UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
Facoltá di Scienze MM. FF. NN.
Dipartimento di Matematica Pura e Applicata
tesi di
Laurea Magistrale in Matematica

???integrazione numerica sulla sfera

Relatore: Ch.mo Dott. Alvise Sommariva
Correlatore: ???

Laureando: Mariano Gentile

a.a. 2011/2012

Sommario

Fare l'Abstract

Indice

1 Introduzione **4**

2 Notazioni **5**

3 Costruzione di formule di integrazione numerica su triangoli e quadrati non standard in $\mathbb{S}^d$ **9**

4 Stime sui pesi di una formula di integrazione su $\mathbb{S}^d$ MODIFICARE MEGLIO **15**

1 Introduzione

Nelle seguenti pagine ci occuperemo dell'integrazione numerica sulla sfera (unitaria) $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$

$$\mathbb{S}^d := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d+1} : \|\mathbf{x}\| = 1\}$$

dove con $\|\cdot\|$ intendiamo la norma Euclidea in $\mathbb{R}^{d+1}$, con particolare interesse al caso $d = 2$. Recentemente questo argomento è stato oggetto di vari sviluppi, come ad esempio in [8] (inserire bibliografia), che comprendono l'integrazione su tutta la sfera o su particolari regioni di essa. Ci proponiamo di continuare questi sviluppi e di ampliarli ad altri tipi di regioni, in particolare parti di calotte sferiche come nel seguito specificheremo, o regioni delimitate da paralleli e meridiani.

Nel seguito saranno date formule di integrazione esatte per polinomi sferici di grado $\leq n$ su regioni di $\mathbb{S}^d$ ove useremo il prodotto tensoriale e le formule di integrazione uno-dimensionali per polinomi trigonometrici su sottointervalli di $[0, 2\pi]$ studiate in [2] [3] [4] [5] [6] (inserire bibliografia).

Saranno mostrati esempi pratici in $\mathbb{S}^2$ elaborati in Matlab, e alla fine saranno messi a disposizione tutti i codici utilizzati.

Analizzeremo inoltre alcune considerazioni teoriche per una generica formula di integrazione che si pretende sia esatta per polinomi di grado $\leq n$ su $\mathbb{S}^d$.

2 Notazioni

Per tutto il seguito del lavoro considereremo $\|\mathbf{x}\|$ la normale distanza Euclidea in $\mathbb{R}^{d+1}$ mentre utilizzeremo $dist(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in [0,\pi]$ per denotare la distanza geodetica tra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sulla sfera, definita come $dist(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \arccos(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})$, ove definiamo con $\cdot$ il normale prodotto interno in $\mathbb{R}^{d+1}$.
Nel seguito useremo due parametrizzazioni classiche della sfera a seconda di quale risulterà più comoda da caso a caso:

- La prima parametrizzazione sara' data dalle normali *coordinate ipersferiche*, e prevede l'utilizzo di un angolo $\phi \in [0,2\pi]$ e angoli $\theta_i \in [0,\pi]$ tali che

$$\mathbf{x}_1 = \cos(\phi)\sin(\theta_{d-2})\ldots\sin(\theta_1) \tag{1}$$

$$\mathbf{x}_2 = \sin(\phi)\sin(\theta_{d-2})\ldots\sin(\theta_1)$$

$$\mathbf{x}_3 = \cos(\theta_{d-2})\sin(\theta_{d-3})\ldots\sin(\theta_1)$$

$$\mathbf{x}_4 = \cos(\theta_{d-3})\sin(\theta_3)\ldots\sin(\theta_1)$$

$$\ldots$$

$$\mathbf{x}_{d-1} = \cos(\theta_2)\sin(\theta_1)$$

$$\mathbf{x}_d = \cos(\theta_1)$$

  il cui elemento di volume è $\sin^{d-2}(\theta_1)\sin^{d-3}(\theta_2)\ldots\sin(\theta_{d-2})$.

- La seconda parametrizzazione prevede di sostituire $\cos(\theta_1) = t$ e di conseguenza $\sin(\theta_1) = \sqrt{1-t^2}$. Tale parametrizzazione prevede il seguente cambio nell'integrale

$$\int_{\mathbb{S}^d} d\mathbf{S}^d(\mathbf{x}) = |\mathbb{S}^{d-1}| \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\frac{d-2}{2}}\, dt \tag{2}$$

  ove abbiamo denotato $d\mathbf{S}^d(\mathbf{x})$ l'elemento di superficie di $\mathbb{S}^d$ e con $|\mathbb{S}^{d-1}|$ l'area della superficie di $\mathbb{S}^{d-1}$.
  In entrambi i casi denoteremo con $\mathbf{z}$ il polo Nord della sfera, ossia il punto, in coordinate cartesiane, $\mathbf{z} = (0,0,\ldots,0,1)$.

Definiamo subito la cupola di una sfera, denotata con $\mathfrak{C}(\mathbf{x},\gamma)$ come:

$$\mathfrak{C}(\mathbf{x},\gamma) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{S}^d : \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \geq \cos\gamma\}$$

E come è facile osservare, utilizzando le coordinate in (2) e centrando la cupola al polo Nord, possiamo scrivere:

$$\mathfrak{C}(\mathbf{z},\gamma) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^d : \mathbf{x}_{d+1} \geq \cos\gamma\}$$

Definiamo inoltre la *parte di cupola* in $\mathbb{S}^d$, che chiameremo anche *triangolo non standard*, per differenziarla dal classico triangolo sferico formato da geodetiche, nelle coordinate in (1) come:

$$\mathfrak{P}_{\gamma,\tau_1,\ldots,\tau_{d-1}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^d : \theta_i \leq \tau_i, \phi \leq \gamma\}$$

e analogamente la seguente regione che diremo *quadrato non standard*:

$$\mathfrak{R}_{\gamma_s,\gamma_f,\tau_{1,s},\tau_{1,f},\ldots,\tau_{d-1,s},\tau_{d-1,f}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^d : \tau_{i,s} \leq \theta_i \leq \tau_{i,f}, \gamma_s \leq \phi \leq \gamma_f\}$$

di cui la parte di cupola è un caso particolare con $\gamma_s = 0, \tau_{i,s} = 0$. Intuitivamente tale regione $\mathfrak{R}_{\gamma_s,\gamma_f,\tau_s,\tau_f}$ in $\mathbb{S}^2$ non è altro che la regione di sfera racchiusa tra due paralleli e due meridiani, nelle usuali coordinate geografiche con latitudine e longitudine.

Osserviamo che è possibile ruotare la sfera senza influire sull'esattezza di una formula di integrazione, utile soprattutto perchè possiamo concentrare la nostra analisi a cupole e parti di cupole centrandole nel polo Nord, senza alcuna perdita di generalità . In particolare enunciamo il seguente:

Lemma - GENERALIZZO A PARTI DI CUPOLE MODIFICANDO LA DIMOSTRAZIONE? RISULTATO OVVIO SENZA PARTICOLARI CAMBIAMENTI

Sia $\mathfrak{C}(\mathbf{z},\gamma) \subset \mathbb{S}^d$ la cupola di centro $\mathbf{z}$, il polo Nord, e raggio $\gamma \in (0,\pi)$. Consideriamo la seguente formula:

$$\mathcal{Q}_{\mathfrak{C}(\mathbf{z},\gamma)}(f) := \sum_{j=1}^{N} \lambda_j f(\mathbf{x}_j)$$

dove f sia una funzione continua in $\mathfrak{C}(\mathbf{z},\gamma)$, i nodi $\mathbf{x}_i \in \mathfrak{C}(\mathbf{z},\gamma)$, i pesi $\lambda_i \in \mathbb{R}$ e sia la formula esatta per l'integrazione in $\mathbb{P}_n(\mathfrak{C}(\mathbf{z},\gamma))$, spazio dei polinomi di grado al più n definiti su $\mathfrak{C}(\mathbf{z},\gamma)$. Sia $\mathfrak{C}(\mathbf{z}^*,\gamma) \subset \mathbb{S}^d$ un'altra cupola di centro $\mathbf{z}^*$ e stesso raggio γ, e sia $\mathbf{A}$ una rotazione in $\mathbb{R}^{d+1}$ tale che $\mathbf{z}^* = \mathbf{A}\mathbf{z}$. Allora la seguente formula

$$\mathcal{Q}_{\mathfrak{C}(\mathbf{z}^*,\gamma)}(f) := \sum_{j=1}^{N} \lambda_j f(\mathbf{A}\mathbf{x}_j)$$

con f funzione continua in $\mathfrak{C}(\mathbf{z}^*, \gamma)$ e i nodi $\mathbf{A}\mathbf{x}_i \in \mathfrak{C}(\mathbf{z}^*, \gamma)$, è esatta su $\mathbb{P}_n(\mathfrak{C}(\mathbf{z}^*, \gamma))$.

Dimostrazione
Vedere il Lemma 3.1 in [8]. $\square$

Sia ora $[a, b]$ generico intervallo sulla retta reale, denoteremo con $\mathbb{P}_n([a, b])$ lo spazio dei polinomi di grado $\leq n$ in una variabile, definiti su tale intervallo. Definiamo allora lo spazio $\mathbb{P}_n(\mathbb{S}^d)$ dei *polinomi sferici* su $\mathbb{S}^d$ come lo spazio dei polinomi in $\mathbb{R}^{d+1}$ ristretti alla sfera $\mathbb{S}^d$ di grado $\leq n$.

La restrizione di un polinomio omogeneo armonico su $\mathbb{R}^{d+1}$ di grado k sulla sfera $\mathbb{S}^d$ è detta *armonica sferica di grado k*, e lo spazio di tali armoniche sferiche di grado k sarà denotato con $\mathbb{H}_k(\mathbb{S}^d)$ (si veda ad esempio [8] o per maggiori approfondimenti si guardi [1]). (inserire bibliografia) Tale spazio ha dimensione $\mathbf{Z}(d, k)$ data da:

$$\mathbf{Z}(d, 0) := 1$$

$$\mathbf{Z}(d, k) := \frac{(2k + d - 1)\Gamma(k + d - 1)}{\Gamma(d)\Gamma(k + 1)}, k \in \mathbb{N}$$

Le armoniche sferiche di gradi differenti sono mutualmente ortogonali, di conseguenza lo spazio $\mathbb{P}_n(\mathbb{S}^d)$ può essere rappresentato come somma diretta $\bigoplus_{k=0}^{n} \mathbb{H}_k(\mathbb{S}^d)$ e quindi la sua dimensione sarà :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbf{Z}(d, k) = \frac{(2n + d)\Gamma(n + d)}{\Gamma(d + 1)\Gamma(n + 1)} = \mathbf{Z}(d + 1, n) \sim (n + 1)^d$$

Fissati $\alpha, \beta > -1$, sia $\mathbf{P}_k^{(\alpha,\beta)}$ il *polinomio di Jacobi* di grado k e indici α, β (se $\alpha, \beta = 0$ il polinomio di Jacobi viene detto *polinomio di Legendre*) si guardi [1] o [7] per maggiori dettagli su tali polinomi (inserire bibliografia). Due dei tanti modi di scrivere i polinomi di Jacobi, con $k \in \mathbb{N}_0$ sono i seguenti:

$$\mathbf{P}_k^{(\alpha,\beta)}(t) := \frac{(-1)^k}{2^k k!}(1 - t)^{-\alpha}(1 + t)^{-\beta} \frac{d^k}{dt^k} \left[(1 - t)^{\alpha+k}(1 + t)^{\beta+k}\right] =$$

$$= \sum_{s=0}^{k} \binom{n+\alpha}{s} \binom{n+\beta}{n-s} \left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-s} \left(\frac{x+1}{2}\right)^{s}$$

I polinomi di Jacobi sono caratterizzati dall'essere un insieme completo di polinomi ortogonali nell'intervallo $[-1,1]$ rispetto al seguente prodotto scalare pesato:

$$(f,g)_{\mathbf{L}_2^{(\alpha,\beta)}([-1,1])} := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}dt$$

Inoltre possiamo normalizzare tali polinomi in modo che valga:

$$\mathbf{P}_k^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)}$$

Siano ora $\{\mathbf{Y}_{k,1}^d, \mathbf{Y}_{k,2}^d, \dots \mathbf{Y}_{k,\mathbf{Z}(d,k)}^d\}$ una base ortonormale di $\mathbb{H}_k(\mathbb{S}^d)$ rispetto al prodotto interno di $\mathbf{L}_2(\mathbb{S}^d)$. Per tale base vale il *addition theorem* (vedi [1] Teorema 2.9 (inserire bibliografia)):

$$\sum_{i=1}^{\mathbf{Z}(d,k)} \mathbf{Y}_{k,i}^d(\mathbf{x})\mathbf{Y}_{k,i}^d(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{Z}(d,k)}{|\mathbb{S}^d|} \frac{\mathbf{P}_k^{((d-2)/2,(d-2)/2)}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})}{\mathbf{P}_k^{((d-2)/2,(d-2)/2)}(1)}, \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{S}^d$$

Inoltre lo spazio $\mathbb{H}_k(\mathbb{S}^d)$ è un *reproducing kernel Hilbert space* (??? come si dice in italiano) con reproducing kernel $\mathbf{K}_k^d : \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}$:

$$\mathbf{K}_k^d := \sum_{i=1}^{\mathbf{Z}(d,k)} \mathbf{Y}_{k,i}^d(\mathbf{x})\mathbf{Y}_{k,i}^d(\mathbf{y})$$

Una funzione reproducing kernel possiede due importanti proprietà :

$$\mathbf{K}_k^d(\cdot,\mathbf{y}) \in \mathbb{H}_k(\mathbb{S}^d), \forall \mathbf{y} \in \mathbb{S}^d$$
$$\left(g, \mathbf{K}_k^d(\cdot,\mathbf{y})\right)_{\mathbf{L}_2(\mathbb{S}^d)} = g(\mathbf{y}), \forall g \in \mathbb{H}_k(\mathbb{S}^d), \forall \mathbf{y} \in \mathbb{S}^d$$

Anche lo spazio dei polinomi $\mathbb{P}_n(\mathbf{S}^d)$ è un reproducing kernel Hilbert space con la seguente funzione $\mathbf{G}_n^d : \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}$:

$$\mathbf{G}_n^d(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{\mathbf{Z}(d,k)} \mathbf{Y}_{k,i}^d(\mathbf{x})\mathbf{Y}_{k,i}^d(\mathbf{y}) = \frac{1}{|\mathbb{S}^d|} \frac{\Gamma(d/2)\Gamma(n+d)}{\Gamma(d)\Gamma(n+d/2)} \mathbf{P}_n^{(d/2,(d-2)/2)}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) \tag{3}$$

Quindi anche $\mathbf{G}_n^d$ possiede le due proprietà di reproducing kernel:

$$\mathbf{G}_n^d(\cdot,\mathbf{y}) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{S}^d), \forall \mathbf{y} \in \mathbb{S}^d \tag{4}$$
$$\left(p, \mathbf{G}_n^d(\cdot,\mathbf{y})\right)_{\mathbf{L}_2(\mathbb{S}^d)} = p(\mathbf{y}), \forall p \in \mathbb{P}_n(\mathbb{S}^d), \forall \mathbf{y} \in \mathbb{S}^d$$

Altre nozioni sulla sfera e sulle armoniche sferiche si possono trovare in [1] e [7].(inserire bibliografia)

3 Costruzione di formule di integrazione numerica su triangoli e quadrati non standard in $\mathbb{S}^d$

La teoria sui polinomi di Legendre che analizzeremo può essere trovata in [1]. Ci interesseremo di alcune importanti proprietà dei polinomi di Legendre, sopra definiti.

Definiamo come prima cosa la *Associated Legendre Functions.* Come per i polinomi di Legendre e di Jacobi, anche la funzione associata di Legendre può essere scritta in vari modi, quello che ci interesserà maggiormente per i calcoli che faremo sarà il seguente, per $d \geq 3$:

$$\mathbf{P}_{n,d,m}(t) = \frac{(n+d-3)!}{(n+m+d-3)!}(1-t^2)^{\frac{m}{2}}\mathbf{P}_{n,d}^{(m)}(t), t \in [-1,1] \tag{5}$$

Nella notazione $\mathbf{P}_{n,d}^{(m)}(t)$ indica il polinomio di Legendre, i cui pedici indicano rispettivamente il grado del polinomio e la dimensione dello spazio su cui è definito, mentre l'apice tra parentesi indica la derivata di grado m. Si faccia attenzione al fatto che il pedice d di $\mathbf{P}_{n,d,m}$ si riferisce allo spazio $\mathbb{R}^d$ mentre l'apice d di $\mathbf{Y}_{k,m}^d$ si riferisce alla sfera $\mathbb{S}^d$.

Si noti che $\mathbf{P}_{n,d,m}(t)$ è un polinomio solo per m pari, ma può diventare un polinomio trigonometrico con la sostituzione $t = \cos(\theta)$ e $(1-t^2)^{m/2} = \sin^m(\theta)$, come vedremo in seguito.

Per $d = 3$ si parla anche del *polinomio di Legendre standard*. Scriviamo chi è precisamente il polinomio di Legendre:

$$\mathbf{P}_{n,d}(t) = n!\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}(-1)^k\frac{(1-t^2)^k t^{n-2k}}{4^k k!(n-2k)!\Gamma(k+\frac{d-1}{2})} \tag{6}$$

Definiamo infine la *Normalized Associated Legendre Functions*:

$$\widetilde{\mathbf{P}}_{n,d,m}(t) = \frac{(n+d-3)!}{n!\Gamma(\frac{d-1}{2})}\left[\frac{(2n+d-2)(n-m)!}{2^{d-2}(n+d+m-3)!}\right]^{1/2}(1-t^2)^{m/2}\mathbf{P}_{n,d}^{(m)}(t), t \in [-1,1] \tag{7}$$

dove con $\mathbf{P}_{n,d}^{(m)}$ indichiamo la derivata di grado m di $\mathbf{P}_{n,d}$. Enunciamo ora un risultato fondamentale per i nostri scopi, discendente direttamente da [1], Teorema 2.47.

Teorema

Sia $\{\mathbf{Y}_{k,j}^{d-1} : 1 \leq j \leq \mathbf{Z}(d-1,k)\}$ una base ortonormale per $\mathbb{H}_k(\mathbb{S}^{d-1})$, con $0 \leq k \leq n$, allora

$$\left\{\widetilde{\mathbf{P}}_{n,d+1,m}(t)\mathbf{Y}_{k,j}^{d-1}(\xi_{d-1}) : 1 \leq j \leq \mathbf{Z}(d-1,k), 0 \leq m \leq n\right\} \tag{8}$$

con $\xi_{d-1} \in \mathbb{S}^{d-1}$, e $\xi_d = t\mathbf{e}_d + \sqrt{1-t^2}(\xi_{d-1}, 0)^T \in \mathbb{S}^d$, è una base ortonormale per $\mathbb{H}_k(\mathbb{S}^d)$.

Prima di esporre il risultato principale di questo capitolo, annotiamo una osservazione nel seguente:

Lemma

Dato un numero $\sin^{n_1}(\theta)\cos^{n_2}(\theta)$, è possibile riscriverlo come sommatoria di termini del tipo:

$$c_1 \sin(a_1\theta) + c_2 \cos(a_2\theta)$$

dove c_1, c_2 sono costanti che possono eventualmente annullarsi o essere negative e inoltre $a_1, a_2 \leq n_1 + n_2$.

Dimostrazione
Esistono le seguenti formule per calcolare la potenza di sin e cos.

- Per n pari:

$$\cos^n(\theta) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{n/2} + \frac{2}{2^n}\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\binom{n}{k}\cos((n-2k)\theta)$$

$$\sin^n(\theta) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{n/2} + \frac{2}{2^n}\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}(-1)^{\frac{n}{2}-k}\binom{n}{k}\cos((n-2k)\theta)$$

- E per n dispari:

$$\cos^n(\theta) = \frac{2}{2^n}\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{k}\cos((n-2k)\theta)$$

$$\sin^n(\theta) = \frac{2}{2^n}\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^{\frac{n-1}{2}-k}\binom{n}{k}\sin((n-2k)\theta)$$

Siamo quindi in grado di ottenere una sommatoria di termini del tipo (tutti i termini si intendono moltiplicati per opportune costanti che non scriveremo per brevità):

$$\begin{array}{rrrrcr} n_1 & pari, & n_2 & dispari & : & \cos(m_1\theta)\cos(m_2\theta)+\cos(m_2\theta) \\ n_1 & pari, & n_2 & pari & : & \cos(m_1\theta)+\cos(m_2\theta)+\cos(m_1\theta)\cos(m_2\theta) \\ n_1 & dispari, & n_2 & dispari & : & \sin(m_1\theta)\cos(m_2\theta) \\ n_1 & dispari, & n_2 & pari & : & \sin(m_1\theta)+\sin(m_1\theta)\cos(m_2\theta) \end{array}$$

E possiamo notare che $m_1 \leq n_1$, $m_2 \leq n_2$.
Per effettuare l'ultimo passaggio occorre ricordare le seguenti formule trigonometriche:

$$\cos(\theta)\cos(\phi) = \frac{\cos(\theta-\phi)+\cos(\theta+\phi)}{2}$$
$$\sin(\theta)\cos(\phi) = \frac{\sin(\theta-\phi)+\sin(\theta+\phi)}{2}$$

Come ultima cosa osserviamo ancora le seguenti identità $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ e $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$,e otteniamo infine una sommatoria di termini del tipo $\sin(a_1)$, $\cos(a_2)$ dove $a_1, a_2 \leq n_1 + n_2$. $\square$

Richiamiamo ora la formula uno-dimensionale esatta per lo spazio

$$\mathbb{T}_n([-\omega,\omega]) = span\{1, \sin(k\theta), \cos(k\theta) : 1 \leq k \leq n, \theta \in [-\omega,\omega]\}$$

definita negli articoli [2] [3] [4] [5] [6].

Proposizione

Siano $(\xi_j, \lambda_j)_{1\leq j\leq n+1}$ i nodi e i pesi (positivi) della formula di quadratura algebrica Gaussiana relativa alla funzione peso:

$$\omega(x) = \frac{2\sin(\omega/2)}{\sqrt{1-\sin^2(\omega/2)x^2}}, x \in (-1,1)$$

Allora

$$\int_{-\omega}^{\omega} f(\theta)d\theta = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j f(\phi_j), f \in \mathbb{T}_n([-\omega,\omega]), 0 \leq \omega \leq \pi$$

dove

$$\phi_j = 2\arcsin(\sin(\omega/2)\xi_j) \in (-\omega,\omega), j = 1,2,\ldots,n+1$$

Siamo ora in grado di esporre il seguente:

Teorema

Sia $p \in \mathbb{P}_n(\mathfrak{R})$ (oppure $p \in \mathbb{P}_n(\mathfrak{P})$) in $\mathbb{S}^d$ allora la seguente formula di integrazione è esatta:

$$\mathcal{Q}_{\mathfrak{R}}(p) = \sum_{j_1=1}^{n+1+(d-1)} \sum_{j_2=1}^{n+1+(d-2)} \cdots \sum_{j_{d-1}=1}^{n+1+1} \sum_{j_d=1}^{n+1} \lambda_{j_1 \dots j_d} p(\xi_{j_1,\dots,j_d}) \tag{9}$$

con $(n+d)\dots(n+1) = \frac{(n+d)!}{n!}$ punti, ove i pesi sono definiti come

$$\lambda_{j_1 \dots j_d} = \lambda_{j_1} \dots \lambda_{j_d} \sin^{d-1}(\theta_{1,j_1}) \sin^{d-2}(\theta_{2,j_2}) \dots \sin(\theta_{d-1,j_{d-1}})$$

e i λ_{j_i} sono i pesi della formula di quadratura Gaussiana subperiodica definita nella proposizione precedente di grado rispettivamente $n+(d-1)$, $n+(d-2)$,..., n, per gli intervalli $[\tau_{i,s}, \tau_{i,f}]$ e $[\gamma_s, \gamma_f]$ definiti in $\mathfrak{R}$ (o $[0, \tau_i]$ e $[0, \gamma]$ se ci riferiamo a $\mathfrak{P}$), e i nodi definiti con le coordinate in (1):

$$\xi_{j_1,\dots,j_d} = \xi(\theta_{1,j_1}, \theta_{2,j_2}, \dots, \theta_{d-1,j_{d-1}}, \phi_{j_d})$$

dove i singoli angoli sono i nodi della formula di quadratura Gaussiana subperiodica per gli intervalli sopra citati.

Dimostrazione
Procediamo per induzione su d.

$\mathbb{S}^1$, il cerchio.
In questo caso non dobbiamo far altro che applicare la formula di quadratura nel caso uno-dimensionale, la cui esattezza è dimostrata in [4] oppure in [3], per lo spazio:

$$\mathbb{T}_n([\alpha, \beta]) = span\{1, \sin(k\theta), \cos(k\theta) : 1 \leq k \leq n, \theta \in [\alpha, \beta]\}$$

$\mathbb{S}^2$, la sfera.
Consideriamo il caso più generale di $\mathbb{P}_n(\mathfrak{R})$ con intervalli $[\tau_s, \tau_f]$ $[\gamma_s, \gamma_f]$ e dimostriamo che la formula è esatta per una base dello spazio delle armoniche sferiche, ad esempio [1] pp.$133-134$:

$$\mathbf{Y}^2_{n,1}(\xi) = c_{n,1} \mathbf{P}_n(\cos(\theta))$$

$$\mathbf{Y}^2_{n,2m}(\xi) = c_{n,m} \mathbf{P}_{n,3,m}(\cos(\theta)) \cos(m\phi)$$

$$\mathbf{Y}^2_{n,2m+1}(\xi) = c_{n,m} \mathbf{P}_{n,3,m}(\cos(\theta)) \sin(m\phi), m = 1, \dots, n$$

ove i $c_n, c_{n,m}$ sono opportune costanti.
Avremo quindi:

$$\mathcal{Q}_{\mathfrak{R}}(\mathbf{Y}^2_{n,1}(\xi)) = c_{n,1} \sum_{j_1=1}^{n+1+1} \sum_{j_2=1}^{n+1} \lambda_{j_1}\lambda_{j_2} \sin(\theta_{j_1})\mathbf{P}_n(\cos(\theta_{j_1})) =$$

$$c_{n,1} \sum_{j_2=1}^{n+1} \lambda_{j_2} \sum_{j_1=1}^{n+1+1} \lambda_{j_1} \sin(\theta_{j_1})\mathbf{P}_n(\cos(\theta_{j_1})) = c_{n,1} \int_{\gamma_s}^{\gamma_f} d\phi \int_{\tau_s}^{\tau_f} \sin(\theta)\mathbf{P}_n(\cos(\theta))d\theta =$$

$$\int_{\tau_s}^{\tau_f} \int_{\gamma_s}^{\gamma_f} \sin(\theta)\mathbf{Y}^2_{n,1}(\xi(\theta,\phi))d\phi d\theta = \int_{\tau_s}^{\tau_f} \int_{\gamma_s}^{\gamma_f} \mathbf{Y}^2_{n,1}(\xi)d\mathbf{S}^2$$

dove si usa il Lemma precedente per giustificare l'esattezza della formula unidimensionale.
Continuando con le altre basi si ha:

$$\mathcal{Q}_{\mathfrak{R}}(\mathbf{Y}^2_{n,2m}(\xi)) = c_{n,m} \sum_{j_1=1}^{n+1+1} \sum_{j_2=1}^{n+1} \lambda_{j_1}\lambda_{j_2} \sin(\theta_{j_1})\mathbf{P}_{n,3,m}(\cos(\theta_{j_1}))\cos(m\phi_{j_2}) =$$

$$c_{n,m} \sum_{j_1=1}^{n+1+1} \lambda_{j_1} \sin(\theta_{j_1})\mathbf{P}_{n,3,m}(\cos(\theta_{j_1})) \sum_{j_2=1}^{n+1} \lambda_{j_2} \cos(m\phi_{j_2})$$

Riguardando definizione di $\mathbf{P}_{n,3,m}(\cos(\theta))$ e notando che $(1-t^2)^{j/2}$ si riduce in questo caso a $\sin(\theta)^j$, possiamo applicare il Lemma sopra esposto per ottenere un polinomio trigonometrico riconducibile ad una somma di termini $\sin(a\theta)$ e $\cos(b\theta)$ con $a, b \leq n$. Quindi otteniamo un polinomio trigonometrico appartenente allo spazio prodotto-tensore $\mathbb{T}_{n+1}([\tau_s,\tau_f]) \bigotimes \mathbb{T}_n([\gamma_s,\gamma_f])$ per il quale le formule Gaussiane (sub)trigonometriche sono esatte. Continuando:

$$c_{n,m} \sum_{j_1=1}^{n+1+1} \lambda_{j_1} \sin(\theta_{j_1})\mathbf{P}_{n,3,m}(\cos(\theta_{j_1})) \sum_{j_2=1}^{n+1} \lambda_{j_2} \cos(m\phi_{j_2}) =$$

$$c_{n,m} \int_{\tau_s}^{\tau_f} \sin(\theta)\mathbf{P}_{n,3,m}(\cos(\theta))d\theta \int_{\gamma_s}^{\gamma_f} \cos(m\phi_{j_2})d\phi =$$

$$\int_{\gamma_s}^{\gamma_f} \int_{\tau_s}^{\tau_f} \sin(\theta)\mathbf{Y}^2_{n,2m}(\xi(\theta,\phi))d\theta d\phi = \int_{\gamma_s}^{\gamma_f} \int_{\tau_s}^{\tau_f} \mathbf{Y}^2_{n,2m}(\xi)d\mathbf{S}^2$$

Ragionamento analogo con $\mathbf{Y}^2_{n,2m+1}(\xi)$.

$\mathbb{S}^d$, passo induttivo.
Sia $\mathfrak{R}$ la regione definita dagli intervalli $[\tau_{i,s},\tau_{i,f}]$ e $[\gamma_s,\gamma_f]$ e sia $\mathcal{Q}^-_{\mathfrak{R}^-}$ la formula

costruita come sopra descritto per $\mathbb{S}^{d-1}$, esatta per $\{\mathbf{Y}_{k,j}^{d-1} : 1 \leq j \leq \mathbf{Z}(d-1,k)\}$. Abbiamo già visto che una base per $\mathbb{S}^d$ è la seguente:

$$\left\{\widetilde{\mathbf{P}}_{n,d+1,m}(\cos(\theta_1))\mathbf{Y}_{k,j}^{d-1}(\xi(\theta_2,\ldots,\theta_{d-1},\phi)) : 1 \leq j \leq \mathbf{Z}(d-1,k), 0 \leq m \leq n\right\}$$

Effettuando i ragionamenti sopra esposti per un generico elemento della base avremo:

$$\int_{\tau_{1,s}}^{\tau_{1,f}} \cdots \int_{\tau_{d-1,s}}^{\tau_{d-1,f}} \int_{\gamma_s}^{\gamma_f} \widetilde{\mathbf{P}}_{n,d+1,m}(\cos(\theta_1))\mathbf{Y}_{k,j}^{d-1}(\xi(\theta_2,\ldots,\theta_{d-1},\phi))d\mathbf{S}^d =$$

$$\int_{\tau_{2,s}}^{\tau_{2,f}} \cdots \int_{\gamma_s}^{\gamma_f} \mathbf{Y}_{k,j}^{d-1}(\xi(\theta_2,\ldots,\theta_{d-1},\phi))d\mathbf{S}^{d-1} \int_{\tau_{1,s}}^{\tau_{1,f}} \sin^{d-1}(\theta_1)\widetilde{\mathbf{P}}_{n,d+1,m}(\cos(\theta_1))d\theta_1 =$$

$$\mathcal{Q}_{\mathfrak{R}^-}^-(\mathbf{Y}_{k,j}^{d-1}(\xi)) \int_{\tau_{1,s}}^{\tau_{1,f}} \sin^{d-1}(\theta_1)\widetilde{\mathbf{P}}_{n,d+1,m}(\cos(\theta_1))d\theta_1 =$$

$$\mathcal{Q}_{\mathfrak{R}^-}^-(\mathbf{Y}_{k,j}^{d-1}(\xi)) \sum_{j_1=1}^{n+1+d-1} \lambda_{j_1} \sin^{d-1}(\theta_{j_1})\widetilde{\mathbf{P}}_{n,d+1,m}(\cos(\theta_{j_1})) = \mathcal{Q}_{\mathfrak{R}}(\mathbf{Y}_{k,j}^{d}(\xi))$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo usato il Lemma analogamente al caso $\mathbb{S}^2$.
$\square$

4 Stime sui pesi di una formula di integrazione su $\mathbb{S}^d$ MODIFICARE MEGLIO

Quello che faremo in questa sezione sarà allargare il Teorema 6.1 in [8], scritto per cupole $\mathfrak{C}$, a regioni qualsiasi di $\mathbb{S}^d$, quindi comprendendo anche i nostri casi $\mathfrak{P}$ e $\mathfrak{R}$, trovando una stima di regolarità per i pesi di una generica formula $\mathcal{Q}$ esatta su $\mathbb{P}_n(\cdot)$.

Teorema CONTROLLARE BENE IL GAMMA DELLA CUPOLA CHE CONTIENE LA REGIONE

Sia $d \geq 2$ e sia $\mathfrak{D}$ una qualsiasi regione di $\mathbb{S}^d$. Sia $\mathcal{Q}_{\mathfrak{D},n}$ data da:

$$\mathcal{Q}_{\mathfrak{D},n} := \sum_{j=1}^{N} \omega_j f(\mathbf{x}_j)$$

una formula di integrazione con nodi $\mathbf{x}_j \in \mathfrak{D}$, pesi positivi e che sia esatta su $\mathbb{P}_n(\mathfrak{D})$, con $n \geq 2$. Sia inoltre $\gamma = \max_{x,y\in\mathfrak{D}} dist(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Allora

$$\sum_{\substack{j = 1, \\ \mathbf{x}_j \in \mathfrak{C}(\mathbf{y}, \gamma/\pi n)}}^{N} \omega_j \leq c\gamma^d \lfloor n/2 \rfloor^{-d}$$

per ogni $\mathbf{y} \in \mathbb{S}^d$, con $\mathfrak{C}(\mathbf{y}, \gamma/\pi n)$ cupola di centro $\mathbf{y}$ e raggio $\gamma/\pi n$.

Dimostrazione

Dato l'angolo $\gamma = \max_{x,y\in\mathfrak{D}} dist(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = dist(\widetilde{\mathbf{x}}, \widetilde{\mathbf{y}})$, possiamo vedere che, ruotando la sfera e prendendo come polo Nord $\mathbf{z}$ punto medio della geodetica che congiunge $\widetilde{\mathbf{x}}$ e $\widetilde{\mathbf{y}}$, allora $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{C}(\mathbf{z}, \gamma)$, infatti $\mathbf{z} \in \mathfrak{D}$ quindi $\forall \mathbf{x} \in \mathfrak{D}$ abbiamo che $dist(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq \gamma$, esattamente la definizione di cupola.

Riferimenti bibliografici

[1] Kendall Atkinson and Weimin Han. Spherical harmonics and approximations on the unit sphere: An introduction,. *Springer*.

[2] Len Bos and Marco Vianello. Subperiodic trigonometric interpolation and quadrature,. *Appl. Math. Comput.*, **218**:10630–10638, 2012.

[3] Gaspare Da Fies and Marco Vianello. Algebraic cubature on planar lenses and bubbles,. *Dolomites Res. Notes Approx. DRNA*, **5**:7–12, 2012.

[4] Gaspare Da Fies and Marco Vianello. Trigonometric gaussian quadrature on subintervals of the period,. *Electron. Trans. Numer. Anal.*, **39**:102–112, 2012.

[5] Gaspare Da Fies and Marco Vianello. On the lebesgue constant of subperiodic trigonometric interpolation,. to appear.

[6] Alvise Sommariva Gaspare Da Fies and Marco Vianello. Algebraic cubature by linear blending of elliptical arcs,. *Adv. Comput. Math.*, submitted.

[7] Walter Gautschi. Orthogonal polynomials: Computation and approximation,. *Oxford University Press, New York*, 2004.

[8] Kerstin Hesse and Robert S. Womersley. Numerical integration with polynomial exactness over a spherical cap,. *Adv. Comput. Math.*, **36**:451–483, 2012.