UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTÀ DI SCIENZE MM.FF.NN.
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA

TESI DI LAUREA IN MATEMATICA

# SOLUZIONE ACCELERATA DI EQUAZIONI INTEGRALI DI SECONDA SPECIE TRAMITE COMPRESSIONE DI CHEBYSHEV

Relatore: PROF. MARCO VIANELLO Marco Vianello
Correlatore: DOTT. ALVISE SOMMARIVA Alvise Sommariva

Laureando: MARTIGNAGO ALESSANDRO

ANNO ACCADEMICO 1999/2000

# Indice

# Introduzione

L'argomento di questa tesi è l'accelerazione della soluzione numerica di equazioni integrali di seconda specie (lineari e non lineari)

$$\varphi(x) - \mathcal{H}(\varphi)(x) = y(x)$$

per mezzo di una tecnica detta di "compressione" degli operatori integrali, basata sullo sviluppo in serie di Chebyshev del risultato dell'azione di un operatore:

$$\mathcal{H}(\varphi)(x) = \int_a^b k(x,t,\varphi(t))dt, \quad x \in [a,b] \subset (-\infty,+\infty).$$

Nella risoluzione numerica, descritta nel Capitolo 1, si impiega il metodo di Nyström con la formula di quadratura di Cavalieri-Simpson. Si ottiene una discretizzazione del problema, che viene ad essere così rappresentato:

$$\lambda\boldsymbol{\varphi}_n - \mathcal{H}_n(\boldsymbol{\varphi}_n) = \mathbf{y}_n \tag{0.0.1}$$

ove le componenti $(\boldsymbol{\varphi}_n)_i$ del vettore $\boldsymbol{\varphi}_n$ approssimano $\varphi(x_i)$ (la soluzione analitica nei nodi impiegati dalla formula di quadratura), $(\mathbf{y}_n)_i = y(x_i)$ e l'operatore discretizzato $\mathcal{H}_n$ è il seguente:

$$\mathcal{H}_n(\varphi)(x) = \sum_{j=1}^{n} w_j k(x, x_j, \varphi(x_j)) \tag{0.0.2}$$

con $x_i$ e $w_j$ vettori rispettivamente dei nodi e dei pesi di quadratura.

Per la soluzione numerica del sistema di equazioni (0.0.1), sia nel caso lineare che in quello non lineare, si utilizza il metodo iterativo di Broyden il quale fornisce una successione di vettori $\boldsymbol{\varphi}_n^r$ convergente superlinearmente a $\boldsymbol{\varphi}_n$ per $r \to +\infty$. Il risultante metodo di tipo "Nyström-Broyden" [1], come tutti i solutori iterativi applicati in modo standard a (0.0.1) è afflitto, ad ogni iterazione, da una complessità di ordine $O(n^2)$ nella valutazione di $(\mathcal{H}_n(\boldsymbol{\varphi}_n^r))_i \approx \mathcal{H}_n(\varphi)(x_i)$, $1 \leq i \leq n$.

Per tentare di ridurre il costo computazionale dell'applicazione di un operatore integrale discreto è stata proposta in [13] una tecnica detta di "compressione" degli operatori integrali, che si colloca nell'ambito dei cosiddetti *fast methods* (di importanza crescente nella recente letteratura sulla simulazione numerica di modelli integrali). Essa consiste essenzialmente nella costruzione di un'approssimazione dell'azione dell'operatore $\mathcal{H}_n$, non agendo preventivamente sul nucleo, ma sfruttando l'effetto di *smoothing* indotto da $\mathcal{H}$. Come tecniche di approssimazione in [13] sono state utilizzate lo sviluppo in serie discreta di Chebyshev e l'interpolazione di Newton sui nodi di Chebyshev; in questa tesi si è scelta la prima delle due giacché essa offre migliori garanzie di stabilità. L'utilizzo di questa tecnica ha permesso la definizione degli *operatori integrali compressi*:

$$\mathcal{H}_{m,n}(\varphi)(x) = \sum_{k=0}^{m} \hat{h}_n^k T_k(x) \tag{0.0.3}$$

in cui i $T_k$ sono i polinomi di Chebyshev di grado $k$ e gli $\hat{h}_n^k$ sono i coefficienti dello sviluppo ottenuti utilizzando i valori di $\mathcal{H}_n(\varphi)(x)$. Il costo per la valutazione di questi operatori diventa, come mostrato nel Capitolo 2, dell'ordine di $O(m \times n)$, dove tipicamente $m << n$. Nello stesso capitolo si descrive in che modo sia possibile ricavare delle stime del cosiddetto *errore di compressione*:

$$E_{m,n} = \|\mathcal{H}_{m,n}(\varphi) - \mathcal{H}_n(\varphi)\| \tag{0.0.4}$$

dalla combinazione di particolari "indicatori" ottenuti dal confronto fra i risultati di diverse compressioni. Mentre nel caso di nuclei regolari si ha che $E_{m,n} \to 0$ per $m \to +\infty$ (e $n$ fissato), con un nucleo *non smooth* si osserva una "stagnazione" di $E_{m,n}$ (individuabile tramite gli indicatori) al crescere di $m$ in corrispondenza del sottostante errore di quadratura :

$$E_n = \|\mathcal{H}(\varphi) - \mathcal{H}_n(\varphi)\|. \tag{0.0.5}$$

In questa tesi, per la prima volta si è esteso l'impiego degli operatori compressi $\mathcal{H}_{m,n}$ alla risoluzione di equazioni integrali secondo lo schema "Nyström-Broyden" descritto. In pratica (cfr. Capitolo 3), durante il ciclo iterativo di Broyden, si impiegano le valutazioni approssimate $\mathcal{H}_{m,n}(\varphi_n^r) \approx \mathcal{H}_n(\varphi_n^r)$, $r = 1, 2, \ldots$ . Il metodo di Broyden "compresso" converge (per $n \to +\infty$) al vettore $\varphi_{m,n}$ soluzione dell'equazione discretizzata e compressa:

$$\lambda \boldsymbol{\varphi}_{m,n} - \mathcal{H}_{m,n}(\boldsymbol{\varphi}_{m,n}) = \mathbf{y}_n \tag{0.0.6}$$

ove l'operatore $\mathcal{H}_{m,n}$ può essere descritto come composizione del "proiettore" di Chebyshev $P_m$ con l'operatore discretizzato di Nyström $\mathcal{H}_n$, ovvero:

$$\mathcal{H}_{m,n} = P_m \mathcal{H}_n.$$

Nel caso lineare si sono anche dimostrate delle stime dell'errore $\|\varphi_{m,n} - \varphi\|$ (par. 3.1.1), utilizzando ed estendendo considerazioni analoghe a quelle classicamente impiegate per i metodi di proiezione e di Nyström [1], [3].

La nuova strategia è stata messa alla prova in una serie di test (par. 3.2) su alcune equazioni integrali di seconda specie sia lineari che non lineari, fissando $n$ e variando il grado $m$ della compressione di Chebyshev. Si è così evidenziata l'efficacia del metodo "Nyström-Broyden" compresso, che può raggiungere fattori *speed-up* anche dell'ordine di $10^2$.

Sulla base di questi test e della stima teorica ricavata, nel Capitolo 4 si è proposto e testato un nuovo algoritmo (di tipo "Nyström-Broyden") basato sull'uso di diversi livelli di compressione per il medesimo operatore discretizzato, in cui gli stimatori dell'errore di compressione vengono sfruttati per decidere automaticamente il grado di quest'ultima.