Interpolazione polinomiale e cubatura numerica su sottoregioni del toro

Luca Mezzalira, Alvise Sommariva, Marco Vianello

April 19, 2013

0. Contents

1. Introduzione

In questo lavoro, ci occupiamo della costruzione di formule per la cubatura numerica su sottoregioni del toro.

2. Richiami e notazione

2.1 Toro

Iniziamo la trattazione presentando alcuni risultati sul toro che ci saranno utili in futuro.

Il toro $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie di rivoluzione ottenuta ruotando, nello spazio tridimensionale, un cerchio di raggio r attorno ad un asse coplanare al cerchio.
Nel resto di questo lavoro, se non indicato altrimenti, consideriamo il toro simmetrico rispetto all'asse $\hat{z}$. Vedremo in seguito che questa non è una limitazione, perché le formule di cubatura costruite su questo toro particolare sono valide anche per gli altri casi.

Possiamo caratterizzare il toro $\mathbb{T}^2$ in vari modi, ad esempio tramite la sua equazione implicita in coordinate cartesiane: consideriamo l'usuale distanza euclidea

$$dist(x, y) = \|x - y\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{3}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

e siano $\underline{x} = (x_j)_{j=1,2,3}$, C ed r rispettivamente centro e raggio del cerchio, $\hat{x_3}$ l'asse di rivoluzione $R := dist(C, \hat{x_3})$ la distanza dal centro del cerchio all'asse; abbiamo

$$\mathbb{T}^2 = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 | \left(R - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)^2 + x_3^2 = r^2 \right\} \tag{2.1}$$

Notiamo inoltre che in generale ci interessa il caso con $R \geq r$, cioè i *tori ad anello*; in caso contrario, il toro si autointerseca e potrebbe essere necessaria una trattazione separata per questa porzione di superficie.

Un'altra possibilità è quella di guardare la classica parametrizzazione del toro, data da

$$\begin{cases} x_1 = (R + r\cos(\vartheta))\cos(\varphi) & ,\vartheta \in [0, 2\pi] \\ x_2 = (R + r\cos(\vartheta))\sin(\varphi) & ,\varphi \in [0, 2\pi] \\ x_3 = r\sin(\vartheta) \end{cases} \tag{2.2}$$

Dove necessario, indicheremo esplicitamente questa immersione di $\mathbb{T}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ con

$$\underline{x}(\vartheta, \varphi) = (x_1(\vartheta, \varphi), x_2(\vartheta, \varphi), x_3(\vartheta, \varphi))$$

In entrambe le situazioni, in casi particolari può aiutarci dare risalto alla variabile x_3 che ricopre un ruolo particolare, motivo per cui possiamo introdurre i seguenti vettori (dove e_i sono gli elementi della base canonica di $\mathbb{R}^3$):

$$\xi = e_1 + e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad z = e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A questo punto, l'equazione implicita assume la forma di

$$\mathbb{T}^2 = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 | \left(R - \|x \cdot \xi\| \right)^2 + \|x \cdot z\|^2 = r^2 \right\}$$

mentre la parametrizzazione può essere riscritta, con la sostituzione di $\mathbf{t} := r \sin(\vartheta)$, come:

$$\underline{x} = \mathbf{t} z + \left(R + \sqrt{r^2 - \mathbf{t}^2} \right) \xi^T \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Infine, l'elemento di superficie per il toro è $d\mathbb{T}^2 = r(R + r\cos(\vartheta))$.

Introduciamo a questo punto le sottoregioni di cui vogliamo occuparci; in particolare ci interessa generalizzare al toro la nozione di *quadrati non standard* esplorata in [**?**].
Definiamo quindi i *quadrati non standard sul toro*:

$$\mathcal{R}_{\vartheta_s, \vartheta_f, \varphi_s, \varphi_f} := \left\{ \underline{x} = \underline{x}(\varphi, \vartheta) \in \mathbb{T}^2 \mid \varphi_s \le \varphi \le \varphi_f \ , \ \vartheta_s \le \vartheta \le \vartheta_f \right\} \tag{2.4}$$

Notare che questa è la regione che si ottiene considerando un normale rettangolo su $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ trasportato sul toro mediante l'omeomorfismo dato dalla parametrizzazione (2.2).

Casi particolari di queste regioni sono quelli che chiameremo *anelli* e *slice* dati rispettivamente dal caso $\varphi_s = 0$, $\varphi_f = 2\pi$ e dal caso $\vartheta_s = 0$, $\vartheta_f = 2\pi$.

Generalizzazione a dimensioni maggiori

Si può generalizzare l'indagine al toro $\mathbb{T}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, di cui riportiamo la parametrizzazione: scelti n raggi $R_1 \dots R_n$, abbiamo

$$\begin{cases} x_1 &=& (R_n + (R_{n-1} + (\dots (R_2 + R_1 \cos(\vartheta_1)) \cos(\vartheta_2)) \dots) \cos(\vartheta_{n-1})) \cos(\vartheta_n) \\ x_2 &=& (R_n + (R_{n-1} + (\dots (R_2 + R_1 \cos(\vartheta_1)) \cos(\vartheta_2)) \dots) \cos(\vartheta_{n-1})) \sin(\vartheta_n) \\ x_3 &=& (R_{n-1} + (R_{n-2} + (\dots (R_2 + R_1 \cos(\vartheta_1)) \cos(\vartheta_2)) \dots) \cos(\vartheta_{n-2})) \sin(\vartheta_{n-1}) \\ \vdots & & \\ x_{n-1} &=& (R_2 + R_1 \cos(\vartheta_1)) \sin(\vartheta_2) \\ x_n &=& R_1 \sin(\vartheta_1) \end{cases}$$

mentre l'equazione implicita è del tipo

$$R_1 - \sqrt{\left(R_2 - \sqrt{\left(\dots \sqrt{\left(R_n - \sqrt{x_1^2 - x_2^2} \right)^2 + x_3^2 \dots} \right)^2 + x_{n-1}^2} \right)^2 + x_n^2} = 0$$

2.2 Polinomi

Polinomi multivariati

Richiamiamo qualche fatto sui polinomi in $\mathbb{R}^n$ che ci sarà utile in seguito.

Per iniziare, introduciamo la notazione con i multiindici: chiamiamo *multiindice* un elemento $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ e definiamo la sua lunghezza $|\alpha| = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i$.
Questo rende più conveniente la trattazione dei monomi: possiamo scrivere $\underline{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, abbiamo la corrispondenza $deg(x^\alpha) = |\alpha|$ ed inoltre abbiamo $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$, dove $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$ è l'usuale somma per componenti.

Possiamo quindi utilizzare una notazione compatta per definire lo spazio dei polinomi su $\mathbb{R}^n$ e quello dei polinomi di grado minore o uguale a d:

$$\mathbb{P}(\mathbb{R}^n) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \underline{c_i} \cdot \underline{x}^{\alpha_i} \;\middle|\; c_i \in \mathbb{R}^n, \alpha_i \in \mathbb{N}_0^n \right\}$$

$$\mathbb{P}_d(\mathbb{R}^n) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \underline{c_i} \cdot \underline{x}^{\alpha_i} \mid \alpha_i \in \mathbb{N}_0^n \ , \ |\alpha_i| \leq d \right\}$$

Scriveremo in breve $\mathbb{P}_d(\mathbb{R}^n) = \mathbb{P}_d^n$.

Alcune osservazioni su questi spazi polinomiali:

- $dim(\mathbb{P}_d^n) = \binom{n+d}{n}$
  Infatti, abbiamo una base costituita dai monomi $x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}$ tali che $\sum_i j_i \leq d$, che ha lo stesso numero di soluzioni di $j_1 + \dots + j_n + j_{n+1} = d$, che è equivalente alla scelta di n oggetti da un insieme di $n + d$, cioè ha $\binom{n+d}{n}$ soluzioni.
- Notare che con la scelta di questa definizione, la restrizione sul grado è sulla somma degli esponenti (o sulla lunghezza del multiindice) e non sull'esponente per una singola componente, quindi ad esempio $x_1^2 x_2^2 \notin \mathbb{P}_2^n$. La scelta opposta dà quelli che sono chiamati *polinomi prodotto tensoriale* $\mathbb{P}_d^1 \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_d^1$, che non useremo in questo lavoro.

A questo punto, ci è utile richiamare il concetto di restrizione di variabile del polinomio: sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, possiamo definire lo spazio dei polinomi su Ω come

$$\mathbb{P}_d(\Omega) = \{p(\underline{x}) \in \mathbb{P}_d(\mathbb{R}^n) \mid \underline{x} \in \Omega\}$$

Un esempio semplice è considerare $n = 1$ (gli usuali polinomi sulla retta reale) e $\Omega = [a, b]$ intervallo chiuso; possiamo definire

$$\mathbb{P}_d([a, b]) = \{p(x) \in \mathbb{P}_d(\mathbb{R}) \mid x \in [a, b]\}$$

Nel nostro caso, ci serve considerare lo spazio dei *polinomi sul toro* $\mathbb{P}_d(\mathbb{T}^2)$:

$$\mathbb{P}_d(\mathbb{T}^2) = \{p(x) \in \mathbb{P}_d(\mathbb{R}^3) \mid x \in \mathbb{T}^2\}$$

Facciamo notare comunque che un procedimento all'apparenza innocuo come la restrizione della variabile può portare modifiche importanti nella struttura dello spazio polinomiale, arrivando anche ad alterarne la dimensione, come possiamo vedere da questi esempi:

- Ad esempio, nel caso limite di $\mathbb{P}(\{0\})$ tutti i polinomi si riducono a costanti e lo spazio ha dimensione 1 su $\mathbb{R}$.
- Come mostrato in [], nel caso del cerchio bivariato $\mathbb{P}(\mathbb{S}^1)$ la dimensione dello spazio polinomiale cala perché ad esempio i due polinomi x^2+y^2-1 e 0 sono equivalenti.
- Consideriamo il nostro spazio $\mathbb{P}_d(\mathbb{T}^2)$. Qui, come nel caso del cerchio, almeno per gradi alti la dimensione cala rispetto a $\mathbb{P}_d(\mathbb{R}^3)$.
  Infatti, ricordiamo l'equazione implicita del toro (2.1); se rimuoviamo la radice per via algebrica, otteniamo la seguente equazione:
  $$4R^2(x_1^2+x_2^2) = (r^2-R^2-x^2-y^2-z^2)^2$$
  equazione algebrica di quarto grado che ci garantisce che, come nel caso del cerchio in $\mathbb{R}^2$, ci sarà un polinomio di quarto grado equivalente al polinomio nullo.

Anche senza informazioni sulla dimensione, tuttavia, vale il seguente risultato:

Proposizione 2.2.1. *Sia $\{p_j\}_{j=1\ldots N}$ una base per lo spazio $\mathbb{P}_d^n$. Allora, $\{p_j\}_{j=1\ldots N}$ rimane un insieme di generatori anche per $\mathbb{P}_d(\mathbb{T}^2)$, mentre non è garantito che sia un insieme indipendente di questo spazio.*

Infatti, fissiamo un arbitrario $p \in \mathbb{P}_d(\mathbb{T}^2)$. Questo è in particolare anche un elemento di $\mathbb{P}_d^n$ e in quanto tale si può scrivere come combinazione lineare di una base di $\mathbb{P}_d^n$, cioè $p \in < p_1 \ldots p_n >$. Essendo p arbitrario, possiamo concludere. Per vedere che non necessariamente l'insieme resta una base, basta fare riferimento al controesempio portato qui sopra.

Polinomi trigonometrici

Una classe di polinomi che ci sarà utile invece in contesto univariato è quella dei *polinomi trigonometrici*, definiti come segue:

$$\mathbb{T}_n([-\omega,\omega]) =< 1, \cos(k\vartheta), \sin(k\vartheta) > , \; 1 \le k \le n \quad , 0 \le \omega \le \pi$$

Quindi, un generico polinomio in questo spazio sarà della forma

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx)$$

In particolare, enunciamo questo risultato:

Lemma 2.2.2. *Siano $d_1, d_2 \in \mathbb{N}_+$. Allora, esistono $M_s, M_c < \infty$, $(\alpha_j)_{j=1\ldots M_s}$, $(\beta_k)_{k=1\ldots M_c}$ tali che $\alpha_j, \beta_k \le n_1+n_2, \alpha_j, \beta_k \in \mathbb{N}_+ \; \forall j,k$, per cui*

$$\sin^{n_1}(\vartheta)\cos^{n_2}(\vartheta) = C + \sum_{j=1}^{M_s} c_{s,j}\sin(\alpha_j\vartheta) + \sum_{k=1}^{M_c} c_{c,k}\cos(\beta_k\vartheta)$$

Per opportuni $C, c_{s,j}, c_{c,k} \in \mathbb{R}$

La dimostrazione si può trovare in [?] e si basa sull'utilizzo delle formule di bisezione.

Il risultato precedente è interessante perché dimostra che è possibile riscrivere un prodotto di potenze di funzioni trigonometriche come combinazione lineare di $1, \sin(k\vartheta), \cos(l\vartheta)$, ovvero che lo spazio generato da queste potenze è immerso in quello dei polinomi trigonometrici, con una precisa relazione sul grado:

$$< 1\,,\, \sin^{n_1}(\vartheta)\cos^{n_2}(\vartheta)\,|\, n_1 + n_2 \leq n, \vartheta \in [-\omega, \omega] > \leq \ \mathbb{T}_n([-\omega, \omega])$$

3. Formule di cubatura numerica

Siamo ora pronti a procedere allo sviluppo di formule di cubatura numerica sulle sottoregioni del toro presentate in precedenza.

Vogliamo quindi, data una regione $\mathcal{R} \subset \mathbb{T}^2$, costruire una formula del tipo

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{R}}(f) := \sum_{j=1}^{N} \lambda_j f(x_j) \approx \int_{\mathcal{R}} f(x) d\mathbb{T}^2$$

Ricordiamo inoltre che una formula $\mathcal{Q}_\Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si dice *esatta* su uno spazio di funzioni $\mathbb{F} \subset L^1(\Omega)$ se

$$\mathbb{Q}_\Omega(f) = \int_\Omega f(x)dx \quad \forall f \in \mathbb{F}$$

Per iniziare, useremo la *formula di quadratura algebrica gaussiana*, esatta per lo spazio di polinomi trigonometrici $\mathbb{T}_n([-\omega, \omega])$. Si tratta di una formula di quadratura con $n+1$ nodi (visibili come angoli) e pesi positivi.
Riportiamo di seguito il risultato relativo all'esattezza della formula ([]):

Teorema 3.0.3. *Siano* $\{(\xi_j, \lambda_j)\}_{1 \leq j \leq n+1}$ *rispettivamente i nodi ed i pesi (positivi) della formula di quadratura algebrica gaussiana per la funzione peso*

$$\mathcal{W}(x) = \frac{2\sin(\omega/2)}{\sqrt{1 - \sin^2(\omega/2)x^2}} \quad , x \in (-1, 1)$$

Allora,

$$\int_{-\omega}^{\omega} f(\vartheta) d\vartheta = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j f(\vartheta_j) \, , \forall f \in \mathbb{T}_n([-\omega, \omega]) \, , 0 < \omega < \pi$$

Dove definiamo

$$\vartheta_j = 2 \arcsin(\sin(\omega/2)\xi_j) \in (-\omega, \omega) \; , j = 1 \dots n+1$$

Riportiamo di seguito anche la generalizzazione per funzioni peso simmetriche w, dimostrata in []

Teorema 3.0.4. *Sia* $w : [-\omega, \omega] \to \mathbb{R}$ *una funzione peso positiva e siano* $\{(\xi_j, \lambda_j)\}_{1 \le j \le n+1}$ *rispettivamente i nodi ed i pesi (positivi) della formula di quadratura algebrica gaussiana per la funzione peso*

$$\tilde{\mathcal{W}}(x) = w(\arcsin(\sin(\omega/2)x)) \frac{2\sin(\omega/2)}{\sqrt{1-\sin^2(\omega/2)x^2}} \quad , x \in (-1,1)$$

Allora,

$$\int_{-\omega}^{\omega} f(\vartheta) w(\vartheta) d\vartheta = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j f(\vartheta_j) \, , \forall f \in \mathbb{T}_n([-\omega,\omega]) \, , 0 < \omega < \pi$$

Dove definiamo

$$\vartheta_j = 2\arcsin(\sin(\omega/2)\xi_j) \in (-\omega, \omega) \ , j = 1 \ldots n+1$$

Questi risultati saranno di importanza fondamentale nella costruzione di formule di cubatura per il toro e nella dimostrazione dell'esattezza di questa formule.

Consideriamo infatti $\mathcal{R}_{a_1,b_1,a_2,b_2}$ un quadrato non standard sul toro, come definito in (2.4). Basandoci sulle formule di quadratura gaussiane, possiamo introdurre questa formula di cubatura sul toro e dimostrare il seguente risultato:

Teorema 3.0.5. *Sia* $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{a_1,b_1,a_2,b_2}$ *e consideriamo, per* $j = 1, 2$, *i nodi* $\{\psi_k^{[a_j,b_j]}\}_{k=1\ldots n+2-j+1}$ *ed i pesi* $\{\lambda_k^{[a_j,b_j]}\}_{k=1\ldots n+2-j+1}$ *di una formula di quadratura gaussiana subperiodica (definita come sopra) relativamente alla funzione peso* $w(x) = 1$, *con grado di precisione trigonometrico* $n + 2 - j$. *Allora, la formula di cubatura*

$$T_n(f) = \sum_{j_1=1}^{n+2} \sum_{j_2=1}^{n+1} \lambda_{j_1 j_2} f(\xi_{j_1,j_2})$$

dove

$$\xi_{j_1,j_2} = \xi(\psi_{j_1}^{[a_1,b_1]} \psi_{j_2}^{[a_2,b_2]})$$

$$\lambda_{j_1,j_2} = \lambda_{j_1} \lambda_{j_2}$$

integra esattamente in $\mathcal{R}$ *ogni polinomio algebrico di grado totale* n.

Dimostrazione Per prima cosa notiamo che, considerando il caso di tori senza autointersezioni, cioè con $R > r$, il valore assoluto del determinante jacobiano della trasformazione in coordinate toroidali è $|r(R + r\cos(\vartheta))| = r(R + r\cos(\vartheta))$, cioè coincide con l'espressione senza valore assoluto, perché questa è positiva, quindi

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{R}} f(\xi) d\mathbb{T}^2 &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(\xi(\vartheta,\varphi)) |r(R + r\cos(\vartheta))| d\varphi d\vartheta \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(\xi(\vartheta,\varphi)) r(R + r\cos(\vartheta)) d\varphi d\vartheta \end{aligned}$$

Ora, se vogliamo dimostrare l'esattezza della regola per tutti i polinomi di grado n, è sufficiente dimostrarla per una base di $\mathbb{P}_n(\mathbb{R}^3)$ (infatti questo resta un insieme di generatori per $\mathbb{P}_d(\mathbb{T}^2)$, vedi proposizione 2.2.1), ad esempio la base monomiale

$$\{x^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}_0^3, |\alpha| = n\}$$

Osserviamo ora che un elemento di questa base, una volta convertito in coordinate toroidali, sarà

$$p(x_1, x_2, x_3) = x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}$$
$$= ((R + r\cos(\vartheta))\cos(\varphi))^{k_1} ((R + r\cos(\vartheta))\sin(\varphi))^{k_2} (r\sin(\varphi))^{k_3}$$
$$= r^{k_3}(\sin(\varphi))^{k_2+k_3}(\cos(\varphi))^{k_1}(R + r\cos(\vartheta))^{k_1+k_2}$$

Di conseguenza, grazie al lemma 2.2.2, abbiamo che $p(\xi(\vartheta, \varphi))$ è un polinomio trigonometrico di grado al più $k_1 + k_2$ in ϑ e di grado al più $k_1 + k_2 + k_3$ in φ.
Inoltre, essendo $k_1 + k_2 + k_3 = n$, il grado è $\leq n$.

A questo punto nell'integrale, separando le variabili, otteniamo

$$\int_{\mathcal{R}} p(\xi) d\mathbb{T}^2 = \int_{a_1}^{b_1} r(R + r\cos(\vartheta))^{k_1+k_2+1} d\vartheta \cdot \int_{a_2}^{b_2} r^{k_3}(\sin(\varphi))^{k_2+k_3}(\cos(\varphi))^{k_1} d\varphi$$

Questa struttura ci suggerisce di costruire una formula prodotto tensoriale basata sulle formule gaussiane subperiodiche descritte nel teorema 3.0.5. Più precisamente, se indichiamo con $\{\psi_k^{[a_1,b_1]}\}_{k=1\ldots n+2}$ e $\{\lambda_k^{[a_1,b_1]}\}_{k=1\ldots n+2}$ i nodi e i pesi di una formula gaussiana subperiodica con grado trigonometrico di esattezza $n+1$ rispetto alla funzione peso $w(x) = 1$ (notare che è necessario aumentare il grado di precisione ad $n+1$ per assorbire l'elemento di superficie) e con $\{\psi_k^{[a_2,b_2]}\}_{k=1\ldots n+1}$ e $\{\lambda_k^{[a_2,b_2]}\}_{k=1\ldots n+1}$ i nodi e i pesi di una formula gaussiana subperiodica con grado trigonometrico di precisione n rispetto alla funzione peso $w(x) = 1$, abbiamo infine

$$\int_{\mathcal{R}} p(\xi) d\mathbb{T}^2 = T_n(p) = \sum_{j_1=1}^{n+2} \sum_{j_2=1}^{n+1} \lambda_{j_1 j_2} p(\xi_{j_1,j_2})$$

dove

$$\xi_{j_1,j_2} = \xi(\psi_{j_1}^{[a_1,b_1]} \psi_{j_2}^{[a_2,b_2]})$$

$$\lambda_{j_1,j_2} = \lambda_{j_1}\lambda_{j_2}$$

Di conseguenza, la regola ha grado algebrico di precisione n.