

Esercizio 1. Studiare la derivabilità e la differenziabilità delle seguenti funzioni. Per ciascuna di esse, dopo averne determinato il dominio naturale, si calcolino le derivate parziali prime ed il gradiente nei punti in cui è derivabile. Si determini inoltre l'equazione del piano tangente al loro grafico, e si scriva il loro differenziale nel punto (x_0, y_0) indicato.

(a) $f(x, y) = x^2y + 2xy - y^2 + 7x, \quad (x_0, y_0) = (1, -1);$

(b) $f(x, y) = \cos x, \quad (x_0, y_0) = (\pi, 1);$

(c) $f(x, y) = \ln(1 + e^{xy}), \quad (x_0, y_0) = (1, 0);$

(d) $f(x, y) = xye^{y^2-x^2}, \quad (x_0, y_0) = (1, -1);$

(e) $f(x, y) = y\sqrt{x}, \quad (x_0, y_0) = (0, 0);$

(f) $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}} \cos(xy), \quad (x_0, y_0) = (0, 1);$

(g) $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad (x_0, y_0) = (\sqrt{2}, -1);$

(h) $f(x, y) = \arctan(x\sqrt{y}), \quad (x_0, y_0) = (-\frac{1}{2}, 4);$

(i) $f(x, y) = y^{(x \ln y)}, \quad (x_0, y_0) = (-1, 1);$

(j) $f(x, y) = \frac{y}{\cos x}, \quad (x_0, y_0) = (\pi, -1);$

(k) $f(x, y) = \ln\left(\frac{x+y}{y-x}\right), \quad (x_0, y_0) = (0, -1);$

(l) $f(x, y) = e^y(\sin x + \cos x), \quad (x_0, y_0) = (-\pi, 0);$

(m) $f(x, y) = (\cos x)^{\sin y}, \quad (x_0, y_0) = (0, \frac{\pi}{2}).$

Esercizio 2. Per ciascuna delle seguenti funzioni, stabilire se esiste la derivata direzionale nel punto (x_0, y_0) e lungo la direzione $v = (v_1, v_2)$ indicate, ed in tal caso calcolarla.

(a) $f(x, y) = x^2y + 2xy - y^2, \quad (x_0, y_0) = (1, -1), \quad (v_1, v_2) = (\cos \theta, \sin \theta);$

(b) $f(x, y) = ye^{-y^2}, \quad (x_0, y_0) = (1, 0), \quad (v_1, v_2) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}});$

(c) $f(x, y) = |x - y|(x + y), \quad (x_0, y_0) = (1, 1), \quad (v_1, v_2) = (1, 0), (0, 1);$

(d) $f(x, y) = |xy| \ln(1 + xy), \quad (x_0, y_0) = (0, 0), \quad (v_1, v_2) = (\cos \theta, \sin \theta);$

$$(e) \quad f(x, y) = \sqrt{y(x-1)}, \quad (x_0, y_0) = (1, 0), \quad (v_1, v_2) = (\cos \theta, \sin \theta);$$

$$(f) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

$$(x_0, y_0) = (0, 0), \quad (v_1, v_2) = (1, 0), (0, 1), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

$$(g) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

$$(x_0, y_0) = (0, 0), \quad (v_1, v_2) = (\cos \theta, \sin \theta);$$

$$(h) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

$$(x_0, y_0) = (0, 0), \quad (v_1, v_2) = (1, 0), (\sqrt{2}, 1), (2, 2);$$

$$(i) \quad f(x, y) = \begin{cases} x^2 y \sin\left(\frac{1}{xy}\right) & \text{se } xy \neq 0, \\ 0 & \text{se } xy = 0, \end{cases}$$

$$(x_0, y_0) = (0, 0), \quad (v_1, v_2) = (\cos \theta, \sin \theta);$$

$$(j) \quad f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } |y| \leq \sqrt{|x|} \text{ oppure } x = 0, \\ 1 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$(x_0, y_0) = (0, 0), \quad (v_1, v_2) = (\cos \theta, \sin \theta).$$

Esercizio 3. Calcolare le derivate parziali seconde delle seguenti funzioni

$$(a) \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 - 2y^2};$$

$$(b) \quad f(x, y) = e^y \sin x;$$

$$(c) \quad f(x, y) = \ln(1 + xy);$$

$$(d) \quad f(x, y) = x e^y - y e^x;$$

$$(e) \quad f(x, y) = \ln(x^2 + y^2);$$

$$(f) \quad f(x, y) = y^x;$$

$$(g) \quad f(x, y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right);$$

$$(h) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$$

$$(i) \quad f(x, y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{se } y \neq 0, \\ 0 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Esercizio 4. Calcolare la derivata prima e seconda della funzione composta $h \doteq g \circ \vec{f}$ per le seguenti coppie di funzioni.

$$(a) \quad \vec{f}(t) = (1 + 2t, 1 - t), \quad g(x, y) = x^2 + y^2;$$

$$(b) \quad \vec{f}(t) = (\cos t, \sin t), \quad g(x, y) = x^2 + y^2;$$

$$(c) \quad \vec{f}(t) = (t \cos t, t \sin t), \quad g(x, y) = \ln(x^2 - y^2);$$

$$(d) \quad \vec{f}(t) = (2t, t e^t), \quad g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$(e) \quad \vec{f}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t), \quad g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}).$$

Esercizio 5. Calcolare le derivate parziali prime e seconde della funzione composta $h \doteq g \circ \vec{f}$ per le seguenti coppie di funzioni.

$$(a) \quad \vec{f}(s, t) = (3s + 2t, s - t), \quad g(x, y) = x^2 + y^2;$$

$$(b) \quad \vec{f}(s, t) = (s \cos t, s \sin t), \quad g(x, y) = x^2 + y^2;$$

$$(c) \quad \vec{f}(s, t) = (s \cos t, s \sin t), \quad g(x, y) = \ln(x^2 + y^2);$$

$$(d) \quad \vec{f}(s, t) = (e^s \cos t, e^s \sin t), \quad g(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right);$$

$$(e) \quad \vec{f}(s, t) = (-s + \sqrt{s^2 + t^2}, -s - \sqrt{s^2 + t^2}), \quad g(x, y) = x^2 + 2xy;$$

$$(f) \quad \vec{f}(s, t) = (s^2 - t^2, 2st), \quad g(x, y) = \frac{x}{y};$$

$$(g) \quad \vec{f}(s, t) = (\sqrt{s^2 + t^2}, \arctan\left(\frac{t}{s}\right)), \quad g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}).$$

Esercizio 6. Data una funzione $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = \int_x^{\sin y} \varphi(t) dt$. Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

☐ A $f_x(0, 2k\pi) + f_y(0, 2k\pi) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

☐ B $f_x(x, y) + f_y(x, y) \neq 0$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

☐ C $f_x(x, \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} f_y(x, \frac{\pi}{4}) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

☐ D $f_x(x, y) - f_y(x, y) \neq 0$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Esercizio 7. Fissati $\alpha, \beta > 0$, si consideri la funzione $f_{\alpha, \beta} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f_{\alpha, \beta}(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

☐ A $f_{\alpha, \beta}$ è differenziabile in $(0, 0)$ se $\alpha + \beta > 2$.

☐ B $f_{\alpha, \beta}$ non è differenziabile in $(0, 0)$ per ogni $\alpha, \beta > 0$.

☐ C $f_{\alpha, \beta}$ è differenziabile in $(0, 0)$ se $\alpha + \beta > 3$.

☐ D $f_{\alpha, \beta}$ è derivabile in $(0, 0)$ per ogni $\alpha, \beta > 0$.

Esercizio 8. Fissato $\alpha \geq -1$, si consideri la funzione $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f_\alpha(x, y) = \begin{cases} |xy|^\alpha \ln(1 + xy) & \text{se } xy \neq 0, \\ 0 & \text{se } xy = 0. \end{cases}$$

Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

☐ A Esiste $\alpha \geq -1$, per cui f_α non è derivabile in $(0, 0)$.

☐ B f_α è differenziabile in $(0, 0)$ per ogni $\alpha \geq -1$.

☐ C f_α non è differenziabile in $(0, 0)$ per ogni $\alpha \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

☐ D f_α è differenziabile in $(0, 0)$ per ogni $\alpha > -\frac{1}{2}$.

Esercizio 9. Fissato $\alpha > 0$, si consideri la funzione $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f_\alpha(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha \sin y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- ☐ A f_α è differenziabile in $(0, 0)$ per ogni $\alpha > 0$.
- ☐ B f_α è differenziabile in $(0, 0)$ per ogni $\alpha > 1$.
- ☐ C f_α non è differenziabile in $(0, 0)$ per ogni $\alpha < 2$.
- ☐ D Esiste $\alpha > 0$, per cui f_α non è continua in $(0, 0)$.

Esercizio 10. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + y^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right) & \text{se } xy \neq 0, \\ 0 & \text{se } xy = 0. \end{cases}$$

Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- ☐ A f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$.
- ☐ B f non è derivabile in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$.
- ☐ C f non è derivabile in $(0, 0)$.
- ☐ D f non è continua in $(0, 0)$.

Esercizio 11. Data una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile, si consideri la funzione $g_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g_\alpha(x, y) = f(\sqrt{x^2 + \alpha y^2})$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- ☐ A Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $|\nabla g_\alpha(x, y)| = \sqrt{x^2 + \alpha y^2} |f'(\sqrt{x^2 + \alpha y^2})|$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- ☐ B Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $|\nabla g_\alpha(x, y)| = |f'(\sqrt{x^2 + \alpha y^2})|$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- ☐ C Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\nabla g_\alpha(x, y) = \alpha f'(\sqrt{x^2 + \alpha y^2})$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- ☐ D Nessuna delle altre risposte è corretta.

Esercizio 12. Si consideri la funzione $f(x, y) = |y| \ln(1 + \sin(x^2 + y^2))$. Si ha:

- ☐ A f è differenziabile in tutti i punti del suo dominio naturale.
- ☐ B f è derivabile in tutti i punti del suo dominio naturale.
- ☐ C f è differenziabile in tutti i punti in cui è derivabile.
- ☐ D f non è continua in almeno un punto del suo dominio naturale.

Esercizio 13. Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f_\alpha(x, y) = \begin{cases} |x|^\alpha e^{-\frac{y^2}{x^2}} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- ☐ A f_α è derivabile in $(0, 0)$ lungo qualunque direzione $v = (\cos \theta, \sin \theta)$ per ogni $\alpha > 0$.
- ☐ B f_α è differenziabile in $(0, 0)$ per ogni $\alpha > 1$.
- ☐ C f_α è continua in $(0, 0)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
- ☐ D f_α non è differenziabile in $(0, 0)$ per ogni $\alpha < 2$.

Esercizio 14. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- ☐ A f è di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$.
- ☐ B $f_{xy}(0, 0) - f_{yx}(0, 0) = 0$.
- ☐ C f è di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.
- ☐ D $f_{xy}(0, 0) + f_{yx}(0, 0) = 1$.

Esercizio 15. Si consideri la funzione $f(x, y) = x^y - y^x$. Si ha:

- [A] La direzione di massima crescita di f nel punto $(1, 1)$ è quella della retta $y = -x$ nel verso positivo dell'asse x .
- [B] La direzione di massima decrescita di f nel punto $(1, 1)$ è quella dell'asse y nel suo verso negativo.
- [C] Esiste $v = (\cos \theta, \sin \theta)$ per cui la variazione di f in $(1, 1)$ nella direzione di v soddisfa $D_v f(1, 1) = \sqrt{2}$.
- [D] Per ogni $v = (\cos \theta, \sin \theta)$ si ha $D_v f(1, 1) \neq 0$.

Esercizio 16. Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f_\alpha(x, y) = \cos x e^{(-x^2 + \alpha y)}$. Si ha:

- [A] Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che la direzione di massima crescita di f_α nel punto $(1, 0)$ è quella dell'asse y nel suo verso positivo.
- [B] Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\max \{D_v f_\alpha(1, 0) : |v| = 1\} = e^{-1}$.
- [C] Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che il vettore $\nabla f_\alpha(1, 0)$ è parallelo alla tangente alla curva $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f_\alpha(x, y) = e^{-1}\}$ in $(1, 0)$.
- [D] Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che la direzione di massima crescita di f_α nel punto $(1, 0)$ è quella della tangente al grafico di $\ln(2 - x)$ in $(1, 0)$ nel verso negativo dell'asse x .

Esercizio 17. Data una funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile, stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- [A] f è derivabile in ogni punto lungo qualunque direzione $v = (\cos \theta, \sin \theta)$ e si ha $D_v f(x, y) = \langle \nabla f(x, y), v \rangle$.
- [B] Se $\nabla f(x, y) = 0$ su $A \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$, allora f è costante su A .
- [C] Se $f_x(x, y) = e^y \cos x$, allora esiste una funzione $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f_y(x, y) = e^y \sin x + \varphi(y)$.
- [D] f ammette massimo e minimo assoluto su ogni insieme chiuso e limitato.

Esercizio 18. Data una funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^2$ che soddisfa l'equazione $f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y) = 0$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

[A] Sia $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ un'altra funzione che soddisfa l'equazione

$$g_{xx}(x, y) + g_{yy}(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

e si consideri la funzione prodotto $h(x, y) = f(x, y)g(x, y)$. Allora, se

$$h_{xx}(x, y) + h_{yy}(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

si ha che $\langle \nabla f(x, y), \nabla g(x, y) \rangle = 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

[B] La funzione composta $g(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ soddisfa l'equazione

$$g_{\rho\rho}(x, y) + \frac{1}{\rho^2} g_{\theta\theta}(\rho, \theta) = 0 \quad \forall (\rho, \theta) \in]0, \infty[\times]0, 2\pi[.$$

[C] La funzione composta $g(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ soddisfa l'equazione

$$g_{\rho\rho}(x, y) + g_{\theta\theta}(\rho, \theta) = 0 \quad \forall (\rho, \theta) \in]0, \infty[\times]0, 2\pi[.$$

[D] La funzione composta $g(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ soddisfa l'equazione

$$g_{\rho\theta}(\rho, \theta) = 0 \quad \forall (\rho, \theta) \in]0, \infty[\times]0, 2\pi[.$$

Esercizio 19. Data una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile, si consideri la funzione $g(x, y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$, $y \neq 0$. Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

[A] Non esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui si ha

$$\frac{x}{y} g_x(x, y) + \alpha g_y(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{t.c. } xy \neq 0.$$

[B] Se $f(1) = 1$ e g soddisfa l'equazione

$$y g_x(x, y) - x g_y(x, y) = -\frac{y^2}{x^2} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{t.c. } xy \neq 0,$$

allora si ha $f(t) = \arctan t + \frac{1}{t} - \frac{\pi}{4}$.

[C] Esiste (x_0, y_0) tale che $f'\left(\frac{x_0}{y_0}\right) \neq 0$, e $\nabla g(x_0, y_0) = (0, 0)$.

[D] Esiste (x_0, y_0) tale che $\nabla g(x_0, y_0)$ è parallelo all'asse y .

3.2 Soluzioni degli esercizi a risposta multipla

Es. 6 **A .**

Es. 7 **C .**

Es. 8 **D .**

Es. 9 **B .**

Es. 10 **A .**

Es. 11 **B .**

Es. 12 **C .**

Es. 13 **B .**

Es. 14 **D .**

Es. 15 **A .**

Es. 16 **D .**

Es. 17 **C .**

Es. 18 **A .**

Es. 19 **B .**