**Esercizio 1.** Scrivere in <u>forma algebrica</u> i seguenti numeri complessi:

$$\frac{3-i}{4-i}\,; \quad \frac{(3+i)^2}{1-i}\,; \quad \frac{1}{(2-i)(2+i)}\,; \quad \frac{(2+i)^3}{\sqrt{3}-i}\,; \quad (2+i)(2i-3)\,; \quad \frac{1+\sqrt{5}i}{\sqrt{5}-i}\,;$$

$$(1+i)^4\,; \quad \frac{1+i}{i(2+3i)}\,; \quad (2+7i)+\frac{1}{2+7i}\,; \quad (1+\sqrt{5}i)(1-\sqrt{5}i)-i\,(1+\sqrt{5}i)^2\,.$$

**Esercizio 2.** Calcolare il <u>modulo</u> ed un <u>argomento</u> dei seguenti numeri complessi (ricordando che il quoziente di due numeri complessi è un numero complesso che ha per modulo il quoziente dei moduli e per argomento la differenza degli argomenti, mentre il prodotto di due numeri complessi è un numero complesso che ha per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti), e scriverli in <u>forma trigonometrica</u>:

$$1+i\,; \quad \sqrt{3}-i\,; \quad -3\,; \quad 2i\,; \quad -i\,; \quad -1-i\,; \quad \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}\,; \quad -\pi\,i\,; \quad \frac{i-1}{1-i\sqrt{3}}\,;$$

$$-2-7i\,; \quad 3-2i\,; \quad 3+4i\,; \quad \frac{1+3i}{4i}\,; \quad \frac{1}{1-i\sqrt{3}}\,; \quad (1+i)\,(2\sqrt{3}+2i)\,;$$

$$\frac{i\sqrt{3}+1}{1-i}\,; \quad \frac{i(\sqrt{3}-i)}{1+i}\,; \quad \frac{3-3i}{2\sqrt{3}+2i}\,.$$

**Esercizio 3.** Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $z$ il cui modulo ed argomento sono i seguenti:

**(a)** $|z| = 2\,, \qquad \arg(z) = \pi\,;$

**(b)** $|z| = 1\,, \qquad \arg(z) = \dfrac{3\,\pi}{4}\,;$

**(c)** $|z| = 5\,, \qquad \arg(z) = \arctan\big(3/4\big)\,;$

**(d)** $|z| = \sqrt{2}\,, \qquad \arg(z) = \dfrac{\pi}{3}\,;$

**(e)** $|z| = \pi\,, \qquad \arg(z) = \dfrac{\pi}{6}\,;$

**(f)** $|z| = 1/2\,, \qquad \arg(z) = \arctan(\sqrt{3})\,.$

**Esercizio 4.** Scrivere in forma algebrica i seguenti numeri complessi (si consiglia di esprimere prima in forma trigonometrica le potenze di esponente elevato usando le formule di De Moivre, e trasformarle poi in forma algebrica dopo averne calcolato le espressioni corrispondenti):

$$(1+i\sqrt{3})^5\,;\quad (1-i)^3\,(\sqrt{3}+3i)^7\,;\quad \frac{\sqrt{3}-i}{(1+i)^8}(7i)^3\,;\quad (1+i)^{322}\,;\quad (\sqrt{3}-i)^{123}\,.$$

**Esercizio 5.** Calcolare le radici di ordine $2, 5, 6$ dei seguenti numeri complessi:

$$-2\,;\quad -1-i\,;\quad i\,;\quad -i\,;\quad 4+2i\,;\quad -2-5i\,;\quad 3-7i\,;\quad (1-i)^6\,;\quad \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\,.$$

**Esercizio 6.** **(N.B. non richiesto per la prima prova parziale)** Trovare le soluzioni complesse delle seguenti equazioni (esplicitando la parte reale $x$ e la parte immaginaria $y$ delle soluzioni $z = x + iy$, e risolvendo i corrispondenti sistemi di equazioni in $x$ e $y$):

**(a)** $z^2 + \overline{z} + |z|^2 = 1\,;$

**(b)** $3z - z^2 = |z|^2 - 2\,;$

**(c)** $2z - 4\overline{z} + |z|^2 + 6i = 0\,;$

**(d)** $|z|^2 + z = 5 + 2i\,;$

**(e)** $|z|^2 - z^2 - 2iz = 0\,;$

**(f)** $z + \overline{z} + z^2 - |z|^2 = i(z + \overline{z})\,.$

**Esercizio 7.** Utilizzando eventualmente la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado risolvere le seguenti equazioni:

**(a)** $z^2 + z + 7 = 0\,;$

**(b)** $z^2 + z - \dfrac{i}{4} = 0\,;$

**(c)** $z^2 + iz - 3 = 0\,;$

**(d)** $-2z^2 + z - i = 0\,;$

**(e)** $iz^2 + 2z - 1 = 0\,;$

**(f)** $z^4 + z^2 + 8i = 0\,;$

**(g)** $z^2(z^2 - 2iz + 2 + i) = 0$;

**(h)** $(z^2 + i)^2 = -1$;

**(i)** $(z^2 + i)(z^2 + iz - 1) = 0$;

**(l)** $z^4 + 3z^2 + 2 = 0$;

**(m)** $z^6 - z^3 - 2 = 0$;

**(n)** $z^3 + zi = 0$;

**(o)** $(z^2 - 2)(z^3 + 2 + 7i) = 0$;

**(p)** $\left(\dfrac{z - i}{2z + i}\right)^2 = 8i$;

**(q)** $z^2 = (1 + 4i)^2$;

**(r)** $z^3 = (i - 1)^3$ (suggerimento: se denotiamo con $w_1$, $w_2$, $w_3$ le radici cubiche di 1, allora possiamo scrivere le soluzioni di questa equazione nel modo seguente: $z_1 = (i - 1)w_1$, $z_2 = (i - 1)w_2$, $z_3 = (i - 1)w_3$);

**(s)** $(z - 1)^3 = -i$;

**(t)** $(z + i)^3 = \dfrac{i - 1}{1 + i}$;

**(u)** $(z + 21)^5 = 2^5$;

**(v)** $(2z + 1)^2 = 8i$.