Punti di Lebesgue sul disco

Andrea Pinto

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica Pura e Applicata

4 Dicembre 2012

Breve introduzione

- La ricerca di punti adeguati per l'interpolazione polinomiale é uno dei grandi temi della teoria dell'approssimazione.
- Il problema consiste nel ricercare le disposizioni dei punti che permettano l'interpolazione polinomiale col minor errore possibile.
- Esiste una costante, detta di Lebesgue, che ci dice quanto sono buoni i punti su cui interpoliamo.
- Pertanto il problema consiste nel trovare punti che abbiano *costante di Lebesgue* estremamente bassa, cosí che l'interpolante descriva una funzione regolare con un errore prossimo a quello della migliore approssimante polinomiale (ad un grado prefissato).
- Il problema é consistente sia nel caso unidimensionale che multidimensionale.

Proposito

In questa presentazione, dopo aver fornito dei veloci richiami sull'interpolazione polinomiale sulla costante di Lebesgue, illustreremo come sia stato possibile ottenere delle configurazioni di punti con una costante di Lebesgue particolarmente piccola nel caso del disco bidimensionale fornendo confronti con altri autori.

Interpolazione polinomiale

- Indichiamo con $\mathbb{P}_n^d =< x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_d^{n_d}, 0 \leq \sum_{i=1}^d n_i \leq n >$ lo spazio dei polinomi di grado totale n..
- Si puó vedere che $N = dim(\mathbb{P}_n^d) = \binom{n+d}{n}$.
- Sia Ω un dominio compatto di $\mathbb{R}^d$. Un insieme di punti $\{z_n\}$ si dice unisolvente su Ω per l'interpolazione polinomiale di grado n, se esiste, per ogni vettore $\gamma = \{\gamma_k\}_{k=1...N}$, un unico polinomio p_n in $\mathbb{P}_n^d$ tale che

$$p_n(z_k) = \gamma_k \quad k = 1, ..., N$$

Interpolazione polinomiale

- Fissiamo nel dominio Ω una base $< p_i, i = 1, ..., N >$ di $\mathbb{P}_n^d$ e denotiamo con $V = V(z_1, z_2, ..., z_N)$ la matrice quadrata di Vandermonde le cui componenti sono

$$V_{ij} = \{p_j(z_i) : i, j = 1, ..., N\}$$

- Definiamo ora i polinomi di Lagrange come

$$L_k(z) = \frac{det(V(z_1, ..., z_{k-1}, z, z_{k+1}, ..., z_N))}{det(V(z_1, ..., z_N))} \quad k = 1, ..., N$$

- Definiamo l'operatore di interpolazione su un insieme di punti $\mathcal{P}$ come il funzionale $\mathcal{L}_n : (C(\Omega), \|.\|_\infty) \to \mathbb{P}_n^d$

$$\mathcal{L}_n f(.) = \sum_{i=1}^{N} f(z_i) L_i(.)$$

Costante di Lebesgue

La costante di Lebesgue $\Lambda_n(\mathcal{P})$ di un insieme di punti $\mathcal{P}$ la norma dell'operatore di interpolazione $\mathcal{L}_n$:

$$\Lambda_n(\mathcal{P}) = \|\mathcal{L}_n\| = \frac{\|\mathcal{L}_n f\|_\infty}{\|f\|_\infty} = \max_{x \in \Omega} \sum_{i=1}^{N} |L_i| \tag{1}$$

La grandezza di $\Lambda_n(\mathcal{P})$ in funzione dell'insieme dei punti di interpolazione $\mathcal{P}$, del dominio Ω e di $\mathbb{P}_n^d$ ma non della base di quest'ultimo insieme poichè il determinante di una generica matrice non dipende dalla base scelta. Vediamo ora delle stime che ci fanno intuire l'importanza di una buona costante di Lebesgue.

Teorema fondamentale dell'errore di interpolazione

Teorema
Sia $\mathbb{P}_n^d$ lo spazio dei polinomi di grado totale n su $\mathbb{R}^d$, sia Ω un insieme compatto di $\mathbb{R}^d$ e sia $\mathcal{P} = \{z_i\} \subset \Omega$ un insieme di punti unisolvente per l'interpolazione polinomiale di grado n. Sia inoltre $\mathcal{L}_n : (C(\Omega), \|.\|_\infty) \to \mathbb{P}_n^d$ l'operatore di interpolazione polinomiale sui punti $\{z_i\}$ e sia $\Lambda_n(\mathcal{P})$ la corrispondente costante di Lebesgue, allora

1. $\|\mathcal{L}_n f - f\|_\infty \leq \ (1 + \Lambda_n(\mathcal{P}))\, \|f - \phi_n^*\|_\infty$ ove $\phi_n^* \in \mathbb{P}_n^d$ il polinomio di grado n di miglior approssimazione per f.
2. $\left\|\mathcal{L}_n f - \mathcal{L}_n \tilde{f}\right\|_\infty \leq \ \Lambda_n(\mathcal{P}) \cdot \max_k \left|f(z_k) - \tilde{f}(z_k)\right|$ ove $\tilde{f}$ una approssimazione di f.

Punti di Lebesgue

Fissati Ω e $\mathbb{P}_n^d$ i punti che minimizzano la costante di Lebesgue sono detti i punti di Lebesgue.

- I punti di Lebesgue non sono noti completamente nemmeno per il caso unidimensionale: ci sono buone approssimazioni.
- In questo lavoro ci siamo concentrati nella ricerca di punti di Lebesgue nel disco bidimensionale

Algoritmi

L'utlizzo di algoritmi di tipo gradiente ci é parso poco indicato considerando che la costante di Lebesgue non é nemmeno continua. Abbiamo usato principalemente due algoritmi

- **Genetic Algorthm**:algoritmo aleatorio che simula l'evoluzione umana attraversando le fasi di selezione, mutazione e crossover.
- **Patternsearch**: algoritmo di tipo Direct Search.

Esistono risultati teorici che garantiscono la convergenza globale combinando algoritmi di questo tipo. Non ci sono invece informazioni sulla velocitá di convergenza.

Primo approccio

Per prima cosa abbiamo cercato di minimizzare la costante di Lebesgue utilizzando come incognite i punti di interpolazione.

Abbiamo usato come algoritmi GA e Pattern-Search.

- una prima fase di taratura degli algoritmi di ottimizzazione
- non abbiamo trovato miglioramenti alle costanti di Lebesgue
  - velocitá di convergenza ridotta
  - stagnazione in minimi locali

Secondo approccio

Non ottimizziamo sui singoli punti.

- Vincoliamo i punti in $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ cerchi.

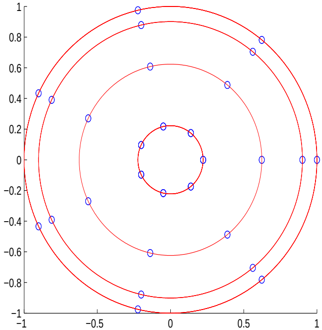


Figura: n=6: ci sono 28 punti

Secondo approccio

- dividiamo i cerchi in k gruppi: nel k-esimo gruppo ci sono esattamente v_k cerchi.
- in ogni cerchio del k-esimo gruppo poniamo $2n_j + 1$ nodi ove n é dato da:

$$n_1 = n - v_1 + 1,$$

$$n - 2 = n - 2v_1 - v_2 + 1,$$

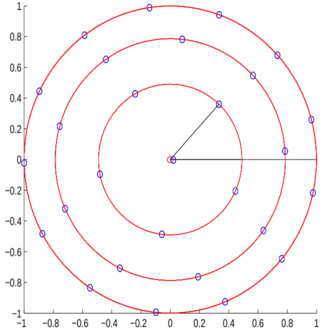
$$\vdots$$

$$n_k = n - 2v_1 - ... - 2v_{k-1} - v_k + 1.$$

Secondo approccio

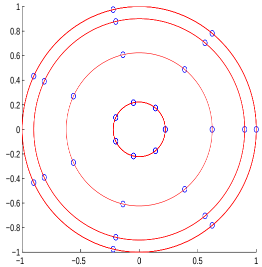
Dopo aver fatto queste premesse ci sono 3 scelte:

- la suddivisione nei k gruppi
- la lunghezza dei raggi
- l'angolazione tra un fissato punto di interpolazione di ogni cerchio con un determinato semiasse

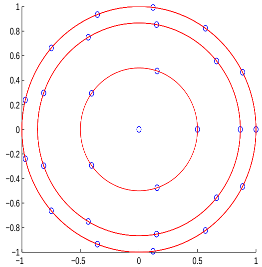


Suddivisione in k gruppi

Poniamo momentaneamente l'angolo uguale a zero e usiamo come raggi gli zeri maggiori di zero del polinomio di Chebychev.



(a) k=1



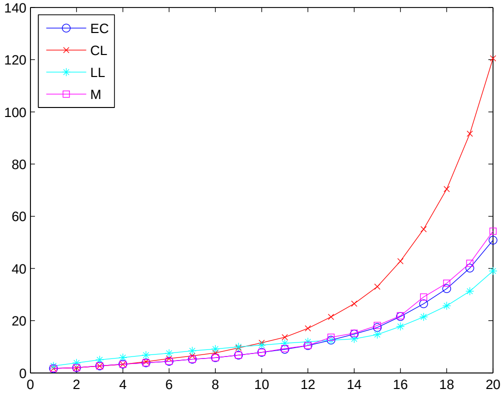
(b) k=4

Figura: con k=1 una costante di Lebesgue di 4025, con k=4 di 5.48

Con n fissato notiamo che al crescere di k, la costante di Lebesgue decresce.

Confronto tra raggi

Abbiamo preso come raggi nodi con una bassa costante di Lebesgue per l'intervallo e abbiamo fatto un confronto.



Scelta dell'angolo

Usando la divisione in gruppi scelta prima, i raggi di Chebychev-Lobatto abbiamo fatto un confronto tra gli angoli. Proponiamo il caso n=6.

- posto l'angolo uguale a zero nel caso n=6 abbiamo ottenuto una costante di Lebesgue di circa 5.48
- Ottimizzando invece la nostra funzione obiettivo tramite la funzione GA seguita da paternsearch, con solo i 3 angoli come variabili, otteniamo una costante di Lebesgue di circa 5.35.

La differenza non é considerevole ma comunque presente.

Scelta dei raggi

Illustriamo ora i risultati ottenuti ottimizzando tramite l'algoritmo genetico GA e Pattern-Search, prima sui raggi e poi sugli angoli.

- Abbiamo scelto di agire in maniera indipendente consci del fatto che gli angoli influiscono poco: in tal modo abbiamo limitato il costo computazionale.
- Abbiamo usato come dati iniziali per i raggi i nodi Expanded-Chebyshev, casuali invece per gli angoli.

Per gradi bassi i nuovi set di punti non migliorano gli ottimi risultati precedentemente ottenuti in letteratura, mentre hanno costanti di Lebesgue significativamente piu' basse all'aumentare del grado.

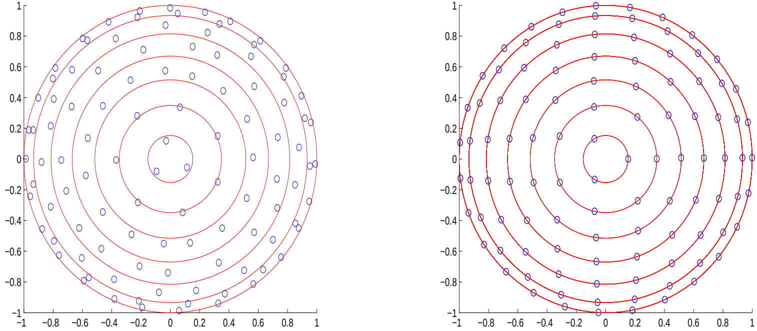
Confronto con risultati in letteratura

Grado	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
BSV	1.67	1.99	2.47	2.97	3.50	4.30	5.08	5.43	6.73	7.62	8.48
M	1.67	1.99	2.47	2.97	3.49	4.10	5.00	5.38	6.54	7.14	7.84
CYIB-Opt	1.67	1.99	2.47	2.97	3.49	4.26	4.76	5.32	5.90	6.50	7.20

Grado	12	13	14	15	16	17	18	19	20
BSV	9.65	11.98	12.39	14.13	17.44	18.88	27.17	28.29	29.68
M	8.97	10.14	11.14	13.08	14.72	14.92	16.04	18.27	20.31
CYIB-Opt	7.93	8.73	9.64	10.65	11.82	13.13	14.76	16.28	18.45

Tabella: confronto tra le costanti di Lebesgue trovate da noi con alcune presenti in letteratura

Confronto con configurazioni di altri autori



(a) BSV

(b) CYIB-Opt

Figura: n=13

Confronto con la teoria

In letteratura si dá una stima teorica della costante di Lebesgue minima per i punti di Lebesgue nel disco: $\Lambda_n = O(\sqrt{n+1})$.

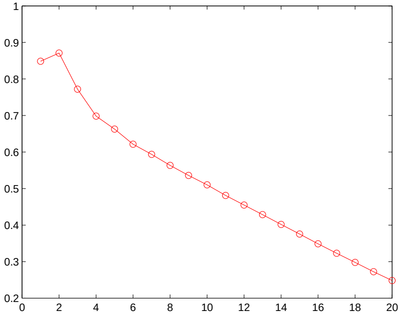


Figura: rapporto tra $\sqrt{n+1}$ e le costanti di Lebesgue trovate da CYIB-Opt

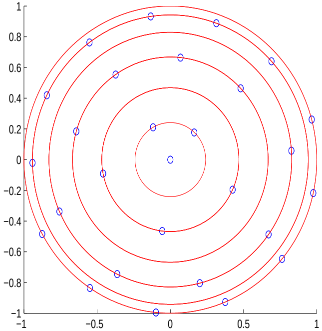
Un possibile sviluppo

Vogliamo cercare ulteriori miglioramenti.
Di conseguenza, alleggeriamo i vincoli, cercando configurazioni vicine a quelle di CYIB-Opt con migliori costanti di Lebesgue. Usiamo come punto di partenza la configurazione trovata nella sezione precedente.

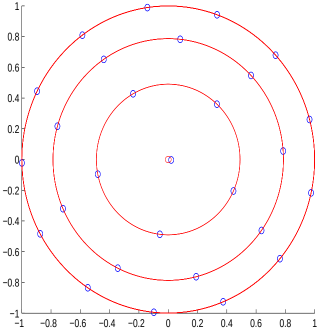
Come abbiamo visto i nodi sono disposti in cerchi concentrici. Ora consideriamo un determinato cerchio di raggio r_k che contiene $2n_k + 1$ nodi. Disponiamo i primi n_k nodi in un cerchio di raggio r_{k_1} e gli altri $n_k + 1$ nodi in un cerchio di raggio r_{k_2} senza modificarne l'angolo. Agendo in questo modo abbiamo visto che abbiamo disposto tutti i nodi in $n + 1$ cerchi.

Un possibile sviluppo

Figura: Confronto per $n = 6$ tra vecchia e nuova configurazione



(a) nuova configurazione



(b) vecchia configurazione

Un possibile sviluppo

Grado	6	7	8	9	10	11	12
CYIB-opt	4.26	4.76	5.32	5.90	6.50	7.20	7.93
CYIB-opt2	4.19	4.75	5.28	5.87	6.49	7.18	7.90

Grado	13	14	15	16	17	18	19	20
CYIB-opt	8.73	9.63	10.65	11.82	13.13	14.63	16.415	18.45
CYIB-opt2	8.72	9.62	10.62	11.76	13.08	14.60	16.29	18.14

Tabella: Confronto tra le costanti di Lebesgue trovate con questa nuova configurazione (indicate con CYIB-opt2) con quelle trovate con la vecchia configurazione (indicate con CYIB-opt).

Si puó notare che con questa tecnica abbiamo ottenuto piccoli miglioramenti, seppur ancora modesti. D'altra parte indica che i punti CYIB-opt non sono ottimali.

Alcuni ringraziamenti

Un sentito ringraziamento al dottor Sommariva e al dottor Rinaldi per l'aiuto e il sostegno ricevuto durante questo lavoro, sempre con grande disponibilitá.

Grazie a tutti presenti per l'attenzione concessami.