

Esercizio 1. Per ciascuna delle seguenti funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tracciare il grafico e:

- (i) Stabilire in quali punti f è continua, in quali è continua a destra, ed in quali è continua a sinistra.
- (ii) Stabilire in quali punti f ha una discontinuità a salto, in quali punti ha una discontinuità infinita, ed in quali punti ha una discontinuità che non ammette valori limite alla sua sinistra ed alla sua destra.
- (iii) Stabilire in quali punti f ha una discontinuità eliminabile e come dovrebbe essere ridefinita f in ciascuno di questi punti per diventare continua in tali punti.

(a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+4} & \text{se } x \in]-\infty, -4[, \\ e^{-x} & \text{se } x \in [-4, -1], \\ \frac{x}{1-|x|} & \text{se } x \in]-1, 1[, \\ 0 & \text{se } x = 1, \\ \frac{4}{x-1} & \text{se } x \in]1, 2[, \\ 1 & \text{se } x = 2, \\ x^2 & \text{se } x \in]2, +\infty[. \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \in]-\infty, 0[, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ e^{\frac{1}{x}} & \text{se } x \in]0, 1[, \\ 1 & \text{se } x = 1, \\ e x^2 & \text{se } x \in]1, +\infty[. \end{cases}$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{se } x \in]-\infty, -1[, \\ 0 & \text{se } x = -1, \\ x^2 + 2x & \text{se } x \in]-1, 0], \\ 1 & \text{se } x \in]0, 1[, \\ 2x - 2 & \text{se } x \in [1, +\infty[. \end{cases}$$

(d)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in]-\infty, -1[, \\ \frac{e+1}{2} & \text{se } x = -1, \\ e^{\frac{1}{|x|}} & \text{se } x \in]-1, 0[, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ x \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \in]0, +\infty[. \end{cases}$$

Esercizio 2. Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in]-\infty, \alpha[, \\ x^2 & \text{se } x \in [\alpha, +\infty[, \end{cases}$$

- ☐ A è continua solo se $\alpha = 0$;
- ☐ B non è continua per qualunque scelta di $\alpha \in \mathbb{R}$;
- ☐ C è continua solo se $\alpha = 0$ o se $\alpha = 1$;
- ☐ D è continua per qualunque scelta di $\alpha \geq 0$.

Esercizio 3. Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} |x + \alpha| & \text{se } x \in]-\infty, -1], \\ x^2 & \text{se } x \in]-1, +\infty[. \end{cases}$$

Si ha:

- ☐ A Esiste un solo α per cui f è continua;
- ☐ B Esistono infiniti α per cui f è continua;
- ☐ C Esistono due soli α per cui f è continua;
- ☐ D f non è continua per qualunque scelta di α .

Esercizio 4. Fissati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, $\beta > 0$ si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \in]-\infty, -1], \\ e^{\alpha x} + \beta & \text{se } x \in]-1, +\infty[. \end{cases}$$

Si ha:

- ☐ A Esiste una sola coppia di α, β per cui f è continua;
- ☐ B Esistono infinite coppie di α, β per cui f è continua;
- ☐ C Esistono due sole coppie di α, β per cui f è continua;
- ☐ D f non è continua per qualunque scelta di α, β .

Esercizio 5. Data una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- ☐ A Se f è pari e continua a destra in $x = 0$, può essere discontinua a sinistra in $x = 0$.
- ☐ B Se f è dispari e continua a destra in $x = 0$, può assumere valore $f(0) = 1$ in $x = 0$.
- ☐ C Se f è dispari, allora è continua in $x = 0$.
- ☐ D Se f è pari e continua a sinistra in $x = 0$, allora è continua in $x = 0$.

Esercizio 6. La funzione $f(x) = \ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$ definita nel suo dominio naturale

- ☐ A è invertibile.
- ☐ B è strettamente decrescente.
- ☐ C è discontinua in $x = 0$.
- ☐ D Nessuna delle altre risposte è corretta.

Esercizio 7. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ -x & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Si ha:

- ☐ A f non è invertibile;
- ☐ B Esiste un intervallo I di $\mathbb{R}$ per cui la restrizione di f ad I è monotona;
- ☐ C f non è dispari;
- ☐ D f è continua in $x = 0$.

Esercizio 8. La funzione $f(x) = x^3 - 15x + 1$

- ☐ A ha uno zero nell'insieme $[-3, -2] \cup [2, 3]$.
- ☐ B ha tre zeri nell'insieme $[-4, -3] \cup [-2, 2] \cup [3, 4]$.
- ☐ C ha quattro zeri nell'intervallo $[-4, 4]$.
- ☐ D Non ha zeri nell'intervallo $[-1, 1]$.

Esercizio 9. La funzione $f(x) = x^3 + x - 1$

- ☐ A ha uno zero nell'intervallo $] -\infty, 0]$.
- ☐ B ha uno zero nell'intervallo $[1, +\infty[$.
- ☐ C ha uno zero nell'intervallo $[0, 1]$.
- ☐ D Non ha zeri nell'intervallo $[-1, 1]$.

Esercizio 10. Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f(x) = x^3 + x + \alpha$. Si ha:

- ☐ A Per ogni α la funzione f ha un solo zero in $\mathbb{R}$.
- ☐ B Esiste un α per cui la funzione f non ha zeri in $\mathbb{R}$.
- ☐ C Esiste un α per cui la funzione f ha tre zeri in $\mathbb{R}$.
- ☐ D Per ogni α la funzione f non ha zeri nell'intervallo $] -\infty, 0]$.

Esercizio 11. Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, l'equazione $\sqrt[4]{x} = \alpha x - 1$

- ☐ A ha (almeno) una soluzione in $\mathbb{R}^+$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
- ☐ B ha una sola soluzione in $\mathbb{R}^+$, per ogni $\alpha > 0$.
- ☐ C non ha soluzione in $[0, 1]$, per ogni $\alpha > 1$.
- ☐ D ha (almeno) una soluzione in $[1, +\infty[$, per ogni $\alpha > 0$.

Esercizio 12. Data una funzione continua $f : [0, 2] \rightarrow [0, 2]$, si consideri la funzione $g : [0, 2] \rightarrow [0, 2]$ definita da $g(x) = f(x) - x$. Allora:

- ☐ A g è monotona.
- ☐ B g non ha punti di massimo (assoluto).
- ☐ C g ha (almeno) uno zero nel suo dominio.
- ☐ D g è costante.

Esercizio 13. Sia $f : [-2, -1] \cup [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Si ha:

- ☐ A Se $f(-2) = -2$ ed $f(2) = 2$, allora f ha (almeno) uno zero nel suo dominio.
- ☐ B Se $f(-2) = -2$ ed $f(1) = 1$, allora esiste $x_0 \in]-2, 1[$ tale che $f(x_0) = -1$.
- ☐ C Se $f(-1) = -1$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, allora f ha (almeno) uno zero nel suo dominio.
- ☐ D Se $f(1) = -1$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, allora f assume tutti i valori dell'intervallo $[-1, 1]$.

Esercizio 14. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua che soddisfa

$$f(x) = x^2 - 9 \quad \forall x \in \mathbb{Q}.$$

Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- ☐ A Non è possibile determinare $f(\sqrt{3})$ in base alle informazioni disponibili.
- ☐ B f non ha nè massimo nè minimo (assoluti).
- ☐ C f non è pari.
- ☐ D f ha due zeri.

3.2 Soluzioni degli esercizi a risposta multipla

Es. 2 C .

Es. 3 C .

Es. 4 D .

Es. 5 D .

Es. 6 D .

Es. 7 D .

Es. 8 B .

Es. 9 C .

Es. 10 A .

Es. 11 B .

Es. 12 C .

Es. 13 D .

Es. 14 D .