Università degli studi di Padova

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Punti di Lebesgue sul disco

Andrea Pinto

Relatori:

- Dott. Francesco Rinaldi
- Dott. Alvise Sommariva

Anno Accademico 2011/12

Indice

Introduzione

La ricerca di punti adeguati per l'interpolazione polinomiale è uno dei grandi temi della teoria dell'approssimazione: il problema consiste nel ricercare le disposizioni dei punti che permettano l'interpolazione polinomiale col minor errore possibile. Nel caso unidimensionale i risultati a livello sia puramente teorico che numerico ci forniscono delle configurazioni decisamente buone. Nel caso multidimensionale il problema è più complesso e quindi numerosi autori continuano a interessarsene: esistono delle buone configurazioni per domini molto semplici quali cerchi, quadrati e triangoli. La bontà delle configurazioni trovate viene stimata attraverso la costante di Lebesgue. In tal senso, in questo lavoro ci siamo concentrati al caso del disco bidimensionale cercando configurazioni che minimizzassero tale costante: è stato possibile riuscire a trovare dei lievi miglioramenti ai già ottimi risultati presenti in letteratura a riguardo. Nelle prossime pagine, dopo aver fornito dei veloci richiami sull'interpolazione polinomiale e dopo aver definito in maniera rigorosa la costante di Lebesgue, illustreremo come sia stato possibile ottenere delle configurazioni di punti con una discreta costante di Lebesgue. Inoltre proporremo diversi confronti tra i dati che abbiamo raccolto nelle sperimentazioni numeriche sia con quelli di altri autori, sia con stime puramente teoriche.

1 Interpolazione polinomiale e costante di Lebesgue

Il nostro obiettivo è di fornire, per un certo valore n fissato, un "buon" insieme di punti $\{z_n\} = \{(x_i, y_i)\}_{i=1..N}$ nel cerchio unitario di $\mathbb{R}^2$. La bontà di questi punti è espressa con una bassa costante di Lebesgue,che come vedremo sarà un buon indice di stabilità e della qualità dell'errore rispetto a quello della miglior approssimazione.

Indichiamo con $\mathbb{P}_n^d =< x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_d^{n_d}, 0 \leq \sum_{i=1}^d n_i \leq n >$ lo spazio dei polinomi di grado totale n. Si può vedere che $N = dim(\mathbb{P}_n^d) = \binom{n+d}{n}$.
Sia Ω un dominio compatto di $\mathbb{R}^d$. Un insieme di punti $\{z_n\}$ si dice unisolvente su Ω per l'interpolazione polinomiale di grado n, se esiste, per ogni vettore $\gamma = \{\gamma_k\}_{k=1...N}$, un unico polinomio p_n in $\mathbb{P}_n^d$ tale che

$$p_n(z_k) = \gamma_k \quad k = 1, ..., N$$

Segue direttamente da questa definizione una condizione di necessità per l'unisolvenza: la cardinalità N di tale insieme $\{z_n\}$ deve essere uguale alla

dimensione di $\mathbb{P}_n$.
Fissiamo nel dominio Ω una base $< p_i, i = 1, ..., N >$ di $\mathbb{P}_n$ e denotiamo con $V = V(z_1, z_2, ..., z_N)$ la matrice quadrata di Vandermonde le cui componenti sono

$$V_{ij} = \{p_j(x_i) : i, j = 1, ..., N\}$$

Definiamo ora i polinomi di Lagrange come

$$L_k(z) = \frac{det(V(z_1, ..., z_{k-1}, z, z_{k+1}, ..., z_N))}{det(V(z_1, ..., z_N))} \quad k = 1, ..., N \tag{1}$$

e l'operatore di interpolazione su un insieme di punti $\mathcal{P}$ come il funzionale $\mathcal{L}_n : (C(\Omega), \|.\|_\infty) \to \mathbb{P}_n^d$

$$\mathcal{L}_n f(.) = \sum_{i=1}^{N} f(z_i) L_i(.)$$

Nel caso unidimensionale si puó facilmente mostrare che

$$L_k(z) = \prod_{i=0, i\neq k}^{N} \frac{z - z_i}{z_k - z_i} = \frac{z - z_0}{z_k - z_0} ... \frac{z - z_{k-1}}{z_k - z_{k-1}} \frac{z - z_{k+1}}{z_k - z_{k+1}} ... \frac{z - z_N}{z_k - z_N}$$

Se $d = 1$, e se i punti su cui si interpola sono tutti distinti, allora esiste ed è unico il polinomio p_n che interpola le coppie (z_k, γ_k).

Più in generale, per d generico, da (1), si vede che se l'insieme di punti è unisolvente, si ha $L_k(x_s) = \delta_{k,s}$ per ogni k e per ogni s.

La costante di Lebesgue $\Lambda_n(\mathcal{P})$ di un insieme di punti $\mathcal{P}$ è la norma dell'operatore di interpolazione $\mathcal{L}_n$:

$$\Lambda_n(\mathcal{P}) = \|\mathcal{L}_n\| = \frac{\|\mathcal{L}_n f\|_\infty}{\|f\|_\infty} = \max_{x\in\Omega} \sum_{i=1}^{N} |L_{z_i}| \tag{2}$$

La grandezza di $\Lambda_n(\mathcal{P})$ è in funzione dell'insieme dei punti di interpolazione $\mathcal{P}$, del dominio Ω e di $\mathbb{P}_n^d$ ma non della base di quest'ultimo insieme poiché il determinante di una generica matrice non dipende dalla base scelta. Vediamo ora delle stime che ci fanno intuire l'importanza di una buona costante di Lebesgue.

Teorema.
Sia $\mathbb{P}_n^d$ lo spazio dei polinomi di grado totale n su $\mathbb{R}^d$, sia Ω un insieme compatto di $\mathbb{R}^d$ e sia $\mathcal{P} = \{z_i\} \subset \Omega$ un insieme di punti unisolvente per l'interpolazione polinomiale di grado n. Sia inoltre $\mathcal{L}_n : (C(\Omega), \|.\|_\infty) \to \mathbb{P}_n^d$ l'operatore di interpolazione polinomiale sui punti $\{z_i\}$ e sia $\Lambda_n(\mathcal{P})$ la corrispondente costante di Lebesgue, allora

1. $\|\mathcal{L}_n f - f\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n(\mathcal{P})) \|f - \phi_n^*\|_\infty$ *ove* $\phi_n^* \in \mathbb{P}_n^d$ *è il polinomio di grado n di miglior approssimazione per f.*
2. $\left\|\mathcal{L}_n f - \mathcal{L}_n \tilde{f}\right\|_\infty \leq \Lambda_n(\mathcal{P}) \max_k \left|f(x_k) - \tilde{f}(x_k)\right|$ *ove* $\tilde{f}$ *è la funzioni perturbata di f.*

Dimostrazione.

1. Notiamo che $\phi_n^* - \mathcal{L}_n\phi_n^* = 0$ poiché $\phi_n^* \in \mathbb{P}_n^d$. Dunque

   $$f - \mathcal{L}_n f = f - \phi_n^* + \phi_n^* - \mathcal{L}_n f = f - \phi_n^* + \phi_n^* - \mathcal{L}_n\phi_n^* + \mathcal{L}\phi_n^* - \mathcal{L}_n f = f - \phi_n^* + \mathcal{L}_n(\phi_n^* - f)$$

   Ma allora

   $$\|f - \mathcal{L}_n f\|_\infty \leq \|f - \phi_n^*\|_\infty + \|\mathcal{L}_n\phi_n^* - \mathcal{L}_n f\|_\infty \leq$$
   $$\leq \|f - \phi_n^*\|_\infty + \|\mathcal{L}_n\|_\infty \|f - \phi_n^*\|_\infty = (1 + \Lambda_n(\mathcal{P})) \|f - \phi_n^*\|_\infty .$$

2. $\left|\mathcal{L}_n f - \mathcal{L}_n \tilde{f}\right| = \left|\sum_i^N f(x_i)L_i(x) - \sum_i^N \tilde{f}(x_i)L_i(x)\right| \leq \left|\sum_i^N ((f(x_i) - \tilde{f}(x_i))L_i(x)\right| \leq$

   $$\leq \sum_i^N \left|f(x_i) - \tilde{f}(x_i)\right| |L_i(x)| \leq \max_i \left|f(x_i) - \tilde{f}(x_i)\right| \sum_i^N |L_i(x)|$$

   Ma allora

   $$\left\|\mathcal{L}_n f - \mathcal{L}_n \tilde{f}\right\|_\infty \leq \|\mathcal{L}_n\|_\infty \max_i \left|f(x_i) - \tilde{f}(x_i)\right|$$

□

1.0.1 Punti di Lebesgue

Fissati Ω e $\mathbb{P}_n^d$ i punti che minimizzano la costante di Lebesgue sono detti *Punti di Lebesgue*. Tali punti non sono noti nemmeno nel caso univariato: in letteratura si ritiene che nell'intervallo limitato [a,b] gli "expanded-Chebyshev"

$$x_j = \frac{a+b}{2} - \frac{(a-b)}{2} \frac{\cos((2j-1)\pi/(2n))}{\cos(\pi/(2n))} \quad j = 1, ..., n$$

sono quasi-ottimi. Miglioramenti a questi punti sono stati trovati da [2]. Un'altra famiglia di punti molto importante è quella dei punti di Fekete che sono definiti come i punti che massimizzano il valore assoluto del determinante della matrice di Vandermonde V. È facile vedere che per tali punti vale

$$\Lambda_n = \max_{z\in\Omega} \sum_{k=1}^{N} |L_k(z)| \leq \ N = \binom{n+d}{n}.$$

Infatti applicando (1) si vede che $L_k \leq 1$ per ogni k, poiché i punti di Fekete massimizzano il determinante: quindi il denominatore di L_k è sempre maggiore del rispettivo numeratore. Da (2) deriva tale sovrastima di $\Lambda_n(\mathcal{P})$.

La costante di Lebesgue Λ_n è invariante per trasformazioni affini. Questo significa che conoscendo dei punti di interpolazione per l'intervallo [-1,1], con una bassa costante di Lebesgue, li si conosce anche, per qualsiasi intervallo [a,b], o nel caso bidimensionale noti i punti di Lebesgue di un dominio di riferimento Ω^*, si conoscono pure i punti di Lebesgue di domini Ω che sono trasformazioni affini di Ω^*.

1.1 Richiami su alcuni nodi di interpolazione classici nell'intervallo

Analizzeremo adesso alcune famiglie di punti classiche per l'interpolazione. Tali considerazioni verranno utilizzate nella sezione 5.3.

- **Chebyshev**. Questi punti nell'intervallo [1-1] sono gli zeri dei polinomi di Chebyshev $\mathcal{T}_n(x) = \cos(n \arccos(x))$. Esiste una formulazione ricorsiva di questi polinomi

$$\begin{cases} \mathcal{T}_0(x) = 1 \\ \mathcal{T}_1(x) = x \\ \mathcal{T}_{n+1}(x) = 2x\mathcal{T}_n(x) - \mathcal{T}_{n-1}(x),\ n > 1. \end{cases}$$

  Per il grado n, tali punti, in un intervallo [a,b], risultano essere

$$x_i = \frac{(a+b)}{2} + \frac{(b-a)}{2} \cos\Big(\frac{2i-1}{2n}\pi\Big)$$

  con $i = 1, \ldots, n$.

- **Expanded Chebyshev**. Come descritto in [3] sono una dilatazione dei punti di Chebyshev così che il primo e l'ultimo nodo siano estremi

dell'intervallo. Sono dati dalla seguente formulazione:

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\frac{\cos(\frac{(2j-1)\pi}{2n})}{\cos(\frac{\pi}{2n})} \quad i = 1..n$$

Gli Expanded Chebyshev risultano avere una costante di Lebesgue leggermente più piccola rispetto a quella dei punti di Chebyshev, e risultano avere una costante di Lebesgue quasi-ottimale per l'intervallo.

- **Chebyshev-Lobatto**. Questi punti nell'intervallo [-1,1] sono gli zeri dei polinomi di Chebyshev di seconda specie, ovvero gli zeri di $\mathcal{U}_n$ ove

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0(x) = 1 \\ \mathcal{U}_1(x) = 2x \\ \mathcal{U}_{n+1}(x) = 2x \cdot \mathcal{U}_n(x) - \mathcal{U}_{n-1} \end{cases}$$

Tali polinomi sono ortogonali con la funzione peso $\sqrt{1-x}$ nell'intervallo [-1,1]. Per il grado n, tali punti, risultano essere:

$$x_i = +\cos\left(\frac{k-1}{n}\pi\right)$$

con $i = 1, \ldots, n$.

- **Gauss-Legendre-Lobatto**. Questi punti nell'intervallo [-1,1] sono gli zeri dei polinomi di Legendre, ovvero gli zeri di $\mathcal{P}_n$ con $\mathcal{P}_n$ data dalla formulazione ricorsiva

$$\begin{cases} \mathcal{P}_0 = 1 \\ \mathcal{P}_1 = x \\ \mathcal{P}_n = \frac{2n-1}{n} x\mathcal{P}_{n-1} - \frac{n-1}{n}\mathcal{P}_{n-2} \end{cases}$$

Tali punti sono molto utilizzati per le formule di quadratura utilizzando come pesi

$$A_i = \frac{2}{n(n+1)}\frac{1}{(\mathcal{P}_n(x_i))^2}, \; n > 1.$$

con $i = 0, ..., n$

2 Algoritmi

Precedentemente in [1], per il procedimento di minimizzazione, sono stati usati algoritmi active-set o BGFS. A causa del determinante di Vandermonde che è nullo sulle configurazioni non unisolventi, la nostra funzione

obiettivo non risulta essere particolarmente regolare ma con frequenti oscillazioni, estremanti locali, punti di discontinuità e singolarità. L'utilizzo di metodi gradiente quindi potrebbe non agevolare la ricerca di minimi. Inoltre con questi metodi è più probabile convergere ad un estremo locale, invece di minimizzare globalmente la costante di Lebesgue. In questo lavoro, invece, abbiamo seguito un approccio diverso: come già in parte [2], abbiamo usato algoritmi genetici di natura principalmente aleatoria o algoritmi di ricerca diretta.

2.1 Algoritmo Genetico

Il primo algoritmo è Genetic Algorithm (GA) presente nel pacchetto di Matlab "Global Optimization Toolbox". La diversità di GA è che invece di eseguire una ricerca diretta di configurazioni ottimali, ad esempio lungo la direzione gradiente , svolge una ricerca parallela, con un procedimento che ricorda l'evoluzione darwiniana. Vediamo GA in dettaglio. Fissato un certo intero NP, GA genera una popolazione in cui ogni individuo $x^{(i)}$ con i=1,...,NP, è rappresentato da un vettore (nel nostro caso costituito dalla posizione di nodi). La popolazione iniziale può essere generata in maniera casuale da GA oppure messa in input. Come nell'evoluzione naturale, la popolazione per passare alla generazione successiva, attraversa le fasi di selezione, mutazione e crossover.

2.1.1 Selezione

La selezione è la scelta dei genitori per la prossima generazione. Per prima cosa viene fatta una classifica delle persone, in base a quanto ottimizzano la funzione obbiettivo. Da questa lista si scelgono poi le persone da usare in base a certi criteri. Noi ne abbiamo usati principalmente due: roulette e tournament. Roulette dà una percentuale a ogni persona: bassa se è in cima alla classifica, alta se in fondo. Poi in maniera casuale si sceglie chi selezionare. Tournament invece crea un torneo in cui partecipa tutta la popolazione: ci sono sfide tra un numero prefissato di persone e passa al turno successivo del torneo solo la migliore di ogni gruppo. Questo criterio permette con sicurezza che la persona migliore sia selezionata mentre quello Roulette permette maggiore aleatorietà anche a costo di perdere un ipotetico genitore migliore.

2.1.2 Mutazione

Alcune nuove persone subiscono una mutazione. Ci sono diversi modi per gestire questa mutazione. Noi abbiamo usato una distribuzione Gaussiana

centrata nello zero. Uno dei vantaggi di questa impostazione è stata la possibilità di scegliere separatamente la deviazione standard della prima e delle altre generazioni.

2.1.3 Crossover

In questa fase viene gestita la creazione dei figli: avviene una combinazione tra i due genitori per dar vita ad una nuova persona. Ci sono diversi modi per gestire questa combinazione. Noi abbiamo usato principalmente Scattered, TwoPoint e Intermediate. Scattered per prima cosa crea un vettore binario casuale. Il figlio avrà la i-esima componente (o gene) uguale a quella del primo genitore, se il vettore casuale ha la i-esima componente uguale a 1, altrimenti avrà tale componente uguale a quella del secondo genitore. TwoPoint per prima cosa sceglie in maniera random due interi m e n tra 1 e il numero di variabili. L'algoritmo poi prende le componenti(o geni) con indice minore o uguale ad m e quelle con indice maggiore di n dal primo genitore mentre tutte le altre dal secondo. Intermediate crea invece i figli con una media pesata dei genitori. È controllata unicamente dal singolo parametro Ratio. Utilizzando una forma simbolica: figlio=genitore1+rand*Razio*(genitore2-genitore1) ove rand è un numero casuale tra 0 e 1. I primi due si sono rivelati forse più efficaci perché vanno a modificare la posizione dei punti in maniera meno drastica, agendo quasi componente per componente, mentre il terzo metodo crea una combinazione convessa dei genitori.

2.1.4 Altri parametri

Ora che abbiamo introdotto questi tre processi fondamentali illustreremo come viene creata la generazione successiva. Un numero prefissato di persone rimane uguale al genitore. Questo numero abbiamo preferito tenerlo basso (da 1 a 4) per rendere più aleatorio l'algoritmo. Delle restanti persone una parte viene gestita dal crossover, un'altra invece dalla mutazione. La percentuale di partizione tra queste due viene introdotta in input con un numero da 0 a 1. Essendo questo parametro particolarmente importante abbiamo provato molti numeri in tutto l'intervallo, concentrandoci maggiormente intorno allo 0.8 poiché ritenuta la configurazione migliore.
Il nostro problema di ottimizzazione è vincolato, e nulla impedisce al crossover o alla mutazione di creare persone fuori dai nuovi vincoli: per questo abbiamo dovuto inserire un numero elevato come penalità. Se un punto esce dal disco automaticamente gli viene associato un alto valore in funzione obiettivo e quindi nella prossima generazione verrà scartato.
Un'impostazione, che abbiamo usato per aumentare l'aleatorietà, è di sud-

dividere la popolazione in città e far agire l'algoritmo separatamente per ognuna di queste. Inoltre ogni 20 o 30 generazioni le varie città si scambiano una certa percentuale di persone.
Altra scelta che abbiamo fatto è stato legare GA con un altro algoritmo di ricerca: il Patternsearch. Una volta che GA termina i suoi processi patternsearch inizia. Ma vedremo nel dettaglio, nella prossima sezione, come agisce questo algoritmo.
Un aspetto da considerare è la dimensione della popolazione: in teoria anche questo parametro può influenzare la convergenza e la sua velocità, poiché una popolazione più grande fornisce una varietà nell'evoluzione maggiore e maggiori capacità di esplorazione in varie regioni. Per questo motivo in [2] si osserva che una popolazione di 10N, ove N è il numero di parametri da parametrizzare, è sicuramente buono. Tuttavia con le sperimentazioni fatte sempre in [2] si osserva che già con 100 individui si hanno ottimi risultati con un costo computazionale molto più basso. Per questi motivi abbiamo deciso di utilizzare anche noi 100 in questo parametro. Altri parametri importanti sono il numero di generazioni totali e di stallo. Facile capire che questi parametri ci indicano la durata del nostro processo: un numero molto alto consentirà la convergenza. Abbiamo posto 500 per il primo e 100 per il secondo. A livello sperimentale abbiamo verifica la bontà di tali scelte.

2.1.5 Alcune considerazioni

Come abbiamo illustrato nei paragrafi precedenti, ad ogni iterazione (o generazione), viene selezionata una popolazione più adatta e l'algoritmo dovrebbe convergere al minimo globale. Sfortunatamente non esiste alcuna garanzia teorica di convergenza locale: il metodo è soggetto alla possibilità di stagnazione in un minimo locale. Analogamente, la velocità di convergenza non è stimabile a causa della natura aleatoria. Ricordiamo comunque con algoritmo simile è stato usato con successo già in [2] in un problema analogo di minimizzare la costante di Lebesgue.

2.2 Direct search (Pattern Search)

Direct search è un metodo per risolvere problemi di ottimizzazione che non richiede alcuna informazione circa il gradiente della funzione obiettivo. A differenza dei metodi di ottimizzazione tradizionali che utilizzano informazioni sul gradiente o più derivate per cercare un punto ottimale, un algoritmo di ricerca diretta cerca in un insieme di punti intorno al punto attuale, cercandone uno cui il valore della funzione obiettivo è inferiore al valore nel

punto corrente. È possibile utilizzare DirectSearch per risolvere i problemi per i quali la funzione obiettivo non è derivabile, o non continua.

In Matlab sono implementati tre algoritmi di DirectSearch: generalized pattern search (GPS) , the generating set search(GSS) , e the mesh adaptive search (MADS). Questi algoritmi sono tutti inglobati nella routine Pattern Search presente nel pacchetto "Global Optimization Toolbox". Ad ogni passo, questa routine cerca un insieme di punti, chiamato mesh, attorno al corrente punto, calcolato al passo precedente o al dato iniziale. La mesh è formata aggiungendo al punto corrente una combinazione lineare di vettori chiamati pattern. Se l'algoritmo trova un punto nella maglia che migliora la funzione obiettivo rispetto al punto corrente, il nuovo punto diventa il punto corrente al passaggio successivo dell'algoritmo. Si crea così una successione di punti che convergerà ad un minimo.

L'algoritmo GPS utilizza vettori direzionali fissi. L'algoritmo GSS è identico all'algoritmo GPS, tranne quando ci sono vincoli lineari, e quando il punto corrente è vicino a un confine vincolo lineare. L'algoritmo MADS utilizza una selezione casuale di vettori per definire la rete.

2.2.1 Parametri

Intuibile che come primo parametro dobbiamo scegliere quale usare tra gli algoritmi di cui sopra abbiamo discusso: noi ci siamo focalizzati sul primo. C'è la possibilità di decidere se verificare tutti i punti della mesh o solo alcuni: noi abbiamo optato per la prima soluzione anche se in questo modo abbiamo un costo computazionale più alto. Altra opzione è quella di far eseguire un altro algoritmo dopo che questo ha concluso: nel caso in cui routine venisse utilizzata non da sola abbiamo deciso di spegnere questa funzione.

2.3 Combinazione di GA con Patternsearch

Esistono risultati teorici che garantiscono che, combinando un algoritmo genetico con uno di Direct Search, la convergenza a un minimo globale è assicurata. Per questo motivo noi abbiamo scelto di combinare Ga con Patternsearch. Sfortunatamente non esistono simili risultati riguardo la velocità di convergenza.

3 Funzione obiettivo

Per quanto riguarda il calcolo della costante di Lebesgue di ogni insieme di punti $\mathcal{P} = \{z_i\}$ unisolvente su Ω, abbiamo in parte utilizzato le tecniche

presenti in [1]. Data una mesh di riferimento sufficientemente fitta X ma di cardinalitá finita, si valuta la costante di Lebesgue Λ_n sui punti test di X (invece che su tutto il dominio) e si suppone

$$\Lambda_n(\mathcal{P}) = \|\mathcal{L}_n\| = \max_{z\in\Omega} \lambda_n(z;\mathcal{P}) \approx \max_{z\in X} \lambda_n(z,\mathcal{P})$$

dove λ_n é la funzione di Lebesgue:

$$\lambda_n(z,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{N} |L_i(z)|\,, \quad z \in \Omega$$

Tale procedimento è lecito perché queste sono mesh debolmente ammissibili. In [6] si definisce *Mesh Debolmente Ammissibile* di Ω una successione di sottoinsiemi discreti $\mathcal{A}_n \in \Omega$ tali che

$$\|p\|_\Omega \leq \; C(\mathcal{A}_n)\, \|p\|_{\mathcal{A}_n}\,, \forall p \in \mathbb{P}_n^d(\Omega)$$

con $card(\mathcal{A}_n) \geq \; N$ e $C(\mathcal{A}_n)$ abbia una crescita al massimo in modo polinomiale in n. Se inoltre $C(\mathcal{A}_n)$ è limitata si parla di *Mesh Ammissibile*. Utilizziamo quindi griglie che determinano la norma dei polinomi a meno di costanti. In questo caso, abbiamo usato $\mathcal{A}_n$ aventi al massimo di $250^2 = 62500$ punti, come già in [1, 2].
In questo modo abbiamo che

$$\left|\Lambda_n(\mathcal{P}) - \tilde{\Lambda}_n(\mathcal{P})\right| \leq \; \left|\max_{x\in\Omega} \textstyle\sum_{i=1}^{N} |L_i(x)| - \max_{x\in\mathcal{A}_n} \sum_{i=1}^{N} |L_i(x)|\right| \leq$$

$$\leq \; \left|\textstyle\sum_{i=1}^{N} \|L_i\|_\Omega - \|L_i\|_{\mathcal{A}_n}\right| \leq \; \left|\textstyle\sum_{i=1}^{N} (C(\mathcal{A}_n) - 1)\, \|L_i\|_{\mathcal{A}_n}\right| \leq$$

$$\leq \; N\,|C(\mathcal{A}_n) - 1| \max_{i=1..N} \|L_i\|_{\mathcal{A}_n}$$

ove con $\tilde{\Lambda}_n(\mathcal{P})$ abbiamo indicato la costante di Lebesgue ristretta all'insieme $\mathcal{A}_n$. L'uso di queste mesh, è una garanzia che la discretizzazione del dominio scelta è buona e, valutando la funzione di Lebesgue esclusivamente su questi nodi, si ottiene una buona approssimazione della costante di Lebesgue.

4 Un primo approccio

Di seguito, intendiamo calcolare punti unisolventi per l'interpolazione sul disco unitario

$$\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

che abbiano costante di Lebesgue particolarmente piccola. Il proposito é determinare set di punti per cui questo valore sia inferiore a quello ottenuto nei lavori [1,2,7]. Per prima cosa abbiamo modificato i codici di [1] utilizzando prima un algoritmo genetico (che abbrevieremo con GA) e poi Pattern-Search al posto di `fmincon`. Ricordiamo a tal proposito che le routines Matlab `ga` e `patternsearch` implementano tali ottimizzatori. Dopo una prima fase di taratura dei suddetti algoritmi di ottimizzazione, nonostante la capacità di sorpassare possibili minimi locali ma non globali, abbiamo riottenuto le configurazioni di punti di [1] e quindi non abbiamo migliorato il valore minimo della costante di Lebesgue.

Nel caso di GA abbiamo riscontrato il problema, che impostando una popolazione iniziale casuale la convergenza era troppo lenta, impedendo di raggiungere risultati positivi in tempi ragionevoli. Per gradi bassi come 6 e 7 dopo venti ore di calcolo eravamo ancora ben lontani da una costante di Lebesgue paragonabile con quella trovata da [1] e [2]. Inoltre spesso abbiamo notato la difficoltà da parte dell'algoritmo di uscire da intorni di un minimo locale: di frequente infatti l'algoritmo rimaneva fermo nello stesso intorno anche per diverse ore. Problemi di stagnazione simili si sono presentati, impostando come popolazione iniziale, configurazioni di punti particolarmente "buone" come i quasi-punti di Lebesgue e di Fekete trovati da [1]. Pur variando molto i parametri dell'algoritmo, non siamo riusciti ad evitare questo stagnamento.

Con Pattern-Search, invece, abbiamo cercato, a livello locale, miglioramenti negli intorni dei punti "buoni" trovati da [1]. Anche in questo caso non abbiamo avuto fortuna: nell'intorno della nostra ricerca i punti iniziali risultavano essere quelli con la costante di Lebesgue più bassa.

Non abbiamo avuto migliori risultati combinando insieme GA con Patternsearch: partendendo da un punto iniziale casuale la convergenza si è rivelata troppo lenta, partendo da punti noti è stato impossibile evitare fenomeni di stagnamento.

Abbiamo quindi abbandonato questo approccio spostando la nostra attenzione a tentativi di ottimizzare la costante di Lebesgue per punti con configurazioni particolari.

5 Secondo approccio: punti vincolati su cerchi concentrici

Riprendendo un'idea presente in [7] siamo riusciti a trovare dei miglioramenti rispetto a [1, 2, 7] per la ricerca dei punti di Lebesgue. Nel caso di interpolazione con un polinomio di grado n in $\mathbb{R}^2$ determineremo insiemi unisolventi composti di N=$\binom{n+2}{n}$ punti che saranno opportunamente disposti in $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ cerchi. Dividiamo i cerchi in k gruppi:

$$v_1 + ... + v_k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \qquad v_i \in \mathbb{N} \qquad i = 1, .., k.$$

col j-esimo gruppo che contiene v_j cerchi di raggio rispettivamente di $r_1^{(j)}, ..., r_{v_j}^j$. In ogni cerchio del j-esimo gruppo poniamo $2n_j + 1$ nodi equidistanti rispetto all'angolo. La scelta di n_j è data da:

$$n_1 = n - v_1 + 1,$$

$$n - 2 = n - 2v_1 - v_2 + 1,$$

$$\vdots$$

$$n_k = n - 2v_1 - ... - 2v_{k-1} - v_k + 1.$$

Si può verificare facilmente che

$$v_1 \cdot (2n_1 + 1) + ... + v_k \cdot (2n_k + 1) = N + 1$$

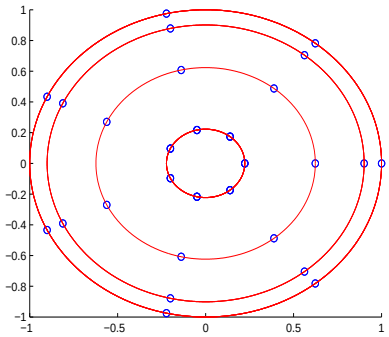
A questo punto rimangono da fare principalmente tre scelte: la lunghezza dei raggi, l'angolazione tra un fissato punto di interpolazione di ogni cerchio con un determinato semiasse e la suddivisione nei k gruppi.

5.1 La suddivisione in k gruppi

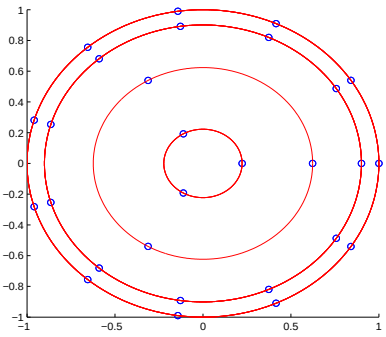
In [7], gli autori asseriscono che, al crescere del numero dei gruppi di cerchi, k, la costante di Lebesgue decresce. Vediamo nel dettaglio tale fenomeno per n=6. In questa situazione usiamo come configurazione per i raggi, i nodi positivi di Chebyshev-Lobatto nell'intervallo [-1,1] di grado 8 o nel caso che ci sia solo un punto nel cerchio più interno, di grado 7. Sul k-simo cerchio, equidistribuiti rispetto all'angolo disponiamo $2n_k + 1$ punti, supponendo che il primo di questi punti abbia ordinata il cui valore é 0.

1. per k=1, abbiamo la scelta obbligata di $v_1 = 4$ e troviamo una configurazione con 7 nodi equispaziati in ciascuno dei 4 cerchi come in figura 2(a). In tal caso risulta una costante di Lebesgue di 4025.6;

Figura 1:



(a) $k = 1$

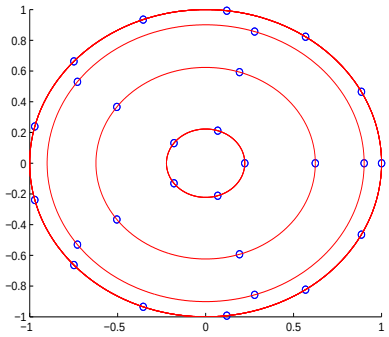


(b) $k = 2$, primo caso

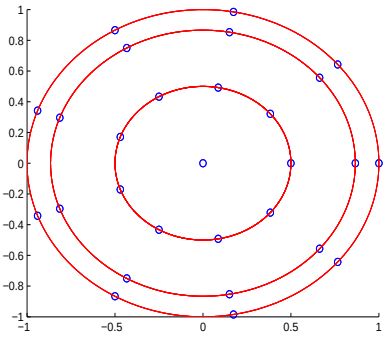
2. per k=2 abbiamo diverse configurazioni possibili:

   - se $v_1 = 2$ e $v_2 = 2$ troviamo una configurazione con 3 punti equispaziati nei due cerchi interni e 11 nei due esterni come in figura 2(b).In tal caso risulta una costante di Lebesgue di 67.2376;
   - Prendendo invece $v_1 = 1$ e $v_2 = 3$ troviamo una configurazione con 13 punti equispaziati nel cerchio esterno e 5 nei tre interni interni come nella figura 3(a). In tal caso risulta una costante di Lebesgue di 98.1135;

Figura 2:



(a) $k = 2$, secondo caso



(b) $k = 2$, terzo caso

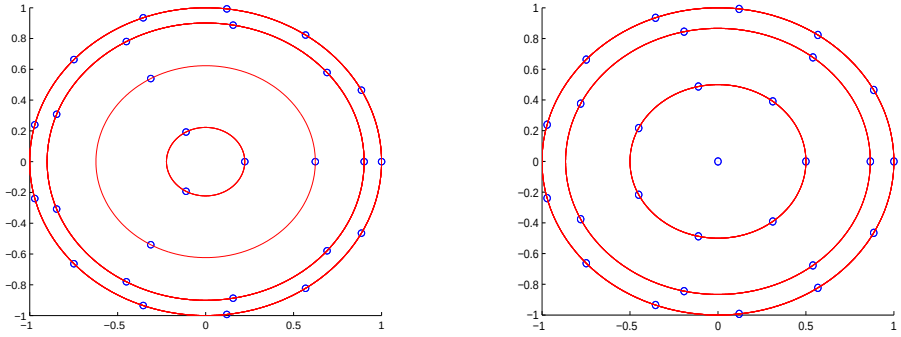
   - Viceversa prendendo $v_1 = 3$ e $v_2 = 1$ otteniamo una configurazione con 9 punti equispaziati nei tre cerchi esterni e solo 1 in quello

interno come nella figura 3(b). In tal caso risulta una costante di Lebesgue di 546.47;

3. Anche con k=3 abbiamo diverse possibili configurazioni

   - se $v_1 = 1$, $v_2 = 1$ e $v_3 = 2$ otteniamo una configurazione con 13 punti equispaziati nel cerchio esterno, 9 in quello intermedio e 3 nei due interni come in figura 4(a). In tal caso abbiamo una costante di Lebesgue di circa 13.52;

Figura 3:



(a) $k = 3$, primo caso

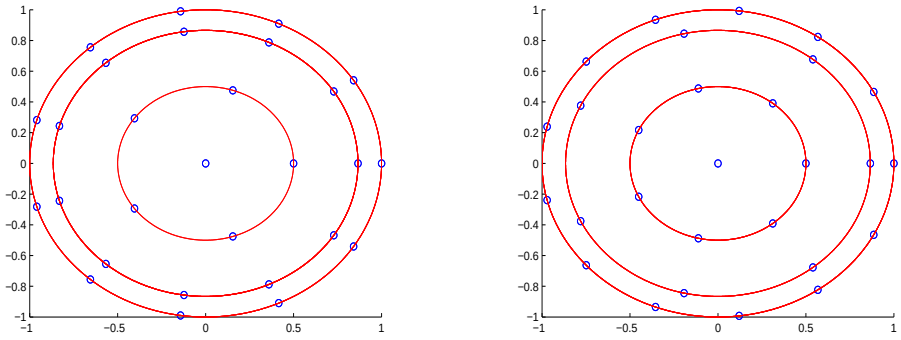
(b) $k = 3$, secondo caso

   - se $v_1 = 1$, $v_2 = 2$ e $v_3 = 1$ troviamo 13 punti nel cerchio esterno, 7 punti nei due intermedi e 1 in quello interno come in figura 4(b).In tal caso abbiamo una costante di Lebesgue di circa 20.63;
   - se $v_2 = 2$, $v_2 = 1$ e $v_3 = 1$ otteniamo una configurazione con 11 punti equispaziati nei due cerchi esterni, 5 in quello intermedio e 1 in quello interno come in figura 5(a). In tal caso abbiamo una costatante di Lebesgue di circa 56.74;

4. Per k=4 abbiamo un'unica configurazione possibile con $v_1 = 1$, $v_2 = 1$, $v_3 = 1$ e $v_4 = 1$ ovvero con 13 punti equispaziati nel cerchio esterno, 9 in quello successivo, 5 in quello intermedio e solo 1 in quello interno come in figura 5(b).In tal caso abbiamo una costante di Lebesgue di 5.48.

Abbiamo visto dunque che nel caso n=6 la costante di Lebesgue decresce al crescere del numero dei gruppi dei cerchi. Considerazioni simili possono essere fatte per tutti i gradi.

Figura 4:



(a) $k = 3$, terzo caso

(b) $k = 4$

5.2 La scelta dell'angolo

In precedenza abbiamo richiesto che il k-simo cerchio contenesse il punto $(r_k \cdot \cos(\theta), r_k \cdot \sin(\theta))$ con $\theta = 0$.

Supponiamo ora che sul k-simo disco siano piú in generale distribuiti m punti

$$x_j^{(k)} = (r_k \cdot \cos(\theta_k + s), r_k \cdot \sin(\theta_k)), \ \ k = 1, \ldots, m,$$

con θ_k arbitrario e $s = 2\pi/m$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
EC	1.67	1.99	2.69	3.32	3.86	4.42	5.20	5.80	6.77	7.85
EC-opt	1.67	1.99	2.62	3.30	3.84	4.35	5.17	5.78	8.70	7.80

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
EC	9.00	10.44	12.54	14.82	17.39	21.56	26.48	32.27	40.14	50.83
EC-opt	8.85	10.36	12.34	14.43	17.28	20.96	25.60	31.92	39.49	49.06

Tabella 1: Confronto tra le costanti di Lebesgue di set di punti aventi configurazioni con raggi dati dai nodi di Expanded-Chebyshev positivi di grado n+1 con angoli casuali con quelli ottenuti tramite ottimizzazione con GA.

Risulta lecito domandarsi se una scelta opportuna di questi θ_k migliori decisamente la costante di Lebesgue rispetto alle altre.

Consideriamo le configurazioni con raggi con una lunghezza uguale alla distanza dall'origine ai nodi expandend-Chebyshev positivi di grado $n+1$ e con

la divisione ottimale in gruppi trovata nel paragrafo precedente. Presentiamo nella Tabella 5.2 un confronto tra le costanti di Lebesgue ottenute con angoli casuali con quelle ottenute ottimizzando sull'angolo indicati rispettivamente con EC e EC-opt.

Ottimizzando sugli angoli θ_k la funzione obiettivo tramite GA, seguito da Pattern-Search, come si deduce dalla tabella, i miglioramenti sulla costante di Lebesgue sono molto limitati.

5.3 Confronto tra alcune configurazioni di raggi

Dando per accettata la configurazione ottimale trovata nella sezione 5.1, facciamo un confronto tra famiglie di punti i cui raggi corrispondano ai valori non negativi di classiche famiglie di punti in $[-1, 1]$.

Riportiamo una tabella e un grafico con alcuni valori della costante di Lebesgue, ottenuti con la costruzione di cui abbiamo discusso sopra, utilizzando, per stabilire i raggi, le varie famiglie classiche di nodi oltre ai nodi equispaziati e ai punti di Lebesgue trovati da [2] per l'intervallo. Indicheremo i nodi Expandend Chebyshev con EC, i Chebyshev-Lobatto con CL, i Gauss-Legendre-Lobatto con LL, i quasi punti di Lebesgue trovati da [2] per l'intervallo con M e i nodi equispaziati con Eq.

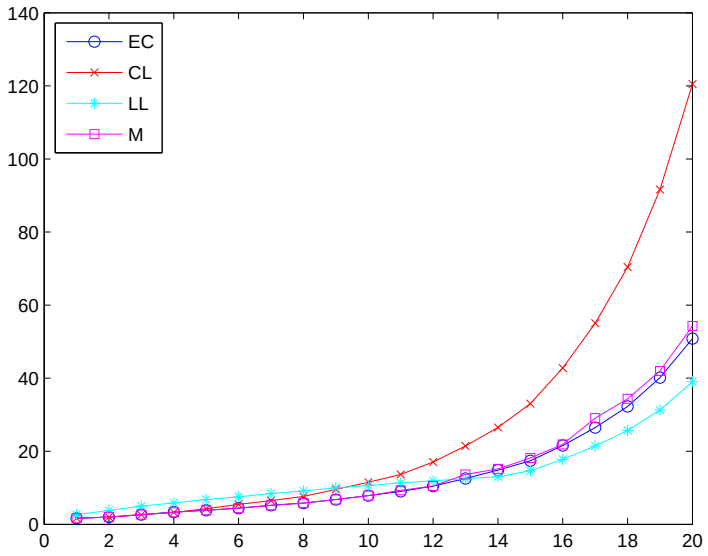
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
EC	1.67	1.99	2.69	3.32	3.86	4.42	5.20	5.80	6.77	7.85
CL	1.67	1.99	2.63	3.24	4.29	5.48	6.49	7.63	9.56	11.52
GLL	2.64	3.80	4.99	5.87	6.80	7.50	8.45	9.14	9.99	10.61
M	1.67	1.99	2.65	3.32	3.85	4.43	5.22	5.82	6.79	7.87
Eq	1.67	1.99	2.63	3.95	4.28	7.84	7.55	17.33	16.63	46.25

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
EC	9.00	10.44	12.54	14.82	17.39	21.56	26.48	32.27	40.14	50.83
CL	13.66	17.06	21.47	26.50	33.01	42.77	55.06	70.45	91.62	120.50
GLL	11.33	11.91	12.52	12.99	14.69	17.76	21.45	25.69	31.30	39.02
M	9.29	10.49	13.63	15.16	18.17	21.89	29.08	34.37	41.99	54.28
Eq	42.07	139.3	118.6	445	360	1487	1145	5100	3749	17842

Tabella 2: Confronto tra le costanti di Lebesgue di set di punti aventi configurazioni con raggi dati da famiglie di nodi per gradi n compresi tra 1 e 20.

La tabella evidenzia come i punti equispaziati determinino come nel caso dell'intervallo un set di punti con un'alta costante di Lebesgue. Gli Expanded

Figura 5: Confronto tra le costanti di Lebesgue di set di punti aventi configurazioni con raggi dati da famiglie di nodi classiche.



Chebyshev e i punti di Lebesgue di [2] forniscono sets di punti con una costante simile: i primi risultano leggermente migliori per il nostro problema. In ogni caso, come si vede nel grafico i Expanded Chebyshev, i punti di [2] e i Gauss-Legendre-Lobatto hanno un ottimo andamento col crescere di n.

5.4 Ottimizzando sia su raggi sia su angoli

Illustriamo ora i risultati ottenuti ottimizzando tramite l'algoritmo genetico GA e Pattern-Search, prima sui raggi e poi sugli angoli. In [7] infatti si afferma che non risulta fondamentale ottimizzare il valore delle variabili angolari: in parte abbiamo verificato questa affermazione in 5.2. Abbiamo peró deciso di non trascurare completamente il valore delle variabili angolari ma semplicemente di considerarle in un secondo momento. In tal modo il tempo di esecuzione del nostro codice è risultato dell'ordine dei minuti per i gradi piu' bassi, mentre per quelli piu' alti e' stato comunque inferiore alle 10 ore. Durante tali processi abbiamo usato la divisione in gruppi ritenuta ottima nella sezione 5.1. Consci del fatto che l'ottimizzazione sugli angoli avrebbe inciso poco sul risultato finale, abbiamo utilizzato in questo caso un dato iniziale casuale. Riportiamo ora i risultati trovati da [1] e [2] confrontandoli con

quelli trovati da noi in questa sezione: nella tabella e nel grafico indichiamo con BSV quelli introdotti da[1], con M quelli descritti da [2] e con CYIB-Opt quelli calcolati in questo lavoro, seguendo idee presenti in [7].

Grado	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
BSV	1.67	1.99	2.47	2.97	3.50	4.30	5.08	5.43	6.73	7.62
M	1.67	1.99	2.47	2.97	3.49	4.10	5.00	5.38	6.54	7.14
CYIB-Opt	1.67	1.99	2.47	2.97	3.49	4.26	4.76	5.32	5.90	6.50

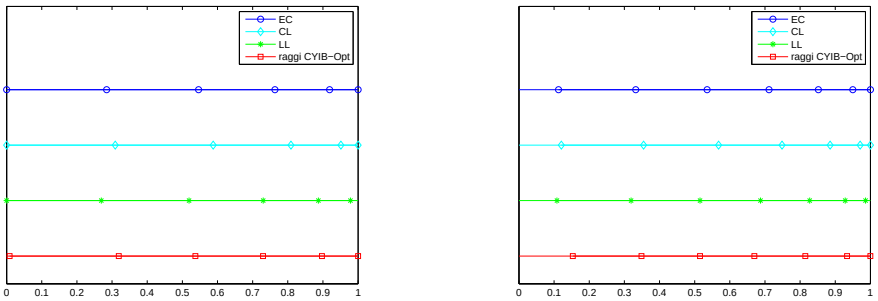
Grado	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
BSV	8.48	9.65	11.98	12.39	14.13	17.44	18.88	27.17	28.29	29.68
M	7.84	8.97	10.14	11.14	13.08	14.72	14.92	16.04	18.27	20.31
CYIB-Opt	7.20	7.93	8.73	9.64	10.65	11.82	13.13	14.63	16.46	18.45

Tabella 3: Confronto tra le costanti di Lebesgue trovate da noi con alcune presenti in letteratura

Come si nota dalle tabelle sulle costanti di Lebesgue, per gradi bassi i nuovi set di punti non migliorano gli ottimi risultati precedentemente ottenuti in [1] e [2], mentre hanno costanti di Lebesgue significativamente piú basse all'aumentare del grado.

5.4.1 Confronto con la configurazione di raggi particolari

Naturale ora domandarsi se la configurazione ottenuta ottimizzando sui raggi è simile a una di quelle ottenute usando le famiglie di nodi classiche per l'intervallo.



(a) $n = 10$ (b) $n = 13$

Figura 6: Distribuzioni di alcuni raggi notevoli per $n = 10$ e $n = 13$.

Nei grafici illustriamo solo i casi n=10 e n=13, pur avendo verificato che cio' accade anche piu' in generale per $n \leq 20$. Vediamo che tutti i nodi riportati nel grafico tendono ad essere più fitti verso 1 e più radi verso 0. I raggi che abbiamo ottenuto tramite l'ottimizzazione pur prossimi alle altre classiche famiglie di punti univariati, non sembrano coincidere con una delle stesse.

5.4.2 Confronto con altri autori

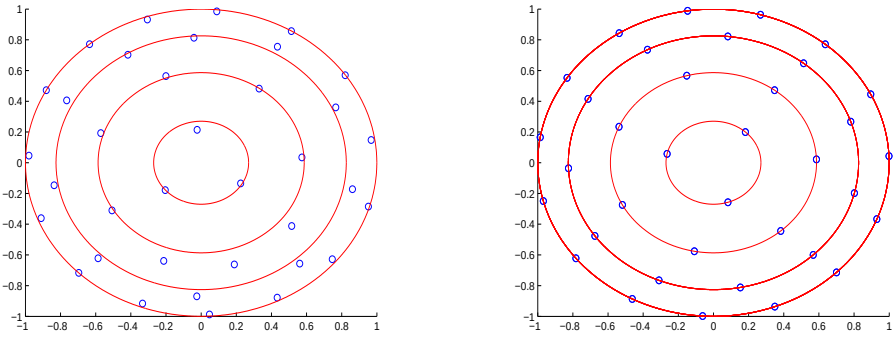
In questa sezione confrontiamo le configurazioni da noi ottenute con quelle presentate in [1]. Osserviamo che mentre in [1] i punti non hanno vincoli particolari, eccetto di stare nel disco unitario, quelli da noi introdotti, seguendo [7], richiedono di stare in cerchi concentrici e di avere una opportuna equispaziatura rispetto agli angoli.

Nelle figure 7, 8 e 9, confrontiamo le loro distribuzioni per i casi $n = 7$, $n = 13$ e $n = 20$. Denoteremo i punti descritti in [1] con BSV mentre quelli di questo lavoro con CYIB-Opt.

Le distribuzioni sono simili, con punti che in [1] sono approssimativamente su cerchi e equispaziati rispetto agli angoli, disposti in k poligoni regolari con numero di vertici uguale al numero dei nodi nel rispettivo cerchio della nostra configurazione.

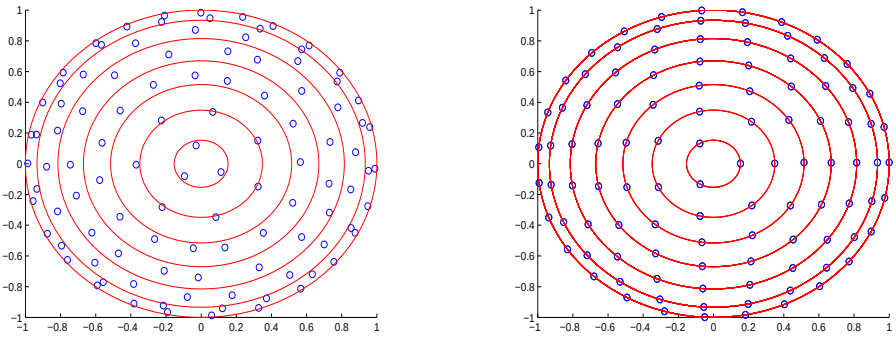
Nella Figura 10, confrontiamo le Costanti di Lebesgue proposte in [1], con quelle in [2] (denotate con M) e ottenute dalla nostra ottimizzazione.

Figura 7: Grado $n = 7$. A sinistra: distribuzione dei punti ottenuti in [1], denotati con BSV. A destra: distribuzione dei punti ottenuti in questo lavoro, denotati con CYIB-Opt.



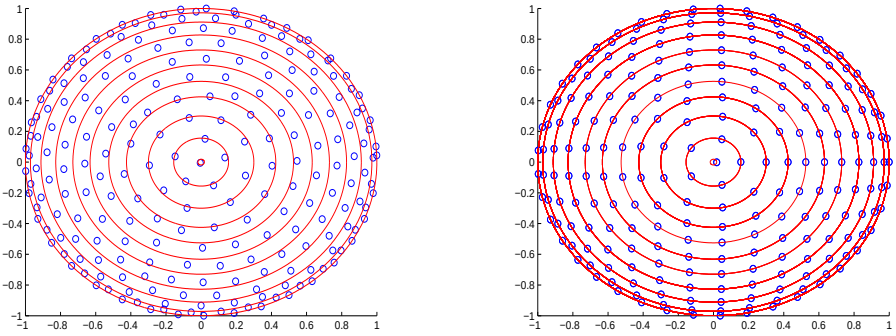
(a) BSV (b) CYIB-Opt

Figura 8: Grado $n = 13$. A sinistra: distribuzione dei punti ottenuti in [1], denotati con BSV. A destra: distribuzione dei punti ottenuti in questo lavoro, denotati con CYIB-Opt.



(a) BSV (b) CYIB-Opt

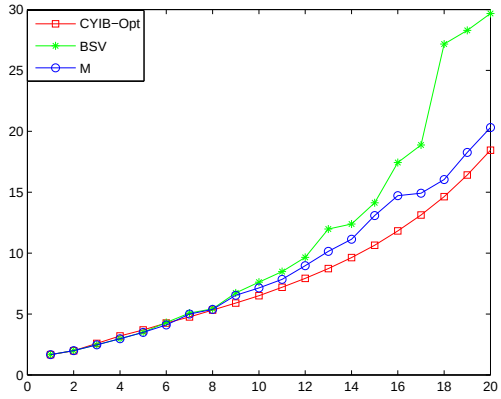
Figura 9: Grado $n = 20$. A sinistra: distribuzione dei punti ottenuti in [1], denotati con BSV. A destra: distribuzione dei punti ottenuti in questo lavoro, denotati con CYIB-Opt.



(a) BSV

(b) CYIB-Opt

Figura 10: andamento delle costanti di Lebesgue di CYIB-Opt, di BSV e di M



Per completezza riportiamo anche delle tabelle (rispettivamente 4, 5) con i valori del determinante della matrice di Vandermonde V (rispetto la base di Koornwinder), del condizionamento di questa sia per i punti trovati in questa sezione sia per quelli trovati in [1] e [2]. Inoltre riportiamo i dati trovati da [1] circa i punti di Fekete.

Come si vede dalle tabelle, i valori assoluti determinanti di V hanno valori molto elevati prossimi a quelli dei punti di Fekete, ció nonostante tali matrici restano ben condizionate.

valore assoluto del determinante di Vandermonde					
Grado	1	2	3	4	5
BSV	$4.95E{-}1$	$2.12E0$	$2.97E{+}1$	$2.07E{+}3$	$7.03E{+}5$
M	$4.95E{-}1$	$2.12E0$	$2.97E{+}1$	$2.11E{+}3$	$7.11E{+}5$
CYIB-Opt	$4.95E{-}1$	$3.69E{-}1$	$2.91E{+}1$	$1.21E{+}3$	$1.32E{+}6$
BSV-F	$4.95E{-}1$	$2.13E+0$	$3.44E+1$	$3.49E+3$	$2.03E+6$

Grado	6	7	8	9	10
BSV	$1.10E{+}10$	$4.15E{+}13$	$2.87E19$	$1.74E{+}25$	$2.28E{+}34$
M	$1.03E{+}10$	$4.14E{+}13$	$2.96E{+}19$	$2.29E{+}25$	$1.52E{+}34$
CYIB-Opt	$8.09E{+}9$	$2.27E{+}14$	$7.18E{+}18$	$1.02E{+}26$	$1.43E{+}34$
BSV-F	$1.13E+10$	$4.20E+14$	$1.81E+20$	$1.02E+27$	$6.72E+34$

Grado	11	12	13	14	15
BSV	$2.96E{+}38$	$1.06E{+}48$	$4.08E{+}58$	$2.34E{+}76$	$2.38E{+}89$
M	$2.52E{+}43$	$8.91E{+}52$	$2.30E{+}60$	$7.24E{+}75$	$1.65E{+}89$
CYIB-Opt	$5.76E{+}42$	$3.82E{+}52$	$2.99E{+}63$	$6.70E{+}73$	$1.90E{+}85$
BSV-F	$4.88E+43$	$6.51E+53$	$7.11E+64$	$3.04E+77$	$1.57E+91$

Grado	16	17	18	19	20
BSV	$3.51E{+}97$	-	-	-	-
M	$4.36E{+}99$	$8.42E{+}119$	$1.76E{+}137$	$3.93E{+}155$	$7.96E{+}176$
CYIB-Opt	$2.33E{+}103$	$3.71E{+}116$	$7.90E{+}135$	$2.58E{+}153$	$6.75E{+}173$
BSV-F	$6.74E+105$	$3.22E+122$	$9.56E+139$	$8.85E+158$	$3.72E+179$

Tabella 4: Confronto tra i determinanti della matrice di Vandermonde per i set di punti BSV (cf. [1]), M (cf. [2]), i nuovi CYIB-Opt oltre i punti BSV-F (di [1] che hanno determinante particolarmente elevato.

Numero di condizionamento della matrice di Vandermonde.					
Grado	1	2	3	4	5
BSV	$2.98E0$	$5.33E0$	$1.08E{+}1$	$1.32E{+}1$	$1.55E{+}1$
M	$2.98E0$	$5.13E0$	$1.08E{+}1$	$1.49E{+}1$	$2.12E{+}1$
CYIB-Opt	$2.98E0$	$5.43E0$	$1.05E{+}1$	$1.43E{+}1$	$1.93E{+}1$
BSV-F	$2.99E0$	$5.33E+0$	$1.06E+1$	$1.39E+1$	$1.65E+1$
Grado	6	7	8	9	10
BSV	$2.84E{+}1$	$2.55E{+}1$	$3.58E{+}1$	$5.34E{+}1$	$6.37E{+}1$
M	$2.84E{+}1$	$2.83E{+}1$	$3.53E{+}1$	$5.52E{+}1$	$6.95E{+}1$
CYIB-Opt	$2.77E{+}1$	$3.35E{+}1$	$4.33E{+}1$	$4.48E{+}1$	$6.33E{+}1$
BSv-F	$2.65E+1$	$3.28E+1$	$4.33E+1$	$4.80E+1$	$6.09E+1$
Grado	11	12	13	14	15
BSV	$7.85E{+}1$	$1.06E{+}1$	$9.55E{+}1$	$1.18E{+}2$	$1.52E{+}2$
M	$7.82E{+}1$	$1.07E{+}1$	$1.24E{+}2$	$1.49E{+}2$	$1.59E{+}2$
CYIB-Opt	$7.12E{+}1$	$8.06E{+}1$	$1.16E{+}2$	$3.66E{+}3$	$1.73E{+}4$
BSV-F	$6.88E+1$	$7.40E+1$	$1.09E+2$	$1.12E+2$	$1.25E+2$
Grado	16	17	18	19	20
BSV	$1.43E{+}2$	-	-	-	-
M	$2.12E{+}2$	$2.12E{+}2$	$2.66E{+}2$	$2.96E{+}2$	$3.44E{+}2$
CYIB-Opt	$1.65E{+}2$	$1.97E{+}2$	$2.39E{+}2$	$1.34E{+}3$	$4.05E{+}2$
BSV-F	$2.32E+2$	$2.42E+2$	$2.22E+2$	$3.60E+2$	$2.44E+2$

Tabella 5: Confronto tra i condizionamenti della Matrice di Vandermonde per i set di punti BSV (cf. [1]), di M (cf. [2]) e i nuovi CYIB-Opt, oltre i punti BSV-F che hanno valore assoluto del determinante di Vandermonde particolarmente elevato.

5.4.3 Confronto con la teoria

In [9] si ricorda che la stima teorica della costante di Lebesgue per i punti di Lebesgue nel disco: $\Lambda_n = O(\sqrt{n+1})$. Vogliamo ora confrontare la costante di Lebesgue dei punti trovati con questa puramente teorica.

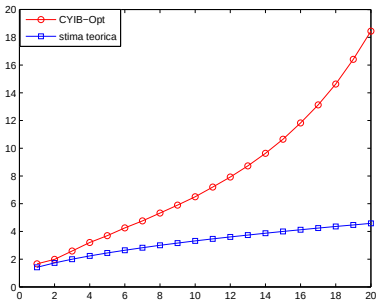
Nel grafico 12(a) abbiamo rappresentato l'andamento di $\Lambda_n = \sqrt{n+1}$ e le costanti di Lebesgue $\tilde{\Lambda}_n$ trovate nella sezione 5.4 (indicate con CIYT):. Si vede subito che, pur a meno di una costante moltiplicativa, l'andamento non sembra essere lo stesso, specialmente per gradi prossimi a 20.

Se l'andamento fosse asintoticamente uguale, il rapporto

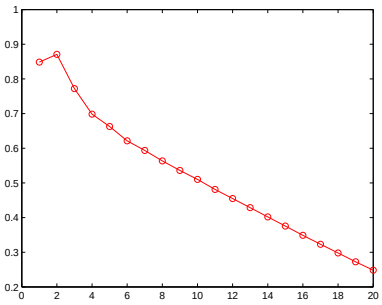
$$\frac{\sqrt{n+1}}{\tilde{\Lambda}_n}$$

tenderebbe al crescere di n ad una costante.

Figura 11: Confronto tra la costante di Lebesgue dei punti CYIB-Opt con l'andamento asintotico dei punti di Lebesgue.



(a) Andamento delle costanti di Lebesgue



(b) Tapporto tra $\sqrt{n+1}$ e le costanti di Lebesgue trovate da CYIB-Opt.

Proponiamo la tabella 5.4.3 e il grafico 12(b) circa tali considerazioni.

grado	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sqrt{n+1}$	1.41	1.73	2.00	2.24	2.45	2.65	2.83	3.00	3.16	3.32
$\tilde{\Lambda}_n$	1.67	1.99	2.59	3.20	3.70	4.26	4.76	5.32	5.90	6.50
$\sqrt{n+1}/\tilde{\Lambda}_n = C$	0.85	0.87	0.77	0.70	0.66	0.62	0.59	0.56	0.54	0.51

grado	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\sqrt{n+1}$	3.46	3.61	3.74	3.87	4.00	4.12	4.24	4.36	4.47	4.58
$\tilde{\Lambda}_n$	7.20	7.93	8.73	9.64	10.65	11.82	13.13	14.63	16.42	18.45
$\sqrt{n+1}/\tilde{\Lambda}_n = C$	0.48	0.45	0.43	0.40	0.38	0.35	0.32	0.30	0.27	0.25

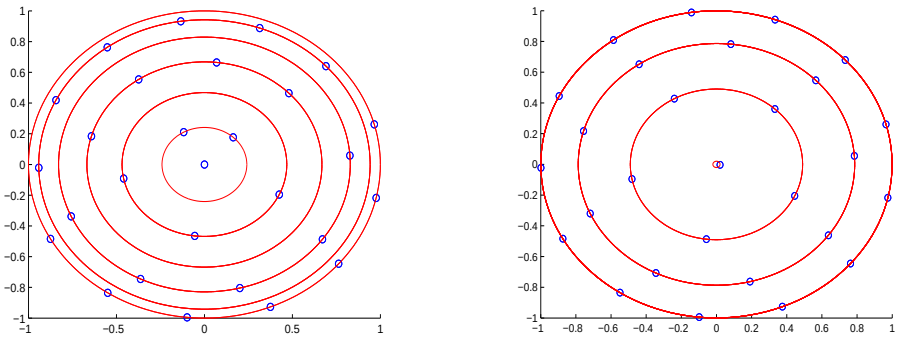
Tabella 6: Confronto tra le costanti di Lebesgue di CYIB-Opt con $\sqrt{n+1}$.

6 Possibili sviluppi

Ci poniamo il problema di trovare a partire da CYIB-Opt, configurazioni unisolventi che abbiano migliori costanti di Lebesgue.

Di conseguenza, alleggeriamo i vincoli, cercando configurazioni vicine a quelle di CYIB-Opt con migliori costanti di Lebesgue. Usiamo come punto di partenza la configurazione trovata nella sezione precedente. Come abbiamo visto i nodi sono disposti in cerchi concentrici. Ora consideriamo un determinato cerchio di raggio r che contiene $2n_k + 1$ nodi. Disponiamo i primi n_k nodi in un cerchio di raggio r_{k_1} e gli altri $n_k + 1$ nodi in un cerchio di raggio r_{k_2} senza modificarne l'angolo: nella figura 12 è presentato il confronto per $n = 6$ tra la vecchia configurazione e quella nuova data con raggi r_{k_i} uguali ai nodi di Chebyshev di grado 13. Ovviamente ponendo sia r_{k_1}, sia r_{k_2} uguali

Figura 12: Confronto oer n=6 tra vecchia e nuova configurazione



(a) nuova configurazione

(b) vecchia configurazione

a r_k per ogni k. tale configurazione risulterà uguale alla vecchia.
Agendo in questo modo abbiamo visto che abbiamo disposto tutti i nodi in n+1 cerchi. A questo punto ottimizziamo tramite `ga` r `patternsearch` identificando come incognite i raggi degli $n + 1$ cerchi. Utilizzando come dato iniziale raggi tali da avere la configurazione trovata nella sezione 5.4, siamo certi di non peggiorare il risultato. Proponiamo ora i risultati trovati con la tabella 7 e dei grafici circa tali nuove configurazioni.

Grado	6	7	8	9	10	11	12
CYIB-opt	4.26	4.76	5.32	5.90	6.50	7.20	7.93
CYIB-opt2	4.19	4.75	5.28	5.87	6.49	7.18	7.90

Grado	13	14	15	16	17	18	19	20
CYIB-opt	8.73	9.63	10.65	11.82	13.13	14.63	16.415	18.45
CYIB-opt2	8.72	9.62	10.62	11.76	13.08	14.60	16.29	18.14

Tabella 7: confronto tra le costanti di Lebesgue trovate in questa sezione (indicate con CYIB-opt2) con quelle trovate nella sezione 5.4 (indicate con CYIB-opt).

La Tabella 7 mostra che con questa tecnica abbiamo ottenuto piccoli miglioramenti, seppur ancora modesti. D'altra parte indica che i punti CYIB-opt non sono ottimali (cosa nota perché si sa teoricamente che la distribuzione di nodi sul cerchio di CYIB non e' ottimale).

A Alcuni dati

Riportiamo ora i raggi e gli angoli trovati nella sezione 5.4: da questi facilmente si possono recuperare i singoli punti.

n=1, Costante di Lebesgue: 1.67	
raggi	angoli
1.0000000000000000	-0.5360658176023683

n=2, Costante di Lebesgue: 1.99	
raggi	angoli
0.0501412131798916	0.5153562929508685
1.0000000000000000	-0.5360653836472800

n=3, Costante di Lebesgue: 2.47	
raggi	angoli
0.4679820687982619	0.6121850120941608
0.9922533482313156	0.7619954732948395

n=4,Costante di Lebesgue: 2.97	
raggi	angoli
0.0597749650478364	0.8496021924106213
0.6673011466621492	0.0720945171727454
0.9741323143243790	0.0029377280900289

n=5, Costante di Lebesgue: 3.49	
raggi	angoli
0.3331279963027359	0.8346023697260052
0.7482138764188286	0.6703890566245899
0.9935782036455215	0.6279469971218775

n=6, Costante di Lebesgue: 4.26	
raggi	angoli
0.0204461514949799	-0.1565667484475872
0.4902358284444396	0.8250282120957410
0.7865588559125651	0.7685327244649982
0.9992146641016007	0.7473053362691920

n=7, Costante di Lebesgue: 4.76	
raggi	angoli
0.2701259148120880	0.8325245107173920
0.5864102960109711	0.9354058859586716
0.8258213682651520	0.3292158101320267
0.9996177076578140	0.4618112205743790

n=8, Costante di Lebesgue: 5.32	
raggi	angoli
0.0073638911008835	2.6760407668590545
0.3783044869422912	0.3751779296875000
0.6390220703125000	0.8143196695327759
0.8572000000000000	0.5116545382499695
1.0000000000000000	1.0861805424690247

n=9, Costante di Lebesgue: 5.90	
raggi	angoli
0.2281401437282562	0.0219051558017731
0.4770650120735169	-0.0020005364418030
0.6841000000000000	0.0131000000000000
0.8769034719705582	0.0170064671039581
0.9966717937946320	0.0147901950359344

n=10, Costante di Lebesgue: 6.50	
raggi	angoli
0.0084579621315002	0.1506734061717987
0.3192393871545792	0.0009898641586304
0.5371251961708069	0.0163923590898514
0.7296000000000000	0.0101779296875000
0.8971426769256592	0.0086548826694489
1.0000000000000000	0.0087738237380981

n=11, Costante di Lebesgue:7.20	
raggi	angoli
0.1618626478672028	0.0922528561115265
0.4029310242176056	0.0203948492765427
0.5862985115766526	0.0087529587268829
0.7637140666961670	0.0134395029783249
0.9113000000000000	0.0102000000000000
0.9999000000000000	0.0077000000000000

n=12, Costante di Lebesgue:7.93	
raggi	angoli
0.0134378658771515	-0.8066954908370971
0.2585437647104263	-0.0033923553586006
0.4687437332153320	0.0158562098979950
0.6298000000000000	0.0109114589929581
0.7917879151582717	0.0089289431333542
0.9231000000000000	0.0116005364418030
0.9999999850988388	0.0132779296875000

n=13, Costante di Lebesgue:8.73	
raggi	angoli
0.1532199110031128	0.0075092447996140
0.3487236098766327	0.0046431737422943
0.5153000000000000	0.0152833520174026
0.6699001473188401	0.0102781714916229
0.8147649077653885	0.0087838654279709
0.9337370276927948	0.0090777542591095
0.9999879896640778	0.0086549107789993

n=14, Costante di Lebesgue:9.64	
raggi	angoli
0.0146180314064026	-0.0339168361663818
0.2272806511878967	1.0319699355125427
0.4164489120483398	1.0177344057559967
0.5565876286506652	1.0087047964811324
0.7038138844966888	1.0077924769401549
0.8342079223394394	1.0093376274585724
0.9423193498373031	1.0104341155290604
1.0000000000000000	1.0113154924631118

n=15, Costante di Lebesgue:10.65	
raggi	angoli
0.1190022724151611	0.0035097047209740
0.2997729266166687	0.0093276866912842
0.4583072734594345	0.0093807195901871
0.5963000000000001	0.0159242011785507
0.7292202208757400	0.0125567138195038
0.8518155436038971	0.0063822097063065
0.9487023692846298	0.0020596561193466
1.0000000000000000	0.0012639452934265

n=16, Costante di Lebesgue:11.82	
raggi	angoli
0.0116734451293945	0.8913270408630372
0.2038372586488724	0.0493280541419983
0.3634565512657166	0.0184412667274475
0.5043260319948196	0.0104779296875000
0.6289943351984024	0.0096051114320755
0.7551768913507462	0.0083206035614014
0.8672801625013351	0.0069510415554047
0.9541399666070938	0.0062580931901932
0.9999985545873642	0.0061262216329575

n=17, Costante di Lebesgue:13.13	
raggi	angoli
0.1112140186071396	0.0072829410390437
0.2738825385570526	0.0013713313152313
0.4095260025262832	0.0015158725507736
0.5393581856489181	0.0010482209087372
0.6573200420618057	0.0007965859474182
0.7735519586563110	0.0003916458013535
0.8769343918800354	0.0000829594209790
0.9565776648521424	0.0001873411238194
0.9971023841857910	0.0007979187633514

n=18, Costante di Lebesgue:14.63	
raggi	angoli
0.0117608038187027	-0.2516008030176163
0.1806577165842056	-0.0020822134315968
0.3392438639402390	0.0032626153469086
0.4541558593750000	0.0045464333534241
0.5753969168186188	0.0063139569520950
0.6845059669017792	0.0042043236970901
0.7958881119251251	0.0034288144350052
0.8913935227394104	0.0031170035719872
0.9635165497779846	0.0021234432458878
0.9999994784593582	0.0000690479159355

n=19, Costante di Lebesgue:16.46	
raggi	angoli
0.0975661797761917	-0.2516008030176163
0.2375609057903290	-0.0020822134315968
0.3763999305725098	0.0032626153469086
0.4949106096267700	0.0045464333534241
0.6023279809951783	0.0063139569520950
0.7096699409723282	0.0042043236970901
0.8109961853027344	0.0034288144350052
0.9020362064361572	0.0031170035719872
0.9678093081474304	0.0021234432458878
1.0000000000000000	0.0000690479159355

n=20, Costante di Lebesgue:18.45	
raggi	angoli
0.0186744861125946	-0.0749280889987946
0.1560149214744568	0.0040022382020950
0.2999794526576996	0.0005867928266525
0.4247275044918060	0.0001686215400696
0.5255104277610779	0.0001198649406433
0.6320530430555343	0.0000456720590591
0.7298337890625000	0.0000000000000000
0.8272896484375000	0.0000312328338623
0.9113364103078843	0.0000000000000000
0.9716422878026962	0.0001283288002014
0.9999992996454239	0.0005152076482773

B Codici

Forniamo in questa sezione alcuni dei codici utilizzati in questo lavoro.

```
%_________________________________
%|_________________________________
%
%demo optimization
%|______________________________
%|______________________________
clear all;

degv=[15];            % deg: WAM DEGREE.
extraction_method=1; % extraction_method: 1: QR 2:LU.

family_type=2; % 1:Fekete
               % 2:Costante Lebesgue

starting_point=0; % 0: punti di Lebsegue di Briani
                  % 1: punti di Fekete di Briani

mildness_vector=8;

ottimizzazione=0; %  1: CYIBopt.
                  %  2: CYIBopt2.
```

```
23
   do_plots=0;
25
   %-------------------------------------------------------------
27 %    ...... HERE THE MAIN PROGRAM BEGINS ......
   %-------------------------------------------------------------
29
   s='set_disk_leb'; % PUT THE NAME OF YOUR FUNCTION HERE
31 diaryname=cat(2,'diary_',date,'_',s,'.m');

33 diary on; diary(diaryname);

35 fprintf('\n␣\t␣');
   uu=cat(2,'function␣pts=',s,'(deg)');
37 fprintf(uu);


39
   for kk=1:length(degv)
41
       deg=degv(kk);
43



45
       %--------------
47     % INITIAL SET.
       %--------------
49
       switch starting_point
51         case 0
               pts_start=set_disk_leb(deg);
53         case 1
               pts_wam=disk_wam(deg);
55             V_wam= koornwinder_typeII(deg,pts_wam,-0.5);
               [pts_start,w_disk,ind,C,P]=computing_fekete_points(...
57                 pts_wam,V_wam,2,[],extraction_method);
       end
59
       %---------------
61     % OPTIMIZATION.
       %---------------
63
       pts_in=pts_start;
65     cputiming1=cputime;
```

```
    for ii=1:length(mildness_vector)
67      mildness=mildness_vector(ii);
        if ottimizzazione==0
69          pts_out=pts_in;
            value=stima(pts_out,mildness,deg,0);
71      elseif  ottimizzazione== 1
            [pts_out,value]=CYIBopt(deg,...
73              pts_in,family_type,mildness);
%           disegno(pts_out,kk);
75      else
            [pts_out,value]=CYIBopt2(deg,...
77              pts_in,family_type,mildness);
        end
79      pts_in=pts_out;
    end
81  cputiming2=cputime;

83  %-------
    % STATS.
85  %-------
    timing=cputiming2-cputiming1;
87  [lebs,dets,conds]=do_stats(deg,pts_out,timing);


89
    %-------
91  % PLOTS SENZA CERCHI
    %-------
93  if do_plots == 1
        degrees=linspace(0,2*pi,1000); degrees=degrees';
95      pts_bnd=[cos(degrees) sin(degrees)];
        plot(pts_bnd(:,1),pts_bnd(:,2),'b-',...
97          pts_out(:,1),pts_out(:,2),'r+');
    end
99

end
101


103


105


107
```

```
%-----------------------------------------------
%-----------------------------------------------
%
%CYIBopt
%-----------------------------------------------
%-----------------------------------------------


function [pts_out,value]=CYIBopt(deg,...
    pts_in,family_type,mildness)



% DATA BEFORE STARTING THE PROCESS.
dim_in=size(pts_in,1);
x_in=[pts_in(:,1); pts_in(:,2)];

% OPTIONS.
[degree_leb,maxfuns,maxtol,tolx]=option_settings(...
     deg,mildness);
switch family_type
    case 2
        pts_leb=disk_wam(degree_leb);
        Vleb= koornwinder_typeII(deg,pts_leb,-0.5);
    otherwise
        Vleb=[];
end
%------------------------
%Creazione configurazione
%------------------------
numerocerchi=fix(deg/2)+1;
gruppi=ones(numerocerchi,1);
nnodi(1)=deg-gruppi(1)+1;
lun=size(gruppi,1);
nnodi=zeros(lun,1);
for i=0:lun-1
    nnodi(lun-i)=deg+1-gruppi(i+1)-2*norm(gruppi(1:i),1);
end
nnodi=2*nnodi+ones(lun,1);
ragv=ones(numerocerchi,1)/numerocerchi;

for kk=1:numerocerchi
    ragv(kk)=kk*ragv(kk);
```

```
end

if rem(deg,2)==0;
    rcheb=expanded_chebyshev(2*numerocerchi-1);
    lun=length(rcheb);
    m=(lun-1)/2+1;
    ragv=rcheb(m:lun);
else
    rcheb=expanded_chebyshev(2*numerocerchi);
    lun=length(rcheb);
    m=lun/2+1;
    ragv=rcheb(m:lun);
end
theta_out=zeros(numerocerchi);
ragv=ragv';
x_inv=cerchio(theta_out,ragv,gruppi,nnodi);

%----------------------------------
% OPTIMIZATION PROCESS.
%----------------------------------
A=[]; B=[]; Aeq=[]; Beq=[]; LB=zeros(numerocerchi,1);
 UB=2*pi*ones(numerocerchi,1);
A2=eye(numerocerchi);
for i=1:numerocerchi-1
    A2(i,i+1)=-1;
end

time1=cputime;
options=gaoptimset('PopulationType','Doublevector',...
    'PopulationSize',[20 20 20],...
    'Generations',100,'CrossoverFcn',...
    @crossovertwopoint,'CrossoverFraction',0.8,
     'FitnessScalingFcn',...
    @fitscalingrank,'SelectionFcn',@selectionroulette,'MutationFcn',...
    @mutationadaptfeasible,'EliteCount',2,'Display','off',
     'StallGenLimit',100,...
    'TolFun',maxfuns,'TolCon',tolx,'InitialPopulation',ragv', ...
    'MigrationDirection','both','MigrationInterval',20,
    'HybridFcn',@patternsearch);

[ragv,vout] = ga(@(ragv1) opt_target(theta_out,ragv1,...
    gruppi,nnodi,deg,family_type,Vleb),...
    numerocerchi,[],[],Aeq,Beq,LB,UB/(2*pi),[],options);
```

```
options=gaoptimset('PopulationType','Doublevector',...
     'PopulationSize',[20 20 20],...
    'Generations',100,'CrossoverFcn',...
    @crossovertwopoint,'CrossoverFraction',...
    0.8,'FitnessScalingFcn',...
    @fitscalingrank,'SelectionFcn',...
    @selectionroulette,'MutationFcn',...
    @mutationadaptfeasible,'EliteCount',2,'Display','off',
    'StallGenLimit',100,...
    'TolFun',maxfuns,'TolCon',tolx,'InitialPopulation',theta_out, ...
    'MigrationDirection','both','MigrationInterval',20,
     'HybridFcn',@patternsearch);
[theta_out,vout] = ga(@(theta_out1) opt_target(theta_out1,ragv,...
    gruppi,nnodi,deg,family_type,Vleb),...
    numerocerchi,A,B,Aeq,Beq,[],[],[],options);


time2=cputime;

fprintf('\n\t raggi\n');
fprintf('\t%3.16f,',ragv);
fprintf('\n\t angoli\n');
fprintf('\t%3.16f,',theta_out);
fprintf('\n\t gruppi\n');
fprintf('\t%3.0f,',gruppi);
fprintf('\n\t nnodi\n');
fprintf('\t%3.0f,',nnodi);
x_out=cerchio(theta_out,ragv,gruppi,nnodi);

fprintf('\n\n\tCostante di Lebesgue\t%6.16f\n',vout);
pts_out=x_out;
%-----------------------------------
% SEE IF THERE ARE IMPROVEMENTS.
%-----------------------------------

switch family_type

    case 1 % FEKETE.
        value_out= 1000001;


    case 2 % LEBESGUE.
        pts_leb=disk_wam(250);
```

```
        V_leb= koornwinder_typeII(deg,pts_leb,-0.5);

        V_pts_in=koornwinder_typeII(deg,pts_in,-0.5);
        value_in=norm(V_pts_in'\V_leb',1);

%         pts_out=[x_out(1:dim_in,1) x_out(dim_in+1:end,1)];
        V_pts_out = koornwinder_typeII(deg,pts_out,-0.5);
        value_out=norm(V_pts_out'\V_leb',1);

        if abs(value_in) < abs(value_out)
            x_out=x_in; value=value_in;
            fprintf('fail\n\n\n\n')
        else
            value=value_out;
        end

    otherwise
        value_in= opt_target(x_in,deg,family_type,Vleb);
        value_out= opt_target(x_out,deg,family_type,Vleb);
        if abs(value_in) < abs(value_out)
            x_out=x_in;
            value=value_in;
        else
            value=value_out;
        end

end




%-------------------------------------------------------------------------
% ADDITIONAL ROUTINES.
%-------------------------------------------------------------------------

function [lebdeg,maxfuns,maxtol,tolx]=option_settings(...
    deg,mildness)

switch mildness
    case 0
```

```
281         if deg < 7
                lebdeg=70;
283         else
                if deg < 12
285                 lebdeg=50;
                else
287                 lebdeg=30;
                end
289         end
            maxfuns=50; maxtol=10^(-12); tolx=maxtol;
291     case 1

293         if deg < 7
                lebdeg=80;
295         else
                if deg < 12
297                 lebdeg=60;
                else
299                 lebdeg=40;
                end
301         end

303         maxfuns=50; maxtol=10^(-12);  tolx=maxtol;
        case 2
305         if deg < 7
                lebdeg=100;
307         else
                if deg < 12
309                 lebdeg=70;
                else
311                 lebdeg=50;
                end
313         end
            maxfuns=50; maxtol=10^(-12); tolx=maxtol;
315     case 3
            if deg < 7
317             lebdeg=135;
            else
319             if deg < 12
                    lebdeg=85;
321             else
                    lebdeg=60;
323             end
```

```
        end
325         maxfuns=50; maxtol=10^(-12); tolx=maxtol;
    case 4
327         if deg < 7
                lebdeg=170;
329         else
                if deg < 12
331                 lebdeg=120;
                else
333                 lebdeg=80;
                end
335         end
            maxfuns=50; maxtol=10^(-14); tolx=maxtol;
337
    case 5
339
            if deg < 7
341             lebdeg=250;
            else
343             if deg < 12
                    lebdeg=150;
345             else
                    lebdeg=100;
347             end
            end
349         maxfuns=25; maxtol=10^(-14);  tolx=10^(-60);

351 case 6
            if deg < 7
353             lebdeg=270;
            else
355             if deg < 12
                    lebdeg=170;
357             else
                    lebdeg=120;
359             end
            end
361         maxfuns=25; maxtol=10^(-14); tolx=maxtol;

363 case 7

365         if deg < 7
                lebdeg=300;
```

```
367         else
                if deg < 12
369                 lebdeg=200;
                else
371                 lebdeg=140;
                end
373         end
            maxfuns=25; maxtol=10^(-14);  tolx=10^(-60);
375
        case 8
377
            if deg < 7
379             lebdeg=325;
            else
381             if deg < 12
                    lebdeg=250;
383             else
                    lebdeg=170;
385             end
            end
387         maxfuns=25; maxtol=10^(-14);  tolx=10^(-60);

389     otherwise

391         if deg < 7
                lebdeg=350;
393         else
                if deg < 12
395                 lebdeg=250;
                else
397                 lebdeg=170;
                end
399         end
            maxfuns=50; maxtol=10^(-400);  tolx=10^(-60);
401
    end
403


405


407 function value=opt_target(theta,r,gruppi,numeronodi,deg,family_type,Vleb)

409
```

```
411 %-----------------------------------------------
    % REASSEMBLING OPTIMIZATION VECTOR INTO N x 2
413 % MATRIX.
    %-----------------------------------------------
415
    pts=cerchio(theta,r,gruppi,numeronodi);
417 X=pts(:,1);
    Y=pts(:,2);
419
    %-----------------------------------------------
421 % OPTIMIZATION TARGET FUNCTION..
    %-----------------------------------------------
423
    s = (X.^2 + Y.^2 - 1 > eps); sum_s=sum(s);
425
    if sum_s > 0
427
        % fprintf('\n \t %% WARNING: ITERATION OUT OF DOMAIN.');
429
        switch family_type
431
            case -2
433             value=10^30; return;

435         case -1
                value=10^30; return;
437
            case 0
439             value=10^30; return;

441         case 1 % VANDERMONDE DETERMINANT: FEKETE POINTS.
                value=10^(-30); return;
443
            case 2 % APPROXIMATE LEBESGUE CONSTANT: APPROXIMATE LEBESGUE POINTS
445             value=10^30; return;

447     end
    end
449
    V = koornwinder_typeII(deg,pts,-0.5);
451
    switch family_type
```

```
453
        case -2
455         s=-family_type;
            value=riesz_target(pts,s);
457
        case -1
459         s=-family_type;
            value=riesz_target(pts,s);
461
        case 0
463         s=family_type;
            value=riesz_target(pts,s);
465
        case 1 % VANDERMONDE DETERMINANT: FEKETE POINTS.
467         detV=det(V);
            value=-abs(detV);
469         %fprintf('\n \t %% %2.20e',value);

471     case 2 % APPROXIMATE LEBESGUE CONSTANT: APPROXIMATE LEBESGUE POINTS.
            value=norm(V'\Vleb',1);
473
    end
```

Riferimenti bibliografici

[1] M. Briani, A. Sommariva, M. Vianello: *Computing Lebesgue and Fekete points in Matlab*, J. Comput. Appl. Math. 236 (2012), 2477-2486.

[2] L Mezzalira: *Calcolo di punti quasi ottimali per l'interpolazione sull'intervallo,il quadrato e il disco*, Tesi di Laurea (2011), Dipartimento di Matematica, Universitá di Padova.

[3] C. de Boor, *A Practical Guide to Splines*, Springer-Verlag, 1978.

[4] Mathworks, *ga routine*, `http://www.mathworks.it/it/help/gads/ga.html`.

[5] Mathworks, *patternsearch routine*, `http://www.mathworks.it/it/help/gads/patternsearch.html`.

[6] L. Bos, S. De Marchi, A Sommariva e M.Vianello, *Computing multivariate Fekete and Leja points by numerical linear algebra*, SIAM J. Numer. Anal., 48 (2010), 1984-1999.

[7] A. Cuyt, I. Yaman, B.A. Ibrahimoglu e B. Benouahmane, *Radial orthogonality and Lebesgue constants on the disk*, Numer. Algo., 61 (2012), 291-313.

[8] Y. Xu, *Polynomial interpolation on the unit sphere and on the unit ball*, Adv. in Comp. Math., 20 (2004), 247-260.

[9] B. Sundermann: *On projection constants of polynomial space on the unit ball in several variables, Math. Z. ,188 (1984), 111-117.*