Esercizio 1. Per ciascuna delle seguenti curve parametriche $\vec{r}$, determinare l'insieme dei punti in cui la traiettoria ammette vettore tangente, e scrivere le equazioni della retta tangente e della retta normale alla traiettoria nei punti $\vec{r}(t_0)$ indicati.

(a) $\vec{r}(t) = \big(t(t-1),\, (t(t-1)(2t-1)\big), \quad \vec{r}(t_0),\ t_0 = \frac{1}{4},\, \frac{1}{2},\, \frac{3}{4}\,;$

(b) $\vec{r}(t) = \big(\sin(2t),\, \sin t\big), \quad \vec{r}(t_0),\ t_0 = 0,\, \frac{\pi}{2},\, \pi\,;$

(c) $\vec{r}(t) = \big(t\, e^{-\frac{t^2}{2}},\, e^{-(t-1)^2}\big), \quad \vec{r}(t_0),\ t_0 = 0,\, 1,\, 2\,;$

(d) $\vec{r}(t) = \big(t - \cos t,\, 1 - \sin t\big), \quad \vec{r}(t_0),\ t_0 = \frac{\pi}{4},\, \frac{\pi}{2},\, \pi\,;$

(e) $\vec{r}(t) = \big(t \sin t,\, \cos t\big), \quad \vec{r}(t_0),\ t_0 = \frac{\pi}{4},\, \frac{\pi}{2},\, \pi\,;$

(f) $\vec{r}(t) = \big(\cos t + t \sin t,\, \sin t - t\cos t\big), \quad \vec{r}(t_0),\ t_0 = \frac{\pi}{4},\, \frac{\pi}{2},\, \pi\,.$

Esercizio 2. Si consideri l'arco di parabola γ di equazioni parametriche $x(t) = t$, $y(t) = t^2$, $t \in [0,\, \sqrt{2}]$, e si calcoli l'integrale curvilineo (di prima specie) $I \doteq \int_\gamma \sqrt{x^2 + 3y}\, ds$. Si ha:

$\boxed{\text{A}}$ $I = 6$

$\boxed{\text{B}}$ $I = \frac{13}{3}$.

$\boxed{\text{C}}$ $I = 2$.

$\boxed{\text{D}}$ Nessuna delle altre risposte è corretta.

Esercizio 3. Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri il segmento di retta γ_α di equazioni parametriche $x(t) = t$, $y(t) = \alpha\, t$, $t \in [0,\, \pi]$, e si calcoli l'integrale curvilineo (di prima specie) $I(\alpha) \doteq \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{\gamma_\alpha} (\sin x + \cos y)\, ds$. Si ha:

$\boxed{\text{A}}$ $I(0) = 1$

$\boxed{\text{B}}$ $I(\alpha) = \sqrt{1+\alpha^2}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{C}}$ $I(\alpha) = \sqrt{1+\alpha^2}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

$\boxed{\text{D}}$ $I(\alpha) < 0$ per qualche $\alpha > 1$.

Esercizio 4. Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $\mathbf{x}(\alpha) = (x_B(\alpha), y_B(\alpha))$ il baricentro della cicloide di equazione $x(t) = \alpha(t - \sin t)$, $y(t) = \alpha(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, di densità costante ρ. Sia $\ell(\alpha)$ la sua lunghezza. Allora si ha:

$\boxed{\text{A}}$ $\ell(\alpha) + x_B(\alpha) = 8\alpha.$

$\boxed{\text{B}}$ $\ell(\alpha) \cdot y_B(\alpha) = 0.$

$\boxed{\text{C}}$ $\ell(\alpha) - x_B(\alpha) = \pi\alpha.$

$\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{\ell(\alpha)}{y_B(\alpha)} = 6.$

Esercizio 5. Si consideri la spirale logaritmica γ di equazione (in coordinate polari) $\rho = e^{2\theta}$, $\theta \in (-\infty, 0]$ e, fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, si calcoli l'integrale curvilineo (di prima specie) $I(\alpha) \doteq \int_\gamma (x^2 + y^2)^\alpha \, ds$. Si ha:

$\boxed{\text{A}}$ $I(\alpha) = +\infty$ per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$.

$\boxed{\text{B}}$ $I(\alpha) = \dfrac{\sqrt{5}}{2 + 4\alpha}$ per ogni $\alpha > -\dfrac{1}{2}$.

$\boxed{\text{C}}$ $I(\alpha) = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ per ogni $\alpha > 0$.

$\boxed{\text{D}}$ Nessuna delle altre risposte è corretta.

Esercizio 6. Fissato $\alpha > 0$, si consideri la spirale di Archimede γ_α di equazione (in coordinate polari) $\rho = 2\theta$, $\theta \in [0, \alpha]$ e se ne calcoli la lunghezza $\ell(\alpha)$. Si ha:

$\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\lim_{\alpha \to \infty} \frac{\ell(\alpha)}{\alpha^2} = 1\,.$

$\boxed{\text{B}}$ $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\ell(\alpha)}{\alpha} = 0\,.$

$\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\ell(\alpha)}{\alpha} = +\infty\,.$

$\boxed{\text{D}}$ Nessuna delle altre risposte è corretta.

Esercizio 7. Fissati $\alpha,\ \beta > 0$, si consideri l'arco di ellisse

$$\gamma_{\alpha,\beta} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad x,\ y \geq 0\right\}$$

e si calcoli l'integrale curvilineo (di prima specie) $I(\alpha, \beta) \doteq \int_{\gamma_{\alpha,\beta}} xy\ ds$. Si ha:

A $\lim\limits_{(\alpha,\beta)\to(1,1)} I(\alpha, \beta) = 1$.

B $\lim\limits_{(\alpha,\beta)\to(1,1)} I(\alpha, \beta) = 0$.

C $\lim\limits_{(\alpha,\beta)\to(1,1)} I(\alpha, \beta) = \dfrac{1}{2}$.

D Nessuna delle altre risposte è corretta.

Esercizio 8. Fissato $\alpha > 0$, si consideri la curva γ_α di equazione $x(t) = \cos t + t \sin t$, $y(t) = \sin t - t \cos t$, $t \in [0,\ \alpha]$, e si calcoli l'integrale curvilineo (di prima specie) $I(\alpha) \doteq \int_{\gamma_\alpha} \sqrt{x^2 + y^2}\ ds$. Si ha:

A $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} \dfrac{I(\alpha)}{\alpha} = 0$.

B $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} \dfrac{I(\alpha)}{\alpha^2} = +\infty$.

C $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} I(\alpha) = 1$.

D Nessuna delle altre risposte è corretta.

Esercizio 9. Fissati $\alpha,\ \beta > 0$, si consideri l'arco di elica cilindrica omogenea $\gamma_{\alpha,\beta}$ di equazione $x(t) = \alpha \cos t$, $y(t) = \alpha \sin t$, $z(t) = \beta t$, $t \in [0,\ 2\pi]$, e di massa totale $M = 1$, e se ne calcoli il momento d'inerzia $I(\alpha, \beta)$ rispetto all'asse z. Si ha:

A $I(\alpha, 0) = 0$ per ogni $\alpha > 0$.

B $I(\alpha, \beta) = \alpha^2 + \beta^2$ per ogni $\alpha,\ \beta > 0$.

C $I(\alpha, \beta) = \alpha^2$ per ogni $\alpha,\ \beta > 0$.

D Nessuna delle altre risposte è corretta.

Esercizio 10. Fissato $\alpha > 0$, si consideri l'astroide γ_α di equazione $x(t) = \alpha \cos^3 t$, $y(t) = \alpha \sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$. Determinare l'area (orientata) $A(\alpha)$ della regione delimitata dalla curva chiusa γ_α. Si ha:

A $A(\alpha) = 4\alpha^2$ per ogni $\alpha > 0$.

B $A(\alpha) = \frac{3}{8}\pi\alpha^2$ per ogni $\alpha > 0$.

C $A(\alpha) = -\pi\alpha^2$ per ogni $\alpha > 0$.

D $A(\alpha) = \frac{\pi}{4}$ per ogni $\alpha > 0$.

Esercizio 11. Fissato $\alpha > 0$, si consideri la curva parametrica chiusa

$$\vec{r}_\alpha(t) = \begin{cases} \big(\alpha \cos t,\ \alpha \sin t\big) & \text{se} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ \big(-\alpha \cos^3 t,\ \alpha \sin^3 t\big) & \text{se} \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]. \end{cases}$$

Determinare l'area (orientata) $A(\alpha)$ della regione delimitata da $\vec{r}_\alpha$.

A $A(\alpha) = \frac{5}{32}\pi$ per ogni $\alpha > 0$.

B $A(\alpha) = -\frac{3}{8}\pi\alpha^2$ per ogni $\alpha > 0$.

C $A(\alpha) = \frac{5}{8}\pi\alpha^2$ per ogni $\alpha > 0$.

D $A(\alpha) = \frac{5}{32}\pi\alpha^2$ per ogni $\alpha > 0$.

Esercizio 12. Fissato $\alpha > 0$, si consideri il cardioide γ_α di equazione (in coordinate polari) $\rho = 2\alpha\,(1 - \cos\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Determinare l'area (orientata) $A(\alpha)$ della regione delimitata dalla curva chiusa γ_α. Si ha:

A $A(\alpha) = 6\pi\alpha^2$ per ogni $\alpha > 0$.

B $A(\alpha) = -3\pi\alpha^2$ per ogni $\alpha > 0$.

C $A(\alpha) = 12\pi\alpha$ per ogni $\alpha > 0$.

D $A(\alpha) = 6\pi$ per ogni $\alpha > 0$.

2.2 Soluzioni degli esercizi a risposta multipla

Es. 2 **B**.

Es. 3 **C**.

Es. 4 **D**.

Es. 5 **B**.

Es. 6 **A**.

Es. 7 **C**.

Es. 8 **A**.

Es. 9 **C**.

Es. 10 **B**.

Es. 11 **D**.

Es. 12 **A**.