

Esercizi sulle disequazioni

a cura del Dott. Simone Vazzoler

21 ottobre 2009

1 Valore assoluto

Esercizio 1.1. $\left| \frac{3-2x}{x+1} \right| < 1$

Svolgimento: Abbiamo i due sistemi:

$$(i) \begin{cases} \frac{3-2x}{x+1} \geq 0 \\ \frac{3-2x}{x+1} < 1 \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} \frac{3-2x}{x+1} < 0 \\ -\frac{3-2x}{x+1} < 1 \end{cases}$$

Le soluzioni dell'esercizio sono date dall'unione delle soluzioni dei due sistemi. Tali sistemi diventano:

$$(i) \begin{cases} -1 < x \leq \frac{3}{2} \\ \frac{3-2x}{x+1} < 1 \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} x < -1 \text{ oppure } x > \frac{3}{2} \\ -\frac{3-2x}{x+1} < 1 \end{cases}$$
$$(i) \Rightarrow \begin{cases} -1 < x \leq \frac{3}{2} \\ \frac{2-3x}{x+1} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < x \leq \frac{3}{2} \\ x < -1 \text{ oppure } x > \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{3} < x \leq \frac{3}{2}$$
$$(ii) \Rightarrow \begin{cases} x < -1 \text{ oppure } x > \frac{3}{2} \\ \frac{x-4}{x+1} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -1 \text{ oppure } x > \frac{3}{2} \\ -1 < x < 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2} \leq x < 4$$

Le soluzioni sono date da $]\frac{2}{3}, 4[$.

□

Esercizio 1.2. $\left| \frac{2x+1}{x-3} \right| < 2$

Sol.: $] -\infty, \frac{5}{4}[$

Esercizio 1.3. $\left| \frac{x-3}{x+5} \right| > 2$

Sol.: $] -13, -5[\cup] -5, -\frac{7}{3}[$

Esercizio 1.4. $|x^2 - 8x + 10| > 3$

Sol.: $] -\infty, 1[\cup] -\sqrt{3}, 4 + \sqrt{3}[\cup] 7, \infty[$

Esercizio 1.5. $\frac{|4x - 1| - 3x - 1}{x^2 + 4x + 16} > 0$

Sol.: $] -\infty, 0[\cup] 2, +\infty[$

Esercizio 1.6. $\frac{1}{(x-3)(x+2)} \leq \frac{1}{|x-3|} + \frac{1}{|x+2|}$

Sol.: $\mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$

Esercizio 1.7. $\frac{2(x+4) - x^2}{|x-4|} > -x - 3$

Sol.: $] -\frac{5}{2}, +\infty[\setminus \{4\}$

Esercizio 1.8. $|x^2 - 4| + |x^2 - 1| > 1$

Sol.: $\mathbb{R}$

Esercizio 1.9. $\frac{|2x + 5| - 7}{|x|} < 0$

Sol.: $] -6, 1[\setminus \{0\}$

Esercizio 1.10. $\frac{|x-2|}{|x+|x||} < 1$

Sol.: $] \frac{2}{3}, +\infty[$

2 Radici

Esercizio 2.1. $\sqrt{x-3} < 2x-1$

Sol.: $[3, +\infty[$

Esercizio 2.2. $\sqrt{16+x^2} - x \leq -3$

Sol.: $\emptyset$

Esercizio 2.3. $\sqrt{\frac{81x^3-3}{x+2}} < 9x+1$

Sol.: $[\frac{1}{3}, +\infty[$

Esercizio 2.4. $\sqrt{x} + \sqrt{x-4} > \sqrt{2x-1}$

Sol.: $] \frac{9}{2}, +\infty[$

Esercizio 2.5. $\frac{5x}{\sqrt{-5x-1}} < 2$

Sol.: $] -\infty, -\frac{1}{5}[$

Esercizio 2.6. $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}} < \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-3}} + \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}}$

Sol.: $]3, +\infty[$

Esercizio 2.7. $\frac{\sqrt{x^2 + 5} - 2x}{x^2 - 4x + 3} \leq 0$

Sol.: $]1, \frac{\sqrt{15}}{3}] \cup [3, +\infty[$

Esercizio 2.8. $\sqrt{1 + x^2} < 2 - |x|$

Sol.: $] -\frac{3}{4}, \frac{3}{4}[$

Esercizio 2.9. $\sqrt[3]{x^3 + 8} \geq x + 2$

Sol.: $[-2, 0]$

Esercizio 2.10. $\sqrt{2x^2 - 3x + 4} + 1 > 2x$

Sol.: $] -\infty, \frac{3}{2}[$

3 Esponenziali

Esercizio 3.1. Risolvere:

(i) $250 \cdot 5^{\frac{x}{3}} > 2$

(ii) $\left(\frac{1}{27}\right)^x > \frac{1}{81}$

Svolgimento:

(i) Dividiamo ambo i membri per 250:

$$5^{\frac{x}{3}} > \frac{2}{250}$$

Semplificando otteniamo:

$$5^{\frac{x}{3}} > 5^{-3}$$

Poiché le potenze hanno base maggiore di 1 otteniamo

$$\frac{x}{3} > -3 \Rightarrow x > -9.$$

(ii) $\frac{1}{27}$ ed $\frac{1}{81}$ sono potenze di $\frac{1}{3}$, quindi:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{3x} > \left(\frac{1}{3}\right)^4$$

Le potenze hanno base minore di 1 e quindi

$$3x < 4 \Rightarrow x < \frac{4}{3}.$$

□

Esercizio 3.2. $3^x - 2 \cdot 3^{2-x} < 7$

Svolgimento: Sfruttando le proprietà delle potenze

$$3^x - 2 \cdot \frac{9}{3^x} < 7$$

Introduciamo la variabile ausiliaria $y = 3^x$. Otteniamo

$$y - \frac{18}{y} < 7 \Rightarrow \frac{y^2 - 7y - 18}{y} < 0$$

Il denominatore è sempre positivo ($y = 3^x > 0$) quindi la disequazione è equivalente a

$$y^2 - 7y - 18 < 0$$

le cui soluzioni sono $-2 < y < 9$. Risostituendo 3^x otteniamo la disequazione $-2 < 3^x < 9$ che è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 3^x > -2 \\ 3^x < 3^2 \end{cases}$$

La prima disequazione ha per soluzione tutti gli x reali, mentre la seconda $x < 2$. Le soluzioni dell'esercizio sono date dalle soluzioni comuni e quindi $x < 2$.

□

Esercizio 3.3. $\left| \frac{4^{-x}}{2^{x+2} \cdot 2^6} \right| < 1$

Svolgimento: Riscriviamo tutto (utilizzando le proprietà delle potenze) come

$$\left| \frac{2^{-2x}}{2^{x+2} \cdot 2^6} \right| < 1 \Rightarrow |2^{-2x-x-2+6}| < 1 \Rightarrow |2^{-3x+4}| < 1$$

L'ultima disequazione scritta è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 2^{-3x+4} > -1 \\ 2^{-3x+4} < 1 \end{cases}$$

La prima è verificata per ogni x reale, mentre la seconda si riscrive come $2^{-3x+4} < 2^0$. Poiché la base è maggiore di 1 si deve avere $-3x + 4 < 0$ ovvero $x > \frac{4}{3}$. Le soluzioni dell'esercizio sono date dalle soluzioni comuni alle due disequazioni del sistema cioè $x > \frac{4}{3}$.

□

Esercizio 3.4. $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} < 64$

Sol.: $] -2, +\infty[$

Esercizio 3.5. $100^x < 0,001$

Sol.: $] -\infty, -\frac{3}{2}[$

Esercizio 3.6. $\frac{9 \cdot 3^{-x}}{9^x + 3^{2x}} > \frac{27}{2}$

$$\text{Sol.: }] - \infty, -\frac{1}{3}[$$

Esercizio 3.7. $(2^{x+2})^2 \cdot 3^x < \frac{2}{3^{x+3}}$

$$\text{Sol.: }] - \infty, -\frac{3}{2}[$$

Esercizio 3.8. $\frac{2^{3x} - 8 + 3 \cdot 2^{x+2} - 3 \cdot 2^{2x+1}}{\sqrt{4^x + 3^{-x} + 10}} \geq 0$

$$\text{Sol.: } [1, +\infty[$$

Esercizio 3.9. $\sqrt[2x+3]{\left(\frac{2}{3}\right)^{3x}} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^3 \sqrt[x+2]{\left(\frac{3}{2}\right)^{-x}}$

$$\text{Sol.: }] - \infty, -2[\cup] -\frac{3}{2}, +\infty[$$

Esercizio 3.10. $\left| \frac{3 \cdot 5^{x+1} + 5}{5^{2x} - 2 \cdot 5^x + 1} \right| < 5$

$$\text{Sol.: }]1, +\infty[$$

4 Logaritmi

Esercizio 4.1. $\log_{\frac{1}{4}}(x^2 - 6) - \log_{\frac{1}{4}}(x - 3) > -1$

Svolgimento: La disequazione è definita quando

$$\begin{cases} x^2 - 6 > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -\sqrt{6} \text{ oppure } x > \sqrt{6} \\ x > 3 \end{cases} \Rightarrow x > 3$$

Usando le proprietà dei logaritmi otteniamo

$$\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x^2 - 6}{x - 3}\right) > \log_{\frac{1}{4}}(4)$$

Poichè la base dei logaritmi è minore di 1 abbiamo

$$\frac{x^2 - 6}{x - 3} < 4 \Rightarrow \frac{x^2 - 4x + 6}{x - 3} < 0$$

Si ha $\Delta(x^2 - 4x + 6) = 16 - 24 < 0$, da cui $x^2 - 4x + 6 > 0$ per ogni x reale. La disequazione razionale è equivalente a

$$x - 3 < 0 \Rightarrow x < 3$$

Quindi la disequazione non ha soluzioni perchè essa è definita per $x > 3$.

□

Esercizio 4.2. $\log_2(5x - 6) < 3 + \frac{4}{\log_2(5x - 6)}$

Svolgimento: Introduciamo l'incognita ausiliaria $y = \log_2(5x - 6)$ e sostituiamo:

$$y < 3 + \frac{4}{y} \Rightarrow \frac{y^2 - 3y - 4}{y} < 0$$

Tale disequazione razionale ha come soluzioni $y < -1$ o $0 < y < 4$. Dobbiamo quindi risolvere le due disequazioni logaritmiche

$$(i) \log_2(5x - 6) < -1$$

$$(ii) 0 < \log_2(5x - 6) < 4$$

Le soluzioni dell'esercizio saranno date dall'unione delle soluzioni di (i) e (ii).

$$(i) \Rightarrow \begin{cases} 5x - 6 > 0 \text{ condizione di esistenza del logaritmo} \\ 5x - 6 < \frac{1}{2} \text{ poichè } -1 = \log_2 \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > \frac{6}{5} \\ x < \frac{13}{10} \end{cases} \Rightarrow \text{Sol}(i) = \left] \frac{6}{5}, \frac{13}{10} \right[$$

$$(ii) \Rightarrow \begin{cases} 5x - 6 > 0 \text{ condizione di esistenza del logaritmo;} \\ \log_2(5x - 6) > \log_2 1 \text{ poichè } 0 = \log_2 1; \\ \log_2(5x - 6) < \log_2 16 \text{ poichè } 4 = \log_2 16. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > \frac{6}{5} \\ 5x - 6 < 16 \\ 5x - 6 > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{6}{5} \\ x < \frac{22}{5} \\ x > \frac{7}{5} \end{cases} \Rightarrow \text{Sol}(ii) = \left] \frac{7}{5}, \frac{22}{5} \right[$$

Le soluzioni della disequazione sono pertanto $\left] \frac{6}{5}, \frac{13}{10} \right[\cup \left] \frac{7}{5}, \frac{22}{5} \right[$.

□

Esercizio 4.3. $\frac{1}{2} \log(-x^2 + 2x) < \log x$

Sol.: $]1, 2[$

Esercizio 4.4. $2 \log_{\sqrt{3}}(1 - x) - \log_{\sqrt{3}}(3 - x) < 2$

Sol.: $\left] \frac{-1 - \sqrt{33}}{2}, 1 \right[$

Esercizio 4.5. $\log(x + 5) - \log(4 - x) + \log(3x - 1) > \log(3x - 1) - \log(x + 4)$

Sol.: $\left] \frac{1}{3}, 4 \right[$

Esercizio 4.6. $(\log_{\frac{1}{2}} x)^2 - \log_{\frac{1}{2}} x - 2 < 0$

Sol.: $\left] \frac{1}{4}, 2 \right[$

Esercizio 4.7. $\log_{\frac{2}{3}} x^5 - 2 \log_{\frac{2}{3}} \sqrt{x} < 1$

Sol.: $\left] \sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty \right[$

Esercizio 4.8. $3 \log_5(x - 4) > \frac{6}{\log_5(x - 4) + 1}$

Sol.: $\left] \frac{101}{25}, \frac{21}{5} \right[\cup]9, +\infty[$

Esercizio 4.9. $\log_2 \log_3(x + 4) > 0$

Sol.: $]1, +\infty[$

Esercizio 4.10. $\frac{|\log_3 |2x + 3|| - 3}{\log_3 x} > 0$

Sol.: $]0, 1[\cup]12, +\infty[$