

# Punti di Lebesgue sul disco

Andrea Pinto

Relatore: Dott. Rinaldi

Correlatore: Dott. Sommariva

Università degli Studi di Padova  
Dipartimento di Matematica

4 Dicembre 2012

## Breve introduzione

- ▶ Uno dei grandi temi della teoria dell'approssimazione consiste nella ricerca di punti adeguati per l'interpolazione polinomiale cioè punti che determinino interpolanti polinomiali tali da approssimare una funzione continua con un errore piccolo.
- ▶ La *costante di Lebesgue* è un'indicatore di quanto siano "buoni" i punti su cui interpoliamo.
- ▶ Problema: trovare punti che abbiano una *costante di Lebesgue* estremamente bassa, così che l'interpolante descriva una funzione regolare con un errore prossimo a quello della migliore approssimazione polinomiale (ad un grado prefissato).
- ▶ Risultati in letteratura: i punti di Lebesgue non sono noti esplicitamente sia nel caso unidimensionale che nel caso multivariato.

# Proposito

In questa presentazione, dopo aver fornito dei veloci richiami sull'interpolazione polinomiale e sulla costante di Lebesgue, illustreremo come sia stato possibile ottenere delle configurazioni di punti con una costante di Lebesgue particolarmente piccola nel caso del disco bidimensionale, fornendo confronti con altri autori.

# Interpolazione polinomiale

- ▶ Indichiamo con  $\mathbb{P}_n^d = \langle x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_d^{n_d}, 0 \leq \sum_{i=1}^d n_i \leq n \rangle$  lo spazio dei polinomi di grado totale  $n$ .
- ▶ Si può vedere che  $N = \dim(\mathbb{P}_n^d) = \binom{n+d}{n}$ .
- ▶ Sia  $\Omega$  un dominio compatto di  $\mathbb{R}^d$ . Un insieme di punti  $\{z_n\}$  si dice *unisolvente* su  $\Omega$  per l'interpolazione polinomiale di grado  $n$ , se esiste, per ogni vettore  $\gamma = \{\gamma_k\}_{k=1\dots N}$ , un unico polinomio  $p_n$  in  $\mathbb{P}_n^d$  tale che

$$p_n(z_k) = \gamma_k \quad k = 1, \dots, N$$

# Interpolazione polinomiale

- ▶ Fissiamo nel dominio  $\Omega$  una base  $\langle p_i, i = 1, \dots, N \rangle$  di  $\mathbb{P}_n^d$  e denotiamo con  $V = V(z_1, z_2, \dots, z_N)$  la matrice quadrata di Vandermonde le cui componenti sono

$$V_{ij} = p_j(z_i), \quad i, j = 1, \dots, N$$

- ▶ Definiamo ora i polinomi di Lagrange come

$$L_k(z) = \frac{\det(V(z_1, \dots, z_{k-1}, z, z_{k+1}, \dots, z_N))}{\det(V(z_1, \dots, z_N))} \quad k = 1, \dots, N$$

- ▶ Definiamo l'operatore di interpolazione su un insieme di punti  $\mathcal{P}$  come il funzionale  $\mathcal{L}_n : (C(\Omega), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathbb{P}_n^d$

$$\mathcal{L}_n f = \sum_{i=1}^N f(z_i) L_i$$

# Costante di Lebesgue

La costante di Lebesgue  $\Lambda_n(\mathcal{P})$  di un insieme di punti  $\mathcal{P}$  unisolventi a grado  $n$ , è la norma dell'operatore di interpolazione  $\mathcal{L}_n$ :

$$\Lambda_n(\mathcal{P}) = \|\mathcal{L}_n\| = \frac{\|\mathcal{L}_n f\|_\infty}{\|f\|_\infty} = \max_{x \in \Omega} \sum_{i=1}^N |L_i| \quad (1)$$

La grandezza di  $\Lambda_n(\mathcal{P})$  è in funzione dell'insieme dei punti di interpolazione  $\mathcal{P}$ , del dominio  $\Omega$  e di  $\mathbb{P}_n^d$  ma si dimostra che non dipende dalla base polinomiale prescelta.

## Teorema

Sia  $\mathbb{P}_n^d$  lo spazio dei polinomi di grado totale  $n$  su  $\mathbb{R}^d$ , sia  $\Omega$  un insieme compatto di  $\mathbb{R}^d$  e sia  $\mathcal{P} = \{z_i\} \subset \Omega$  un insieme di punti unisolvente per l'interpolazione polinomiale di grado  $n$ . Sia inoltre  $\mathcal{L}_n : (C(\Omega), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathbb{P}_n^d$  l'operatore di interpolazione polinomiale sui punti  $\{z_i\}$  e sia  $\Lambda_n(\mathcal{P})$  la corrispondente costante di Lebesgue, allora

1.  $\|\mathcal{L}_n f - f\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n(\mathcal{P})) \|f - \phi_n^*\|_\infty$  ove  $\phi_n^* \in \mathbb{P}_n^d$  è il polinomio di grado  $n$  di miglior approssimazione per  $f$ .
2.  $\left\| \mathcal{L}_n f - \mathcal{L}_n \tilde{f} \right\|_\infty \leq \Lambda_n(\mathcal{P}) \cdot \max_k |f(z_k) - \tilde{f}(z_k)|$  ove  $\tilde{f}$  è una approssimazione di  $f$ .

# Punti di Lebesgue

Fissati  $\Omega$  e  $\mathbb{P}_n^d$  i punti che minimizzano la costante di Lebesgue sono detti i punti di Lebesgue.

- ▶ I punti di Lebesgue non sono noti nemmeno per il caso unidimensionale. Sono noti punti con costante di Lebesgue prossima a quella ottimale.
- ▶ In questo lavoro ci siamo concentrati nella ricerca di punti di Lebesgue nel disco bidimensionale.

# Algoritmi

L'utilizzo di algoritmi di tipo gradiente ci è parso poco indicato considerando che la costante di Lebesgue non è funzione continua dei punti di interpolazione. Abbiamo usato principalmente due algoritmi

- ▶ **Genetic Algorithm:** algoritmo aleatorio che simula l'evoluzione umana attraversando le fasi di selezione, mutazione e crossover.
- ▶ **Pattern-Search:** algoritmo di tipo Direct Search.

Direct Search è un algoritmo globalmente convergente, quindi il suo utilizzo all'interno di un framework di ottimizzazione globale basato su un algoritmo di tipo probabilistico (come l'algoritmo genetico), può migliorare le performance e facilitare l'ottenimento di una soluzione del problema. Per questo motivo noi abbiamo scelto di combinare Ga con Patternsearch.

# Primo approccio

Per prima cosa abbiamo cercato di minimizzare la costante di Lebesgue utilizzando come incognite i punti di interpolazione.

Abbiamo usato come algoritmi GA e Pattern-Search.

- ▶ una prima fase di taratura degli algoritmi di ottimizzazione
- ▶ non abbiamo trovato miglioramenti alle costanti di Lebesgue
  - ▶ velocità di convergenza ridotta
  - ▶ stagnazione in minimi locali

## Secondo approccio

Non ottimizziamo sui singoli punti.

- Vincoliamo i punti in  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$  cerchi.

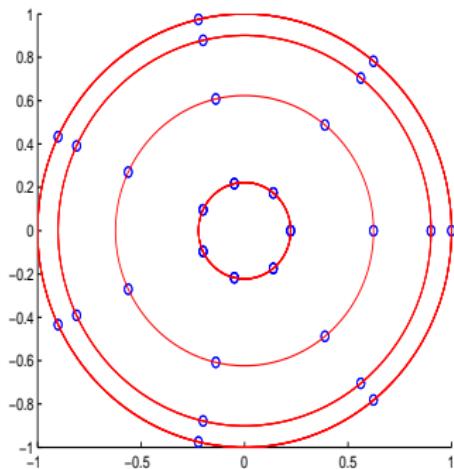


Figura:  $n=6$ : ci sono 28 punti

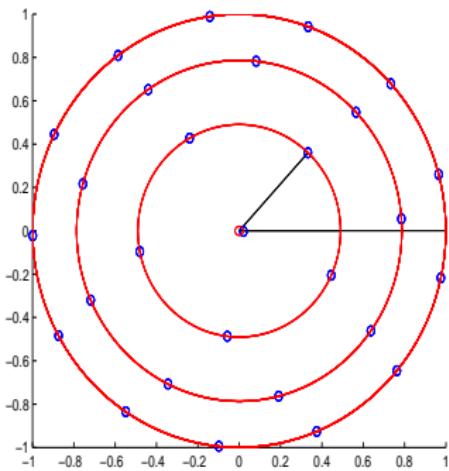
## Secondo approccio

- ▶ dividiamo i cerchi in  $k$  gruppi: nel  $k$ -esimo gruppo ci sono esattamente  $v_k$  cerchi.
- ▶ in ogni cerchio del  $k$ -esimo gruppo poniamo  $2n_k + 1$  nodi ove  $n_k$  è dato da:

$$\begin{cases} n_1 = n - v_1 + 1, \\ n_2 = n - 2v_1 - v_2 + 1, \\ \vdots \\ n_k = n - 2v_1 - \dots - 2v_{k-1} - v_k + 1. \end{cases}$$

## Secondo approccio

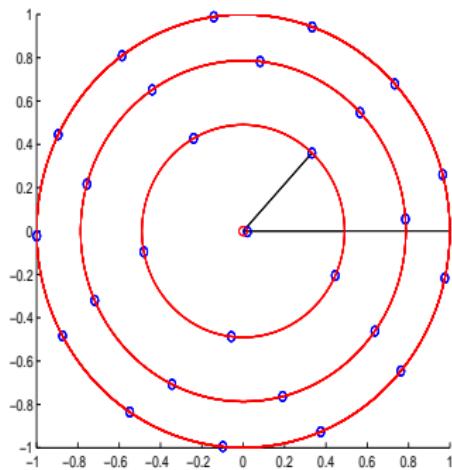
Una delle configurazioni possibili a grado 6 è quella riportata in figura.



## Secondo approccio

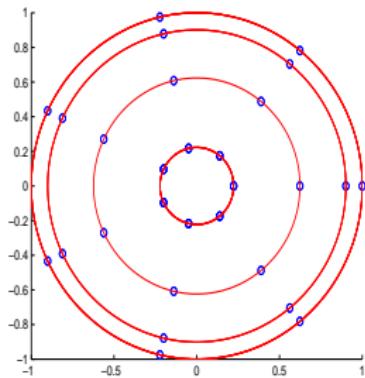
Per determinare la nostra configurazione ci sono 3 scelte:

- ▶ la suddivisione nei  $k$  gruppi
- ▶ la lunghezza dei raggi
- ▶ l'angolazione tra un fissato punto di interpolazione di ogni cerchio con un determinato semiasse

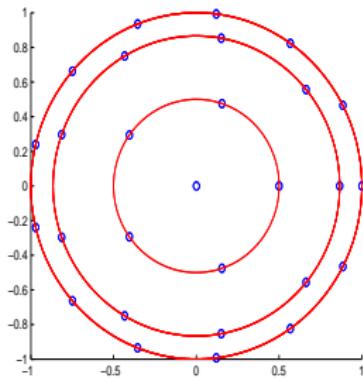


## Suddivisione in $k$ gruppi

Poniamo momentaneamente l'angolo iniziale uguale a 0 e usiamo come raggi gli zeri non negativi del polinomio di Chebyshev.



(a)  $k=1$



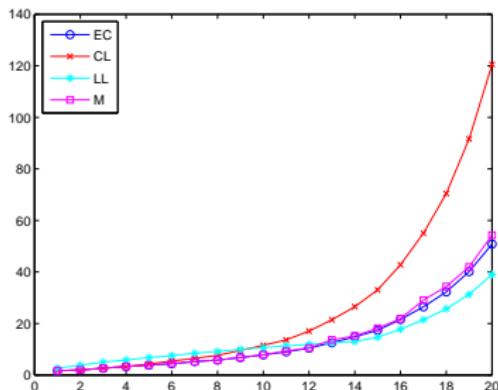
(b)  $k=4$

Figura: con  $k=1$  una costante di Lebesgue di 4025, con  $k=4$  di 5.48

Con  $n$  fissato notiamo che al crescere di  $k$ , la costante di Lebesgue decresce.

# Confronto tra raggi

Abbiamo preso come raggi nodi corrispondenti a punti non negativi di insiemi unisolventi univariati con una bassa costante di Lebesgue per l'intervallo e abbiamo fatto un confronto.



**Figura:** Indichiamo con EC i punti Expanded-Chebyshev, con CL i Chebyshev-Lobatto, con LL i Legendre-Lobatto e con M i quasi-punti di Lebesgue trovati da Mezzalira in una tesi di laurea sul medesimo argomento.

# Scelta dell'angolo

Usando la divisione in gruppi scelta prima, i raggi di Chebyshev-Lobatto abbiamo fatto un confronto tra gli angoli. Proponiamo il caso  $n=6$ .

- ▶ posto l'angolo iniziale uguale a zero abbiamo ottenuto una costante di Lebesgue di circa 5.48.
- ▶ Ottimizzando invece la nostra funzione obiettivo tramite la funzione GA seguita da Patern-Search, con solo i 3 angoli come variabili, otteniamo una costante di Lebesgue di circa 5.35.

La differenza non è considerevole ma comunque presente.

## Scelta dei raggi

Illustriamo ora i risultati ottenuti ottimizzando tramite l'algoritmo genetico GA e Pattern-Search, prima sui raggi e poi sugli angoli.

- ▶ Abbiamo scelto di agire in maniera indipendente consci del fatto che gli angoli influiscono poco: in tal modo abbiamo limitato il costo computazionale.
- ▶ Abbiamo usato come dati iniziali per i raggi i nodi Expanded-Chebyshev, casuali invece per gli angoli.

**Per gradi bassi i nuovi set di punti non migliorano gli ottimi risultati precedentemente ottenuti in letteratura, mentre hanno costanti di Lebesgue significativamente più basse all'aumentare del grado.**

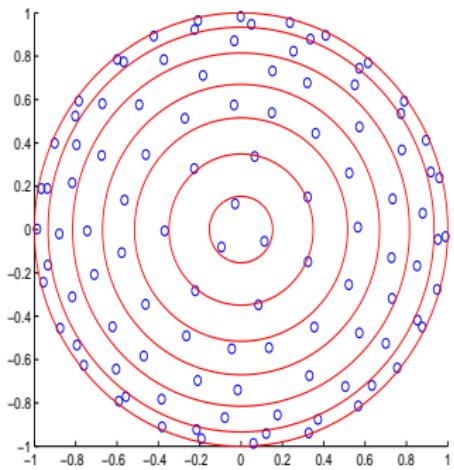
## Confronto con risultati in letteratura

Grado	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
BSV	1.67	1.99	2.47	2.97	3.50	4.30	5.08	5.43	6.73	7.62	8.48
M	1.67	1.99	2.47	2.97	3.49	4.10	5.00	5.38	6.54	7.14	7.84
CYIB-Opt	1.67	1.99	2.47	2.97	3.49	4.26	4.76	5.32	5.90	6.50	7.20
Grado	12	13	14	15	16	17	18	19	20		
BSV	9.65	11.98	12.39	14.13	17.44	18.88	27.17	28.29	29.68		
M	8.97	10.14	11.14	13.08	14.72	14.92	16.04	18.27	20.31		
CYIB-Opt	7.93	8.73	9.64	10.65	11.82	13.13	14.76	16.28	18.45		

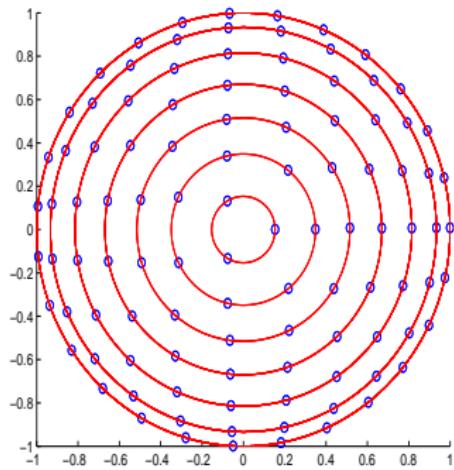
Tabella: Confronto tra le costanti di Lebesgue trovate da noi con alcune presenti in letteratura.

Per gradi bassi i nuovi set di punti non migliorano gli ottimi risultati precedentemente ottenuti in letteratura, mentre hanno costanti di Lebesgue significativamente più basse all'aumentare del grado.

# Confronto con configurazioni di altri autori



(a) BSV



(b) CYIB-Opt

Figura:  $n=13$

## Confronto con la teoria

È nota in letteratura una stima teorica della costante di Lebesgue minima per i punti di Lebesgue nel disco:  $\Lambda_n = O(\sqrt{n+1})$ .

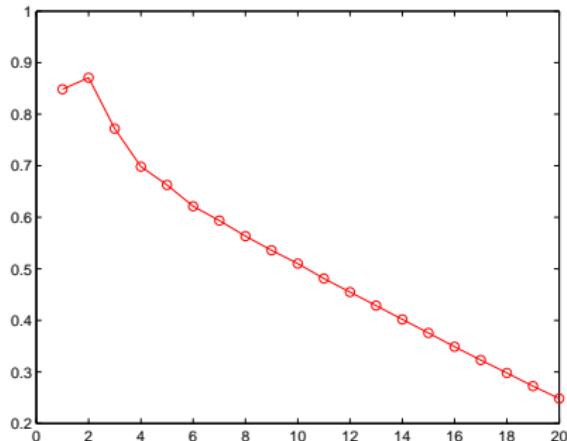


Figura: Rapporto tra  $\sqrt{n+1}$  e le costanti di Lebesgue trovate da CYIB-Opt.

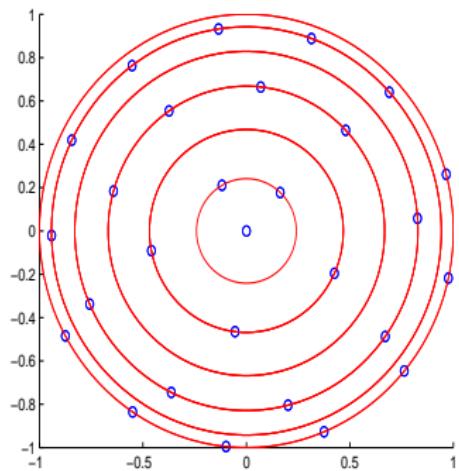
## Un possibile sviluppo

Per ottenere ulteriori miglioramenti alleggeriamo i vincoli, cercando configurazioni vicine a quelle di CYIB-Opt con migliori costanti di Lebesgue. Usiamo come punto di partenza la configurazione trovata nella sezione precedente.

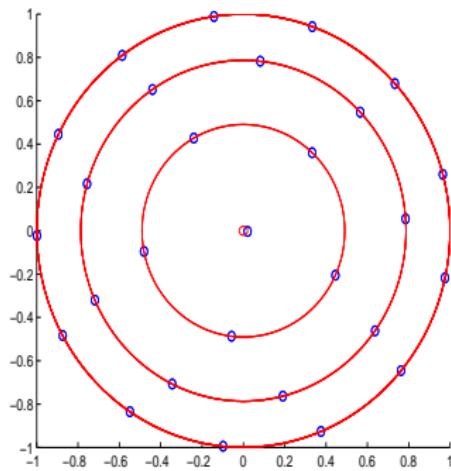
Come abbiamo visto i nodi sono disposti in cerchi concentrici. Ora consideriamo un determinato cerchio di raggio  $r_k$  che contiene  $2n_k + 1$  nodi. Disponiamo i primi  $n_k$  nodi in un cerchio di raggio  $r_{k_1}$  e gli altri  $n_k + 1$  nodi in un cerchio di raggio  $r_{k_2}$  senza modificarne l'angolo. Agendo in questo modo abbiamo visto che abbiamo disposto tutti i nodi in  $n + 1$  cerchi.

# Un possibile sviluppo

Figura: Confronto per  $n = 6$  tra vecchia e nuova configurazione



(a) nuova configurazione



(b) vecchia configurazione

# Un possibile sviluppo

Grado	6	7	8	9	10	11	12
CYIB-opt	4.26	4.76	5.32	5.90	6.50	7.20	7.93
CYIB-opt2	4.19	4.75	5.28	5.87	6.49	7.18	7.90

Grado	13	14	15	16	17	18	19	20
CYIB-opt	8.73	9.63	10.65	11.82	13.13	14.63	16.415	18.45
CYIB-opt2	8.72	9.62	10.62	11.76	13.08	14.60	16.29	18.14

**Tabella:** Confronto tra le costanti di Lebesgue trovate con questa nuova configurazione (indicate con CYIB-opt2) con quelle trovate con la vecchia configurazione (indicate con CYIB-opt).

Si può notare che con questa tecnica abbiamo ottenuto piccoli miglioramenti, seppur ancora modesti. D'altra parte indica che i punti CYIB-opt non sono ottimali.