polinomio q sarà sempre positivo, essendo definito come un quadrato.
Siamo ora $\mathbf{y} \in \mathbb{S}^d$ un qualsiasi punto fissato sulla sfera d-dimensionale, e consideriamo il polinomio sferico $\mathbf{x} \to q(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$, di grado $\leq n$, che integriamo utilizzando la regola $\mathcal{Q}_{\mathfrak{R},n}$, esatta su tale polinomio.

$$\int_{\mathfrak{R}} q(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) d\mathbf{S}^d = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j q(\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{y}) \geq \sum_{\substack{j=1 \\ \mathbf{x}_j \in \mathfrak{C}(\mathbf{y}, \mu/(\pi n))}}^{N} \lambda_j q(\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{y}) \tag{14}$$

dove la disuguaglianza nell'ultimo passaggio è valida poichè abbiamo semplicemente tralasciato alcuni termini positivi dalla sommatoria, dato che sia i pesi che il polinomio sono entrambi positivi.

Consideriamo per primo il caso $\mu > 3\pi/13$.
Ricordando (7) e la positività di q, possiamo stimare il membro a sinistra di (14) come:

$$\int_{\mathfrak{R}} q(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) d\mathbf{S}^d \leq \int_{\mathbb{S}^d} q(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) d\mathbf{S}^d = \int_{\mathbb{S}^d} \frac{g_{\lfloor n/2 \rfloor}(t)^2}{g_{\lfloor n/2 \rfloor}(1)^2} d\mathbf{S}^d =$$

$$g_{\lfloor n/2 \rfloor}(1)^{-2} \int_{\mathbb{S}^d} (\mathbf{G}^d_{\lfloor n/2 \rfloor}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^2 d\mathbf{S}^d = g_{\lfloor n/2 \rfloor}(1)^{-2} \mathbf{G}^d_{\lfloor n/2 \rfloor}(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = g_{\lfloor n/2 \rfloor}(1)^{-1}$$

Per stimare il membro a destra di (14), osserviamo che se $\mathbf{x}_j \in \mathfrak{C}(\mathbf{y}, \mu/(\pi n))$, allora per la definizione di cupola avremo che $\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{y} \geq \cos(\mu/(\pi n))$ e quindi, ricordando anche la stima $\sin x \leq x, x \geq 0$ e che $\mu \leq \pi$, otteniamo che:

$$1 - \mathbf{x}_j \cdot \mathbf{y} \leq 1 - cos\frac{\mu}{\pi n} = 2\left(\sin\frac{\mu}{2\pi n}\right)^2 \leq \frac{\mu^2}{2\pi^2 n^2} \leq \frac{1}{2n^2}$$

Perciò da (13) abbiamo che $1/2 \leq (p(\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{y}))^2 = q(\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{y}) \leq 1$ per ogni $\mathbf{x}_j \in \mathfrak{C}(\mathbf{y}, \mu/(\pi n))$ e quindi:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ \mathbf{x}_j \in \mathfrak{C}(\mathbf{y},\mu/(\pi n))}}^{N} \lambda_j q(\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{y}) \geq \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ \mathbf{x}_j \in \mathfrak{C}(\mathbf{y},\mu/(\pi n))}}^{N} \lambda_j \tag{15}$$

Combinando insieme le stime sopra effettuate e ricordando (13) otteniamo, per $\mu > 3\pi/13$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ \mathbf{x}_j \in \mathfrak{C}(\mathbf{y},\mu/(\pi n))}}^{N} \lambda_j \leq 2(g_{\lfloor n/2 \rfloor}(1))^{-1} = \frac{|\mathbb{S}^d|\Gamma(d+1)\Gamma(\lfloor n/2 \rfloor + 1)}{(\lfloor n/2 \rfloor + d/2)\Gamma(\lfloor n/2 \rfloor + d)} \leq$$

$$\leq c\lfloor n/2 \rfloor^{-d} \leq \frac{c\mu^d}{\lfloor n/2 \rfloor^d}$$

dove per la penultima stima ci riferiamo a [1], (6.1.46). Possiamo osservare che la costante c effettivamente dipende solo da d ma non da μ.

Consideriamo ora il caso in cui $\mu \leq 3\pi/13$.
Se $\mathbf{y} \in \mathbb{S}^d \backslash \mathfrak{C}(\mathbf{c}, \mu + \mu/(\pi n))$ allora il teorema è automaticamente vero, dato che $\mathfrak{C}(\mathbf{y}, \mu/(\pi n)) \cap \mathfrak{C}(\mathbf{c}, \mu) = \emptyset$ e quindi la sommatoria dei pesi sarebbe zero, non avendo nessun termine. Consideriamo quindi $\mathbf{y} \in \mathfrak{C}(\mathbf{c}, \mu + \mu/(\pi n))$. Allora per $\mathbf{x} \in \mathfrak{C}(\mathbf{z}, \mu)$ avremo

$$dist(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq dist(\mathbf{x}, \mathbf{c}) + dist(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \leq$$

$$\mu + \left(\mu + \frac{\mu}{\pi n}\right) \leq 2\mu + \frac{\mu}{2\pi} \leq 2\mu + \frac{\mu}{6} = \frac{13\mu}{6}$$

il che significa $\mathfrak{C}(\mathbf{c}, \mu) \subset \mathfrak{C}(\mathbf{y}, 13\mu/6)$. Riprendiamo allora la (14) e stimiamone il membro sinistro:

$$\int_{\mathfrak{R}} q(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) d\mathbf{S}^d \leq \int_{\mathfrak{C}(\mathbf{c},\mu)} q(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) d\mathbf{S}^d \leq$$

$$\int_{\mathfrak{C}(\mathbf{y},13\mu/6)} q(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) d\mathbf{S}^d = |\mathbb{S}^{d-1}| \int_{cos(13\mu/6)}^{1} p(T^{-1}(t))^2 (1-t^2)^{\frac{d-2}{2}} dt =$$

$$2\left(\sin\frac{13\mu}{12}\right)^2 |\mathbb{S}^{d-1}| \int_0^1 p(s)^2 (1 - (T(s))^2)^{\frac{d-2}{2}} ds$$

avendo utilizzato il cambio di variabili in (2) e successivamente la sostituzione $t = T(s)$. Inoltre

$$1 - (T(s))^2 = (1 + T(s))(1 - T(s)) \leq 2(1 - (1 - \cos(13\mu/6))s - \cos(13\mu/6)) =$$

$$2(1 - \cos(13\mu/6))(1 - s) \leq 4(\sin(13\mu/12))^2(1 - s^2)$$

per ogni $s \in [0, 1]$. Di conseguenza avremo:

$$\int_{\mathfrak{R}} q(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) d\mathbf{S}^d \leq 2 \left(\sin \frac{13\mu}{12} \right)^2 |\mathbb{S}^{d-1}| \int_0^1 p(s)^2 (1 - (T(s))^2)^{\frac{d-2}{2}} ds \leq$$

$$2^{d-1} \left(\sin \frac{13\mu}{12} \right)^d |\mathbb{S}^{d-1}| \int_0^1 p(s)^2 (1 - s^2)^{\frac{d-2}{2}} ds \leq$$

$$2^{d-1} \left(\sin \frac{13\mu}{12} \right)^d |\mathbb{S}^{d-1}| \int_{-1}^1 p(s)^2 (1 - s^2)^{\frac{d-2}{2}} ds =$$

$$2^{d-1} \left(\sin \frac{13\mu}{12} \right)^d |\mathbb{S}^{d-1}| \int_{-1}^1 \frac{(g_{\lfloor n/2 \rfloor}(s))^2}{(g_{\lfloor n/2 \rfloor}(1))^2} (1 - s^2)^{\frac{d-2}{2}} ds =$$

$$2^{d-1} \left(\sin \frac{13\mu}{12} \right)^d (g_{\lfloor n/2 \rfloor}(1))^{-2} \int_{\mathbb{S}^d} (\mathbf{G}^d_{\lfloor n/2 \rfloor}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^2 d\mathbf{S}^d =$$

$$2^{d-1} \left(\sin \frac{13\mu}{12} \right)^d (g_{\lfloor n/2 \rfloor}(1))^{-2} \mathbf{G}^d_{\lfloor n/2 \rfloor}(\mathbf{y}, \mathbf{y}) =$$

$$2^{d-1} \left(\sin \frac{13\mu}{12} \right)^d (g_{\lfloor n/2 \rfloor}(1))^{-1}$$

avendo usato (7) e (2). Da (13) ricaviamo

$$\tfrac{1}{2} \leq p(T^{-1}(t))^2 \leq 1 \quad sse \quad 0 \leq 1 - T^{-1}(t) \leq \tfrac{1}{2n^2}$$

ma $0 \leq 1 - T^{-1}(t) \leq 1/(2n^2)$ è equivalente a

$$0 \leq 1 - T^{-1}(t) = 1 - \frac{t - \cos(13\mu/6)}{1 - \cos(13\mu/6)} = \frac{1 - t}{1 - \cos(13\mu/6)} =$$

$$\frac{1 - t}{2(\sin(13\mu/12))^2} \leq \frac{1}{2n^2}$$

il che porta a

$$\tfrac{1}{2} \leq p(T^{-1}(t))^2 \leq 1 \quad sse \quad 0 \leq 1 - t \leq (\sin(13\mu/12))^2/n^2$$

Verifichiamo l'ultima condizione: se $\mathbf{x}_j \in \mathfrak{C}(\mathbf{y}, \mu/(\pi n))$, allora si ha che $\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{y} \geq \cos(\mu/(\pi n))$ e quindi

$$1 - \mathbf{x}_j \cdot \mathbf{y} \leq 1 - \cos\frac{\mu}{\pi n} = 2\left(\sin\frac{\mu}{2\pi n}\right)^2 \leq$$

$$\frac{\mu^2}{2\pi^2 n^2} \leq \frac{1}{n^2}\left(\sin\frac{\mu}{2\sqrt{2}}\right)^2 \leq \frac{1}{n^2}\left(\sin\frac{13\mu}{12}\right)^2$$

dove abbiamo utilizzato $\sin x \leq x$, se $x \geq 0$, $x \leq (\pi/2)\sin x$, se $x \in [0, \pi/2]$, e inoltre $\mu/(2\sqrt{2}) \leq 13\mu/12 \leq \pi/4$, se $\mu \leq 3\pi/13$, con la monotonicità di sin in $[0, \pi/2]$. Con quest'ultima stima quindi otteniamo che $q(\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{y}) \geq 1/2$ per ogni $\mathbf{x}_j \in \mathfrak{C}(\mathbf{y}, \mu/(\pi n))$, e quindi possiamo stimare il membro destro di (14) come in (15) e ottenere infine:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ \mathbf{x}_j \in \mathfrak{C}(\mathbf{y}, \mu/(\pi n))}}^{N} \lambda_j \leq 2^{d-1}\left(\sin\frac{13\mu}{12}\right)^d (g_{\lfloor n/2 \rfloor}(1))^{-1} \leq$$

$$2^{d-1}\left(\frac{13\mu}{12}\right)^d (g_{\lfloor n/2 \rfloor}(1))^{-1} \leq c\mu^d \lfloor n/2 \rfloor^{-d}$$

con la stima in [1] (6.1.46) per stimare $(g_{\lfloor n/2 \rfloor}(1))^{-1}$. Anche in questo caso la costante c dipende unicamente dalla dimensione d. □

6 Esempi su $\mathbb{S}^d$

Sperimentiamo numericamente l'esattezza polinomiale della formula sopra esposta. Sia dato un polinomio in $\mathbb{S}^d$ di grado n, esso sarà della forma:

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{J} a_j x_1^{b_{1,j}} x_2^{b_{2,j}} \dots x_{d+1}^{b_{d+1,j}}$$

con $a_j, b_{i,j} \in \mathbb{R}$, $\sum_i b_{i,j} \leq n$ per ogni j, $\mathbf{x}_i$ sono le coordinate cartesiane del punto $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^d$, e la sommatoria ha, per definizione di polinomio, un numero finito di elementi. Per la linearità dell'integrale avremo che

$$\int p(\mathbf{x}) d\mathbf{S}^d = \int \sum_{j=1}^{J} a_j x_1^{b_{1,j}} x_2^{b_{2,j}} \dots x_{d+1}^{b_{d+1,j}} d\mathbf{S}^d = \sum_{j=1}^{J} a_j \int x_1^{b_{1,j}} x_2^{b_{2,j}} \dots x_{d+1}^{b_{d+1,j}} d\mathbf{S}^d$$

di conseguenza possiamo testare la formula $\mathcal{Q}$ solo sui monomi senza perdita di generalità .

Purtroppo lavorando sulla sfera, tutte le coordinate di un punto sono in modulo $\|\mathbf{x}_i\| \leq 1$, quindi aumentare il grado del polinomio provoca un aumento di errori di approssimazione, come aumentare la dimensione della sfera $\mathbb{S}^d$ su cui si vuole lavorare, inoltre anche la regione $\mathfrak{R}$ su cui si integra gioca un ruolo fondamentale: come esempio consideriamo il monomio in $\mathbb{P}_{13}(\mathbb{S}^4)$

$$p(\mathbf{x}) = x_1^4 x_2^3 x_3^2 x_4^2 x_5^2$$

Per capire da dove viene il problema di approssimazione eseguiamo il cambio di coordinate in (1) dentro l'integrale, da cui avremo

$$\int_{\mathfrak{R}} x_1^4 x_2^3 x_3^2 x_4^2 x_5^2 d\mathbf{S}^4 =$$

$$\int_{\mathfrak{R}} (\cos(\phi)\sin(\theta_3)\sin(\theta_2)\sin(\theta_1))^4 (\sin(\phi)\sin(\theta_3)\sin(\theta_2)\sin(\theta_1))^3 \cdot$$

$$\cdot (\cos(\theta_3)\sin(\theta_2)\sin(\theta_1))^2 (\cos(\theta_2)\sin(\theta_1))^2 (\cos(\theta_1))^2 d\mathbf{S}^4 =$$

$$\int_{\mathfrak{R}} \cos^4(\phi)\sin^3(\phi)\cos^2(\theta_3)\sin^7(\theta_3)\cos^2(\theta_2)\sin^9(\theta_2)\cos^2(\theta_1)\sin^{11}(\theta_1) d\mathbf{S}^4 =$$

$$\int_{\mathfrak{R}} \cos^4(\phi)\sin^3(\phi)\cos^2(\theta_3)\sin^7(\theta_3)\cos^2(\theta_2)\sin^9(\theta_2)\cos^2(\theta_1)\sin^{11}(\theta_1) \cdot$$

$$\cdot \sin^3(\theta_1)\sin^2(\theta_2)\sin(\theta_3) d\phi d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 =$$

$$\int_{\mathfrak{R}} \cos^4(\phi)\sin^3(\phi)\cos^2(\theta_3)\sin^8(\theta_3)\cos^2(\theta_2)\sin^{11}(\theta_2)\cos^2(\theta_1)\sin^{14}(\theta_1)d\phi d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3$$

Si tenga presente che tutti i termini del precedente integrale assumono valori nell'intervallo $[-1, 1]$, si capisce dunque che si dovrà lavorare con numeri molto piccoli in valore assoluto.
Definiamo una regione test come:

$$\mathfrak{R}_1 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^4 : \gamma \in [\pi/3, \pi/2], \tau_3 \in [0.001, 0.7], \tau_2 \in [0.001, 0.7], \tau_1 \in [0.001, 0.7]\right\} \tag{16}$$

Se si volesse calcolare l'integrale del precedente polinomio su tale regione, il cui valore esatto è $2.190268569130004 \times 10^{-13}$, si deve considerare che la sommatoria della formula $\mathcal{Q}$ comprende 57120 termini che variano in valore assoluto da un massimo di 10^{-16} fino ad un minimo di 10^{-95}, e in casi peggiori la differenza tra i vari addendi della sommatoria può essere anche maggiore. Si osservi che sommando due tali numeri in Matlab, si ottiene la completa cancellazione del secondo:

```
>> x=10^(-16)

x =

  1.0000e-016

>> y=10^(-95)

y =

  1.0000e-095

>> z=x+y

z =

  1.0000e-016

>> norm(x-z)

ans =

     0
```

Di conseguenza aumentando il grado, l'errore di approssimazione comporterà un peggioramento delle stime.

Oltre alla precedente definiamo altre due regioni test:

$$\mathfrak{R}_2 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^4 : \gamma \in [\pi/4, 3\pi/4], \tau_3 \in [0.01, 0.65], \tau_2 \in [0.01, 0.65], \tau_1 \in [0.01, 0.65]\right\} \tag{17}$$

$$\mathfrak{R}_3 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^4 : \gamma \in [\pi/4, 7\pi/4], \tau_3 \in [0.6, 1.3], \tau_2 \in [0.6, 1.3], \tau_1 \in [0.6, 1.3]\right\} \tag{18}$$

e calcoliamo l'integrale sulle tre regioni dei quattro seguenti polinomi di diverso grado, per verificare anche come l'aumento del grado influisce sugli errori:

- primo polinomio $p_1(\mathbf{x}) = x_3 x_4^3 x_5^4$ di grado 8
  con il camio di coordinate l'integrale di tale polinomio diviene:

$$\int_{\mathfrak{R}} x_3 x_4^3 x_5^4 d\mathbf{S}^4 = \int_{\mathfrak{R}} (\cos(\theta_3)\sin(\theta_2)\sin(\theta_1))^3 (\cos(\theta_2)\sin(\theta_1))^3 \cdot$$

$$\cdot (\cos(\theta_1))^4 \sin^3(\theta_1)\sin^2(\theta_2)\sin(\theta_3) d\phi d\theta_3 d\theta_2 d\theta_1 =$$

$$\int_{\mathfrak{R}} \cos(\theta_3)\sin(\theta_3)\cos^3(\theta_2)\sin^3(\theta_2)\cos^4(\theta_1)\sin^7(\theta_1) d\phi d\theta_3 d\theta_2 d\theta_1 =$$

$$\int_{\gamma} d\phi \int_{\tau_3} \cos(\theta_3)\sin(\theta_3) d\theta_3 \int_{\tau_2} \cos^3(\theta_2)\sin^3(\theta_2) d\theta_2 \int_{\tau_1} \cos^4(\theta_1)\sin^7(\theta_1) d\theta_1$$

possiamo calcolare esplicitamente ogni singolo integrale con il calcolo simbolico di Mathematica:

$$[\phi]_{\gamma} \cdot \left[-\frac{1}{2}\cos^2(\theta_3) \right]_{\tau_3} \cdot \left[-\frac{3}{64}\cos(2\theta_2) + \frac{1}{192}\cos(6\theta_2) \right]_{\tau_2} \cdot$$

$$\cdot \left[-\frac{7\cos(\theta_1)}{512} - \frac{1}{512}\cos(3\theta_1) + \frac{11\cos(5\theta_1)}{5120} - \frac{\cos(7\theta_1)}{7168} - \frac{\cos(9\theta_1)}{3072} + \frac{\cos(11\theta_1)}{11264} \right]_{\tau_1}$$

Le soluzioni esatte di tali integrali sulle nostre tre regioni test sono:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_1 &: 6.877102537851039 * 10^{-6} \\ \mathfrak{R}_2 &: 9.77175415282563 * 10^{-6} \\ \mathfrak{R}_3 &: 1.140642041191397 * 10^{-3} \end{aligned}$$

Calcolando gli integrali con la formula sopra dimostrata (si veda l'ultimo capitolo per trovare i codici Matlab usati per i vari test) otteniamo 11880 nodi, e i seguenti risultati:

Regione	Integrale numerico	Errore assoluto	Errore relativo
$\mathfrak{R}_1$	$6.877102537850998 * 10^{-6}$	$4.06 * 10^{-20}$	$5.91 * 10^{-15}$
$\mathfrak{R}_2$	$9.771754152825726 * 10^{-6}$	$9.48 * 10^{-20}$	$9.70 * 10^{-15}$
$\mathfrak{R}_3$	$1.140642041191405 * 10^{-3}$	$7.80 * 10^{-18}$	$6.84 * 10^{-15}$

Come si vede dai risultati, gli errori assoluti dipendono ovviamente dal valore dell'integrale esatto che si intende approssimare, mentre gli errori relativi restano sempre dell'ordine della precisione di macchina 10^{-15}

- secondo polinomio $p_2(\mathbf{x}) = x_1^2 x_2^2 x_3 x_4 x_5^3$ di grado 9
  Effettuando i cambi di varibili come nel caso precedente, otteniamo:

$$\int_{\mathfrak{R}} x_1^2 x_2^2 x_3 x_4 x_5^3 d\mathbf{S}^4 =$$

$$\int_{\gamma} \cos^2(\phi)\sin^2(\phi)d\phi \int_{\tau_3} \cos(\theta_3)\sin^5(\theta_3)d\theta_3 \cdot$$

$$\cdot \int_{\tau_2} \cos(\theta_2)\sin^7(\theta_2)d\theta_2 \int_{\tau_1} \cos^3(\theta_1)\sin^9(\theta_1)d\theta_1$$

  Calcoliamo anche in questo caso l'integrale generalizzato con l'aiuto di Mathematica:

$$\left[\frac{\phi}{8} - \frac{1}{32}\sin(4\phi)\right]_{\gamma} \cdot \left[\frac{\sin^6(\theta_3)}{6}\right]_{\tau_3} \cdot \left[\frac{\sin^8(\theta_2)}{8}\right]_{\tau_2} \cdot$$

$$\cdot \left[-\frac{9\cos(2\theta_1)}{1024} + \frac{27\cos(4\theta_1)}{8192} + \frac{\cos(6\theta_1)}{6144} - \frac{3\cos(8\theta_1)}{4096} + \frac{3\cos(10\theta_1)}{10240} - \frac{\cos(12\theta_1}{24576}\right]_{\tau_1}$$

  Le soluzioni esatte sono:

$$\begin{array}{c} \mathfrak{R}_1 : 1.36584263588778 * 10^{-9} \\ \mathfrak{R}_2 : 1.655704704552359 * 10^{-9} \\ \mathfrak{R}_3 : 1.06131379058252 * 10^{-4} \end{array}$$

  e le nostre stime saranno, con 17160 nodi:

Regione	Integrale numerico	Errore assoluto	Errore relativo
$\mathfrak{R}_1$	$1.365842635887772 * 10^{-9}$	$8.06 * 10^{-24}$	$5.90 * 10^{-15}$
$\mathfrak{R}_2$	$1.655704704552349 * 10^{-9}$	$1.01 * 10^{-23}$	$6.12 * 10^{-15}$
$\mathfrak{R}_3$	$1.061313790582525 * 10^{-4}$	$5.14 * 10^{-19}$	$4.85 * 10^{-15}$

  anche in questo caso quindi otteniamo errori relativi al limite della precisione di macchina.

- terzo polinomio $p_3(\mathbf{x}) = x_1^4 x_2^3 x_3^2 x_4^2 x_5^2$ di grado 13
  Il suo integrale indefinito è :

$$\left[\frac{1}{70}\cos^5(\phi)\cdot(-9+5\cos(2\phi))\right]_{\gamma} \cdot \left[\frac{1}{30720}\cdot(840\theta_3 - 420\sin(2\theta_3)\right.$$

$$\left. -120\sin(4\theta_3) + 130\sin(6\theta_3) - 45\sin(8\theta_3) + 6\sin(10\theta_3))\right]_{\tau_3} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{1}{4612608}\cos^3(\theta_2)\cdot(-586654 + 642234\cos(2\theta_2) - 238200\cos(4\theta_2) + \right.$$

$$+60305\cos(6\theta_2) - 9450\cos(8\theta_2) + 693\cos(10\theta_2))]_{\tau_2} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{1}{55050240} \cdot (720720\theta_1 - 480480\sin(2\theta_1) + +101920\sin(6\theta_1)\right.$$

$$-76440\sin(8\theta_1) + 32928\sin(10\theta_1) - 8960\sin(12\theta_1)+$$

$$+1440\sin(14\theta_1) - 105\sin(16\theta_1))]_{\tau_1}$$

e le soluzioni esatte sulle varie regioni:

$$\mathfrak{R}_1 : 2.190268569130004 * 10^{-13}$$
$$\mathfrak{R}_2 : 3.946789748508915 * 10^{-13}$$
$$\mathfrak{R}_3 : 3.060360093430965 * 10^{-7}$$

Regione	Integrale numerico	Errore assoluto	Errore relativo
$\mathfrak{R}_1$	*int*	*errass*	*errrel*
$\mathfrak{R}_2$	*int*	*errass*	*errrel*
$\mathfrak{R}_3$	*int*	*errass*	*errrel*

Come si vede dalle tabelle, possiamo notare che già con il grado 13, gli errori relativi iniziano ad aumentare, passando dall'ordine 10^{-15} dei precedenti esempi all'ordine 10^{-14}.

- quarto polinomio METTERE UN POLINOMIO DI GRADO ALTO DOVE GLI ERRORI AUMENTANO E NON SI RIESCE AD APPROSSIMARE

$$\mathfrak{R}_1 : intesatto$$
$$\mathfrak{R}_2 : intesatto$$
$$\mathfrak{R}_3 : intesatto$$

Regione	Integrale numerico	Errore assoluto	Errore relativo
$\mathfrak{R}_1$	*int*	*errass*	*errrel*
$\mathfrak{R}_2$	*int*	*errass*	*errrel*
$\mathfrak{R}_3$	*int*	*errass*	*errrel*

7 Esempi e paragoni su $\mathbb{S}^2$

Creiamo alcuni esempi su $\mathbb{S}^2$ in modo tale da poter disegnare i punti e capire come si dispongono sulla regione, e paragoniamoli ai punti descritti in [11] e [12] (QUELLI CON MAX DETERMINANTE O MEGLIO PRENDERE ALTRI???) che massimizzino il determinante della matrice di interpolazione. Tali punti possono essere trovati in http://web.maths.unsw.edu.au/∼rsw/Sphere/. Essi sono stati calcolati per interpolare e integrare un polinomio di grado n definito su tutta la sfera, mentre in molte applicazioni pratiche può risultare utile calcolare integrali su particolari regioni della sfera, si ricordi a titolo di esempio che la sfera può essere considerata come una approssimazione del pianeta Terra, da cui può risultare utile una descrizione delle regioni in termini di meridiani e paralleli, come abbiamo utilizzato nelle formule descritte.

Se si volesse calcolare un polinomio definito in una particolare regione con i punti in [12], si deve considerare

$$\tilde{p}(\mathbf{x}) = \chi_{\mathfrak{R}}(\mathbf{x}) \cdot p(\mathbf{x})$$

dove con $\chi_{\mathfrak{R}}$ indichiamo la funzione indicatrice della regione $\mathfrak{R}$

$$\chi_{\mathfrak{R}}(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1 & se \quad \mathbf{x} \in \mathfrak{R} \\ 0 & se \quad \mathbf{x} \notin \mathfrak{R} \end{cases}$$

Considerare $\tilde{p}(\mathbf{x})$ equivale a valutare $p(\mathbf{x})$ eliminando i punti della formula di quadratura non appartenenti alla regione $\mathfrak{R}$. In questo modo ovviamente non potremo aspettarci l'esattezza della formula per i polinomi su $\mathfrak{R}$, dato che tali polinomi si traducono in una funzione discontinua su $\mathbb{S}^2$, e andremo a paragonare l'errore con la nostra formula esatta per tali regioni. Come nella sezione precedente faremo esperimenti sui monomi.

8 Commenti sulla costruzione del codice Matlab

9 Codici di Matlab e di Mathematica usati

Per i calcoli simbolici e il calcolo di integrali esatti ci siamo riferiti alle seguenti funzioni di Mathematica:

```
Integrate[f,x]
gives the indefinite integral of f in dx
```

```
Integrate[f,{x,x_min,x_max}]
gives the definite integral of f in dx from x_min to x_max
```

```
Simplify[expr]
performs a sequence of algebraic and other transformations on expr,
and returns the simplest form it finds
```

```
ScientificForm[expr]
prints with all real numbers in expr given in scientific notation
```

```
ScientificForm[expr,n]
prints with numbers given to n-digit precision
```

Riferimenti bibliografici

[1] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables,. *Dover Publications, New York*, 1972.

[2] Kendall Atkinson and Weimin Han. Spherical harmonics and approximations on the unit sphere: An introduction,. *Springer*.

[3] Len Bos and Marco Vianello. Subperiodic trigonometric interpolation and quadrature,. *Appl. Math. Comput.*, **218**:10630–10638, 2012.

[4] Gaspare Da Fies and Marco Vianello. Algebraic cubature on planar lenses and bubbles,. *Dolomites Res. Notes Approx. DRNA*, **5**:7–12, 2012.

[5] Gaspare Da Fies and Marco Vianello. Trigonometric gaussian quadrature on subintervals of the period,. *Electron. Trans. Numer. Anal.*, **39**:102–112, 2012.

[6] Gaspare Da Fies and Marco Vianello. On the lebesgue constant of subperiodic trigonometric interpolation,. to appear.

[7] Alvise Sommariva Gaspare Da Fies and Marco Vianello. Algebraic cubature by linear blending of elliptical arcs,. *Adv. Comput. Math.*, submitted.

[8] Walter Gautschi. Orthogonal polynomials: Computation and approximation,. *Oxford University Press, New York*, 2004.

[9] Kerstin Hesse and Robert S. Womersley. Numerical integration with polynomial exactness over a spherical cap,. *Adv. Comput. Math.*, **36**:451–483, 2012.

[10] A. Markov. On a problem of d.i. mendeleev,. *Selected Works (in Russian), GITTL, Moscow-Leningrad*, 1948.

[11] Ian H. Sloan and Robert S. Womersley. n, how good can polynomial interpolation on the sphere be?,. *Advances in Computational Mathematics*, **14**:195–226, 2001.

[12] Ian H. Sloan and Robert S. Womersley. Extremal systems of points and numerical integration on the sphere,. *Advances in Computational Mathematics*, **21**:102–125, 2004.

[13] Gabor Szego. Orthogonal polynomials,. *American Mathematical Society Colloquium Publications*, **23**, 1939.